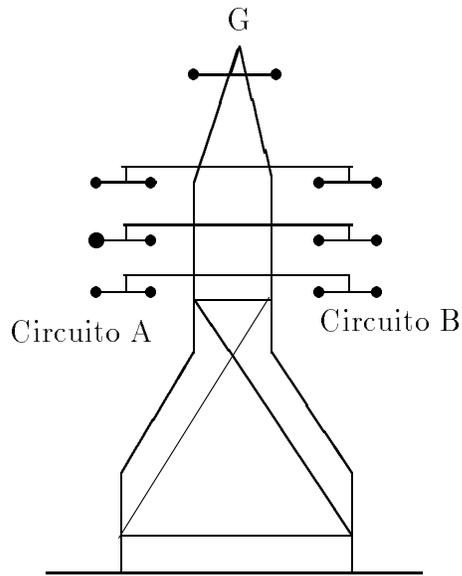


JOSÉ TAVARES DE OLIVEIRA



ELEMENTOS BÁSICOS DE ANÁLISE DE SISTEMAS DE POTÊNCIA

$$[Z] =$$

6x6 Circuito A-A	6x6 Acoplamento A-B	6x2 Acoplamento A-G
Acoplamento A-B 6x6	Circuito B-B 6x6	Acoplamento B-G 6x2
Acoplamento G-A 2x6	Acoplamento G-B 2x6	Circuito G-G 2x2

JOSÉ TAVARES DE OLIVEIRA

Professor do Departamento de Engenharia Elétrica da UFRN
(Graduação e Pós-Graduação)

Doutor em Engenharia Elétrica - COPPE - UFRJ - RJ - 1993

Mestre em Engenharia Elétrica - UFPB - C. Grande - PB - 1979

Espec. em Sist. de Potência - UNICAMP - Campinas - SP - 1978

Engenheiro Eletrotécnico - UFRN - RN - 1977

Técnico em Eletrotécnica - ETEFRN - RN - 1972

**ELEMENTOS BÁSICOS
DE
ANÁLISE
DE
SISTEMAS
DE
POTÊNCIA**

Apostila da Disciplina:

Análise de Sistemas de Potência

do Curso de

Engenharia Elétrica

da

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

APRESENTAÇÃO

Esta Apostila tem como objetivo servir de referência para a disciplina ANÁLISE DE SISTEMAS DE POTÊNCIA do curso de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Retrata de forma clara e simplificada os tópicos da ementa, dando todas as condições ao aluno entender e praticar os fundamentos básicos necessários para a Análise de Sistemas de Energia Elétrica.

Quero deixar claro ao leitor, que não é um trabalho inédito, mas uma coletânea de assuntos fundamentais que, alguns, foram transcritos da bibliografia citada para não perder a qualidade e não descaracterizar a escrita do autor e que, outros, foram acrescentados e aperfeiçoados para dar uma melhor apresentação didática.

A bibliografia citada no final, oferece condições ao leitor aprofundar-se no assunto de interesse específico dos ensinamentos apresentados.

Espero que o objetivo seja alcançado pelos alunos e o leitor de uma forma geral e, desde agora, estou a disposição de todos para acatar qualquer crítica, desde que venha no sentido de melhorar este trabalho.

”Muita gente critica facilmente, mas não coopera. Esta é a forma mais vulgar de sabotar o esforço alheio”(xxxxxxxxxxxx).

Natal, 27 de fevereiro de 1998
José Tavares de Oliveira

Índice

1	CÁLCULO DE PARÂMETROS LONGITUDINAIS E TRANSVERSAIS DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO [5, 12]	1
1.1	Indutância de Linhas de Transmissão	1
1.2	Indutância de um Condutor devida ao Fluxo Interno	2
1.3	Fluxo Envolvido por dois Pontos Externos de um Condutor Isolado	4
1.4	Indutância de uma Linha a Dois Fios	5
1.5	Fluxo Concatenado com um Condutor de um Grupo de Condutores	6
1.6	Indutância de uma Linha de Cabos	8
1.7	Indutância de uma Linha Trifásica com Espaçamento Assimétrico	10
1.8	Indutância de uma Linha com Espaçamento Equilateral	11
1.9	Indutância de uma Linha com Espaçamento Assimétrico com Transposição	12
1.10	Influência da Terra Considerada um Condutor Perfeito	16
1.10.1	Correção de Carson	18
1.11	Exercício Resolvido	20
1.12	Exercícios Propostos	21
1.13	Capacitância das linhas de Transmissão	23
1.14	Campo Elétrico de um Condutor Longo e Reto	23
1.15	Diferença de Potencial entre dois Pontos devido a uma Carga	24
1.16	Capacitância de uma Linha a dois Condutores	24
1.17	Diferença de Potencial entre dois Condutores de um Grupo de Condutores Carregados	26
1.18	Efeito da Terra na Capacitância de uma Linha de Transmissão	27
1.19	Exercícios Resolvidos	30
1.20	Problemas propostos	31
1.21	Redução à Linha Equivalente com Três Condutores	32
1.21.1	Eliminação de Cabos Terra	34
1.21.2	Redução de Condutores Múltiplos a um Condutor Equivalente	35
1.21.3	Circuitos Paralelos	36

1.22	Relações entre Tensão e Corrente numa Linha de Transmissão	37
1.23	Representação das Linhas	37
1.23.1	Linha de Transmissão Curta	39
1.23.2	Linhas de Comprimento Médio	40
1.23.3	Linhas de Transmissão Longas - Solução das Equações Diferenciais .	41
1.23.4	Linha de Transmissão Longa - Interpretação das Equações	42
1.23.5	Linha de Transmissão Longa - Forma Hiperbólica das Equações . .	43
1.23.6	Circuito Equivalente de uma Linha Longa	44
1.24	Constantes Generalizadas de um Circuito	46
1.25	Exercícios Resolvidos	47
1.26	Exercícios Propostos	50
2	FORMAÇÃO DAS MATRIZES ADMITÂNCIA E IMPEDÂNCIA DE BARRA E REDUÇÃO DE REDES.[4, 12]	52
2.1	Introdução	52
2.2	Fontes Equivalentes	52
2.3	Equações Nodais	54
2.4	Redução de Redes	58
2.5	Medição dos Elementos das Matrizes Impedância e Admitância de Barra .	63
2.6	Modificação de uma Matriz Impedância de Barra	67
2.7	Determinação Direta de uma Matriz Impedância de Barra	71
3	ESTUDO DE FLUXO DE CARGA [1, 2]	76
3.1	Introdução	76
3.2	Equações Básicas de Fluxo de Carga	77
3.3	Método de Gauss e Gauss-Seidel	82
3.4	Método de Newton-Raphson	87
3.4.1	Aplicações às equações de Fluxo de Potência	90
3.4.2	Método de Newton-Raphson: Coordenadas Cartesianas	92
3.4.3	Método de Newton-Raphson: Coordenadas Polares	96
3.4.4	Considerações Finais sobre o Método de Newton-Raphson	101
3.5	Fluxo de Carga Desacoplado Rápido	105

4	CURTO-CIRCUITO[11]	108
4.1	Equações Básicas de Cálculo de Curto-Circuito	108
4.2	Impedâncias de Sequência Positiva, Negativa e Zero	109
4.2.1	Impedância de sequência positiva (Z_1)	109
4.2.2	Impedância de sequência negativa (Z_2)	109
4.2.3	Impedância de sequência zero (Z_0)	110
4.3	Equações Básicas de Cálculo de Curto-Circuito	111
4.4	Curto-Circuito Trifásico	112
4.5	Curto-Circuito Monofásico à Terra	114
4.6	Curto-Circuito Bifásico sem Contato com a Terra	120
4.7	Curto-Circuito Bifásico em Contato com a Terra	122
4.8	Análise Comparativa dos Casos de Curto-Circuito	130
4.8.1	Redes com Neutro Isolado	130
4.8.2	Redes com Ponto Neutro do Sistema Aterrado Indutivamente	130
4.8.3	Redes com Ponto Neutro do Sistema Rigidamente Aterrado	131
4.9	A Variação da Corrente de Curto-Circuito em Função do Tempo	132
4.10	Grandezas Características do Processo de Amortecimento	134
4.10.1	Reatâncias do gerador	134
4.10.2	As constantes de tempo	135
4.10.3	Cálculo dos valores instantâneos das correntes de curto-circuito	137
4.11	Problema Proposto	138
5	MÉTODOS MATRICIAIS PARA A SOLUÇÃO DE FALTAS TRANSVERSAIS E DEFEITOS LONGITUDINAIS[2, 10]	139
5.1	Introdução	139
5.2	Equacionamento em Grandezas de Fase	140
5.3	Equacionamento em Termos de Componentes Simétricos	146
5.4	Obtenção das Equações em Casos Particulares	147
5.4.1	Defeito trifásico envolvendo a terra	148
5.4.2	Defeito trifásico equilibrado não envolvendo a Terra	150

5.4.3	Falta dupla-fase	152
5.4.4	Curto fase-terra	154
5.5	Hipóteses Simplificadoras	158
5.6	Defeitos Longitudinais	158
5.6.1	Condição de Circuito Aberto	158
5.6.2	Abertura de uma fase	160
5.6.3	Abertura de duas fases	162
6	ANÁLISE DE CONTINGÊNCIAS[2]	164
6.1	Introdução	164
6.2	Fluxo de Potência em Corrente Contínua (FPDC)	165
6.3	Contingências Simples	168
6.4	Cálculo de Fluxo de Potência para a Rede Modificada Devido a Con- tingências Múltiplas - Método da Compensação	169
6.5	Análise de Contingências pelo Método da Matriz de Impedâncias Nodais .	174
6.5.1	Análise de sobrecargas	176
7	ESTABILIDADE EM SISTEMAS DE POTÊNCIA[12]	183
7.1	Introdução	183
7.2	O Problema da Estabilidade	183
7.3	Dinâmica do Rotor e a Equação de Oscilação	185
7.4	Considerações Adicionais da Equação de Oscilação	188
7.5	A Equação do Ângulo de Potência	192
7.6	Coefficientes de Potência Sincronizante	200
7.7	Critério das Áreas Iguais na Análise de Estabilidade	202
7.8	Aplicações Adicionais do Critério das Áreas Iguais	209
7.9	Estudo de Estabilidade Multimáquina: Representação Clássica	211
7.10	Solução por Passos da Curva de Oscilação	220
7.11	Programa de Computador Digital para Estudo de Estabilidade Transitória.	226
	Referências Bibliográficas	229

Capítulo 1

CÁLCULO DE PARÂMETROS LONGITUDINAIS E TRANSVERSAIS DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO [5, 12]

1.1 Indutância de Linhas de Transmissão

Uma linha de transmissão de energia elétrica possui quatro parâmetros que influem decisivamente no transporte da energia elétrica. Estes parâmetros são a resistência, a indutância, a capacitância e a condutância.

A resistência é um parâmetro inerente ao tipo e à bitola do condutor que é utilizado na linha, experimentando pequenas variações com a temperatura do condutor e a frequência do sistema.

O valor da indutância depende exclusivamente da geometria da linha e do meio no qual se encontram os condutores. É, pode-se dizer o parâmetro mais importante da linha uma vez que é sempre levado em consideração qualquer que seja a análise que se proceda no estudo de linhas, obviamente na análise de circuitos CA.

A capacitância assume importância no estudo de desempenho de linhas quando se verificam tensões superiores a 34,5 kV e comprimentos superiores a 80 km em tais linhas. Pode-se desprezar este parâmetro para linhas com níveis de tensões e comprimentos inferiores a estes.

A condutância só merece consideração quando os níveis de tensão são elevados, em virtude das perdas por ela provocada, nas linhas com baixo nível de tensão, serem insignificantes. No raciocínio que se segue, somente serão consideradas tensões e correntes alternadas e senoidais e linhas aéreas. Nenhum estudo será realizado para linhas em cabos tripolares usados em distribuição e transmissão subterrâneas.

1.2 Indutância de um Condutor devida ao Fluxo Interno

Admitindo-se a seção transversal de um condutor cilíndrico, de comprimento infinito e suficientemente distante de quaisquer outros condutores e do solo para não afetar o campo magnético do condutor considerado, uma corrente $I(A)$ percorrendo este condutor produzirá linhas de fluxo magnético que serão concêntricas ao condutor. Linhas de fluxo no interior do condutor, também existirão envolvendo cada uma parcela da corrente total que circula pelo condutor.

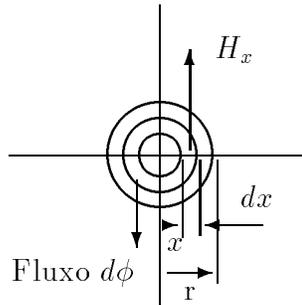


Figura 1.1: Fluxo no interior de um Condutor

Considerando-se apenas uma linha de fluxo no interior do condutor a uma distância x do seu centro, a componente tangencial da intensidade de campo H_x , tangenciando naturalmente a linha de fluxo $d\phi$, será dada por:

$$H_x = \frac{I_x}{2\pi x} \quad (1.1)$$

onde:

H_x - vetor intensidade de campo magnético

I_x - valor eficaz da corrente envolvida pela linha de fluxo $d\phi$.

Admitindo-se densidade de corrente uniforme, pode-se dizer que:

$$\frac{I}{\pi r^2} = \frac{I_x}{\pi x^2}$$

ou

$$I_x = \frac{x^2}{r^2} I. \quad (1.2)$$

Substituindo a equação (1.2) na equação (1.1), tem-se

$$H_x = \frac{x}{2\pi r^2} \cdot I \quad \text{ampères} \cdot \text{espiras/metro} \quad (1.3)$$

A intensidade de campo em um ponto qualquer de um campo magnético pode ser relacionada com a intensidade de fluxo ou indução magnética naquele ponto através da constante de permeabilidade magnética do meio.¹

Assim, a densidade de fluxo a x metros do centro do condutor é

$$B_x = \mu H_x = \frac{\mu x \cdot I}{2\pi r^2} \quad \text{Wb/m}^2 \quad (1.4)$$

No elemento tubular de espessura dx , o fluxo $d\varphi$ é B_x vezes a área da seção transversal do elemento, normal às linhas de fluxo. A área desta seção será dada por $dA = dx \cdot l$ onde $l =$ comprimento do condutor. Se o comprimento do condutor for considerado unitário, i.e, $l = 1$ metro, tem-se $dA = dx$. O fluxo $d\varphi$, portanto, será igual a

$$d\varphi = B \cdot dA = \frac{\mu \cdot x \cdot I}{2\pi r^2} \cdot dx \quad (\text{webers/metro})$$

Da teoria eletromagnética sabe-se que o fluxo que provoca uma diferença de potencial, quando, varia é aquele que envolve uma corrente ou parte dela ($e = d\tau/dt$). Em uma espira, por exemplo, o fluxo que provoca uma d.d.p. nos seus terminais é o fluxo contido no interior da espira, produzido pela corrente que circula na mesma. As linhas de fluxo que envolvem toda a espira não contribuem para o aparecimento da diferença de potencial nos seus terminais. Sabe-se também que esta d.d.p. está relacionada com a indutância da espira ($e = Ldi/dt$). Assim esta indutância está diretamente relacionada com o fluxo envolvido pela espira ($L = d\tau/di$). Cada linha de fluxo envolve a corrente que circula na espira uma vez. Se, em vez de uma espira apenas, tem-se duas espiras em série e justaposta formando uma bobina, cada linha de fluxo envolvido pela bobina envolveria duas vezes a corrente que circula em cada espira. Assim, o fluxo envolvido seria o produto do n° de espira ou n° de vezes que a linha de fluxo envolve a corrente da bobina pelo valor da linha de fluxo. Por exemplo, uma linha de fluxo de 1 weber envolvendo 100 espiras de uma bobina, contribuiria para o fluxo envolvido com 100 webers-espiras.

Para o estudo da indutância devida ao fluxo interno, deve-se lembrar que cada linha de fluxo $d\varphi$ envolve apenas parte da corrente ou da espira. Desta forma, deve-se multiplicar o fluxo $d\varphi$ pela fração de corrente ou espira envolvida. Esta fração é $\frac{x^2}{r^2}$. Tem-se então

$$d\Psi = d\varphi \frac{x^2}{r^2} = \frac{\mu I x^3}{2\pi r^4} dx \quad \text{webers} \cdot \text{espiras/metro}$$

A fim de determinar o fluxo interno total, deve-se integrar os elementos de fluxo envolvido desde o centro até a periferia do condutor, ou seja:

$$\Psi_{int} = \int_0^r \frac{\mu I x^3}{2\pi r^4} dx = \frac{\mu I}{8\pi} \quad \text{webers} \cdot \text{espiras/metro}$$

Para permeabilidade unitária, $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, e

$$\Psi_{int} = \frac{I}{2} \times 10^{-7} \quad \text{weber} \cdot \text{espiras/metro} \quad (1.5)$$

¹Permeabilidade no vácuo é $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ henry/metro e $\mu_r = \mu/\mu_0$.

ou

$$L_{int} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} \quad \text{H/m}$$

Constata-se, para o caso de condutores cilíndricos, que a indutância devida ao fluxo interno é sempre constante e independente do raio do condutor.

1.3 Fluxo Envolvido por dois Pontos Externos de um Conductor Isolado

De maneira idêntica à anterior, ou seja, considerando-se um condutor percorrido por uma corrente I (A) que produzirá linhas de fluxo concêntricas e externas ao condutor, fluxo este que se estende, com intensidade decrescente, desde a sua superfície, até assumir valor nulo no infinito.

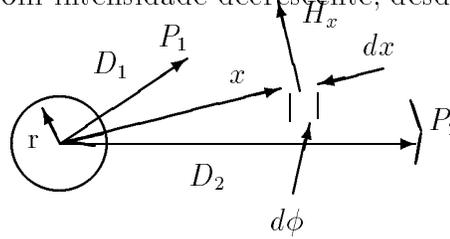


Figura 1.2: Fluxo envolvido entre dois pontos externos de um condutor isolado

Para se determinar a parcela de fluxo envolvida por dois pontos colocados na parte externa do condutor a distâncias D_1 e D_2 metros do centro, pode-se imaginar que esta parcela esteja entre duas linhas de fluxo concêntricas ao condutor, passando cada linha por um ponto. Numa linha de fluxo entre os dois pontos considerados existirá uma intensidade de campo H_x que a tangencia assumindo o valor

$$H_x = \frac{I}{2\pi x} \quad \text{ampères} \cdot \text{espiras/metro}$$

A densidade de fluxo é

$$B_x = \frac{\mu I}{2\pi x} \quad \text{webers/m}^2$$

Observe-se agora que toda a corrente envolvida pela linha de fluxo $d\varphi$, o é apenas uma vez. Assim, o fluxo $d\varphi$ é numericamente igual ao fluxo envolvido $d\Psi$. Assim, o fluxo total envolvido entre os pontos P_1 e P_2 será

$$\Psi_{12} = \int_{D_1}^{D_2} \frac{\mu I}{2\pi x} dx = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1} \quad \text{webers} \cdot \text{espiras/metro}$$

ou

$$\Psi_{12} = 2 \cdot I \times 10^{-7} \ln \frac{D_2}{D_1} \quad \text{webers} \cdot \text{espiras/metro} \quad (1.6)$$

logo

$$L_{12} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_2}{D_1} \quad \text{H/m}$$

1.4 Indutância de uma Linha a Dois Fios

Considere-se, agora, uma linha monofásica a dois fios, separados por uma distância D (m) e com raios r_1 e r_2 .

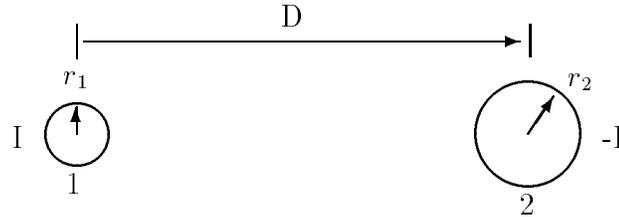


Figura 1.3: Linha monofásica a dois fios

Para simplificar a determinação da indutância da linha, pode-se considerar D muito maior que r_1 e r_2 e a densidade de fluxo aproximadamente uniforme. O fluxo produzido pela corrente no condutor 1, compreendido até o centro do condutor 2, envolve toda a corrente I . Todas as linhas do fluxo que ultrapassa este ponto não envolve nenhuma corrente e não será considerada portanto.

Na prática, as linhas de fluxo próximas ao condutor apresentam uma pequena distorção, que não será considerada.

Se for utilizada a expressão (1.6) para a determinação do fluxo Ψ_{12} envolvido pelos condutores 1 e 2, fazendo o ponto P_1 coincidir com a superfície do condutor 1 e P_2 com o centro do condutor 2, o fluxo externo ao condutor 1 devido à corrente que por ele circula será:

$$\Psi_{1,ext} = 2I \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_1} \quad \text{webers} \cdot \text{espiras/metro}$$

O fluxo interno do condutor 1 vale de (1.5)

$$\Psi_{1,int} = \frac{I}{2} \times 10^{-7}$$

Todo o fluxo produzido pela corrente I no condutor 1 será

$$\Psi_1 = \Psi_{1,int} + \Psi_{1,ext}$$

ou

$$\Psi_1 = 2I \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_1} + \frac{I}{2} \times 10^{-7}$$

Considerando $2I \times 10^{-7}$ em evidência, tem-se

$$\Psi_1 = 2I \times 10^{-7} \left(\ln \frac{D}{r_1} + \frac{1}{4} \right)$$

onde $\ln e^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$.

Assim, o fluxo produzido pela corrente no condutor 1 valerá

$$\Psi_1 = 2I \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_1 \epsilon^{-\frac{1}{4}}} \quad \text{webers} \cdot \text{espiras/metro}$$

Fazendo $r_1 \epsilon^{-\frac{1}{4}} = r'_1$, onde r'_1 corresponde a um condutor fictício, porém com a mesma indutância do condutor real sem fluxo interno entretanto, à indutância do condutor 1 considerado isoladamente é:

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{I}$$

ou

$$L_1 = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'_1} \quad \text{H/m}$$

Para se determinar a indutância do condutor 2 devida à corrente que por ele circula (-I), deve-se proceder da mesma maneira, ou seja: o ponto P_1 deve ser colocado na superfície do condutor 2 e o ponto P_2 no centro do condutor 1. No final, chega-se à seguinte expressão para a indutância do condutor 2:

$$L_2 = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'_2} \quad \text{H/m}$$

Observa-se que as correntes nos condutores estão defasadas de 180° . Isto conduz a uma soma de fluxos envolvidos para a determinação da indutância total, deve-se somar as indutâncias dos dois condutores.

$$L_T = L_1 + L_2$$

ou

$$L_T = 2 \times 10^{-7} \left(\ln \frac{D}{r'_1} + \ln \frac{D}{r'_2} \right)$$

Assim

$$L_T = 4 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{\sqrt{r'_1 r'_2}}$$

se $r'_1 = r'_2 = r'$, tem-se

$$L_T = 4 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'}. \quad \text{H/m}$$

1.5 Fluxo Concatenado com um Condutor de um Grupo de Condutores

Vejamos agora um caso mais geral, que é o de um condutor pertencente a um grupo de condutores, no qual a soma das correntes individuais é nula. A **Figura 1.4**

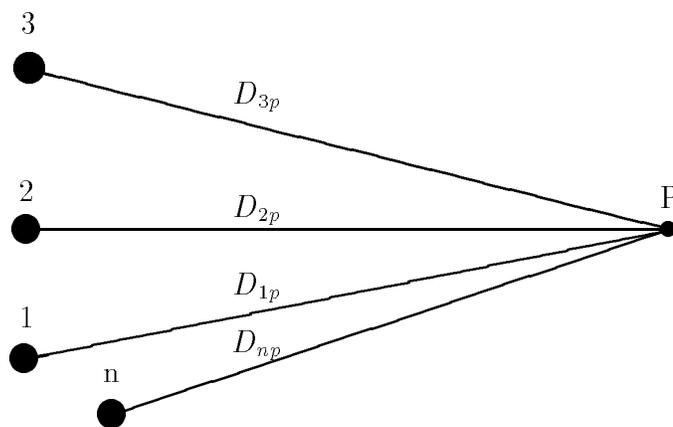


Figura 1.4: Grupo de n condutores isolados

ilustra a situação. Os condutores $1, 2, 3, \dots, n$ conduzem as correntes fasoriais $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$. Suas distâncias a um ponto P afastado são designadas por $D_{1P}, D_{2P}, D_{3P}, \dots, D_{nP}$.

Vamos determinar o fluxo concatenado com o condutor 1 devido à corrente I_1 incluindo o fluxo interno, excluindo porém todo o fluxo além do ponto P ; Iremos designá-lo por Ψ_{1P1} .

Temos que:

$$\Psi_{1P1} = 2 \times 10^{-7} \left(\frac{I_1}{4} + I_1 \ln \frac{D_{1P}}{r_1} \right)$$

$$\Psi_{1P1} = 2 \times 10^{-7} \cdot I_1 \ln \frac{D_{1P}}{r'_1}$$

O fluxo concatenado Ψ_{1P2} com o condutor 1, devido a I_2 , porém excluindo o fluxo além de P , é igual ao fluxo produzido por I_2 entre o ponto P e o condutor 1.

$$\Psi_{1P2} = 2 \times 10^{-7} I_2 \ln \frac{D_{2P}}{D_{12}}$$

O fluxo Ψ_{1P} , concatenado com o condutor 1, devido a todos condutores do grupo, excluindo o fluxo além de P , é:

$$\Psi_{1P} = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \cdot \ln \frac{D_{1P}}{r'_1} + I_2 \cdot \ln \frac{D_{2P}}{D_{12}} + I_3 \cdot \ln \frac{D_{3P}}{D_{13}} + \dots + I_n \cdot \ln \frac{D_{nP}}{D_{1n}} \right)$$

Expandindo os termos logaritmos e reagrupando-os, temos;

$$\begin{aligned} \Psi_{1P} = 2 \times 10^{-7} & \left(I_1 \cdot \ln \frac{1}{r'_1} + I_2 \cdot \ln \frac{1}{D_{12}} + I_3 \cdot \ln \frac{1}{D_{13}} + \dots + I_n \cdot \ln \frac{1}{D_{1n}} + \right. \\ & \left. I_1 \cdot \ln D_{1P} + I_2 \cdot \ln D_{2p} + I_3 \cdot \ln D_{3p} + \dots + I_n \cdot \ln D_{np} \right) \end{aligned}$$

Sendo nula a soma dos fasores corrente,
 $I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = 0$, obtemos, $I_n = -(I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_{n-1})$, teremos,

$$\Psi_{1P} = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \cdot \ln \frac{1}{r'} + I_2 \cdot \ln \frac{1}{D_{12}} + I_3 \cdot \ln \frac{1}{D_{13}} + \dots + I_n \cdot \ln \frac{1}{D_{1n}} \right) +$$

$$2 \times 10^{-7} \left(I_1 \cdot \ln \frac{D_{1P}}{D_{nP}} + I_2 \cdot \ln \frac{D_{2P}}{D_{nP}} + I_3 \cdot \ln \frac{D_{3P}}{D_{nP}} + \dots + I_{n-1} \cdot \ln \frac{D_{(n-1)P}}{D_{nP}} \right).$$

Fazendo o ponto P mover-se para bem longe, de modo que o conjunto dos termos contendo logaritmos de relações das distâncias a partir de P torne-se infinitesimal, uma vez que essas relações tendem a 1, teremos:

$$\Psi_{1P} = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \cdot \ln \frac{1}{r'_1} + I_2 \cdot \ln \frac{1}{D_{12}} + I_3 \cdot \ln \frac{1}{D_{13}} + \dots + I_n \cdot \ln \frac{1}{D_{1n}} \right) \quad \text{Wb} \cdot \text{esp/m}$$

1.6 Indutância de uma Linha de Cabos

Números de fios que compõe um cabo é dado por $N = 3x^2 - 3x + 1$, onde x é o números de coroas, incluindo a central, constituída por um único fio condutor.



Figura 1.5: Linha monofásica constituída por dois cabos compostos por vários condutores

A **Figura 1.5** mostra uma linha monofásica composta por dois cabos. Para maior generalidade, cada cabo é mostrado como um arranjo arbitrário de um número indefinido de condutores. A única restrição imposta é que os condutores paralelos sejam cilíndricos e dividam igualmente a corrente. O cabo X é composto por n condutores, paralelos e idênticos, cada um conduzindo a corrente I/n ; o cabo Y, retorno para a corrente em X, é constituído por m condutores, também idênticos e paralelos, cada qual conduzindo $-I/m$.

Para o condutor a do cabo X, obtemos para o fluxo com ele concatenado

$$\Psi_a = 2 \times 10^{-7} \frac{I}{n} \left(\ln \frac{1}{r'_a} + \ln \frac{1}{D_{ab}} + \ln \frac{1}{D_{ac}} + \dots + \ln \frac{1}{D_{an}} \right) +$$

$$- 2 \times 10^{-7} \frac{I}{m} \left(\ln \frac{1}{D_{aa'}} + \ln \frac{1}{D_{ab'}} + \ln \frac{1}{D_{ac'}} + \dots + \ln \frac{1}{D_{am}} \right), .$$

onde teremos:

$$\Psi_a = 2 \times 10^{-7} \cdot I \cdot \ln \left(\frac{\sqrt[n]{D_{aa'} \cdot D_{ab'} \cdot D_{ac'} \dots D_{am}}}{\sqrt[n]{r'_a \cdot D_{ab} \cdot D_{ac} \dots D_{an}}} \right) \quad \text{webers} \cdot \text{espiras/metro}$$

Dividindo a expressão acima pela corrente I/n , teremos a indutância do condutor a

$$L_a = \frac{\Psi_a}{I/n} = 2 \cdot n \times 10^{-7} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{D_{aa'} \cdot D_{ab'} \cdot D_{ac'} \dots D_{am}}}{\sqrt[n]{r'_a \cdot D_{ab} \cdot D_{ac} \dots D_{an}}} \right) \quad \text{H/m}$$

Análogamente, a indutância do condutor b é:

$$L_b = \frac{\Psi_b}{I/n} = 2 \cdot n \times 10^{-7} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{D_{ba'} \cdot D_{bb'} \cdot D_{bc'} \dots D_{bm}}}{\sqrt[n]{r'_b \cdot D_{ba} \cdot D_{bc} \dots D_{bn}}} \right)$$

A indutância média dos condutores de X é:

$$L_{av} = \frac{L_a + L_b + L_c + \dots + L_n}{n}$$

O cabo X é composto por n condutores em paralelo. Se todos tivessem a mesma indutância, a indutância do cabo seria $1/n$ vezes a indutância de um condutor. Como estas indutâncias são diferentes, a indutância de todos eles em paralelo é $1/n$ vezes a indutância média. Logo:

$$L_X = \frac{L_{av}}{n} = \frac{L_a + L_b + L_c + \dots + L_n}{n^2}$$

Assim:

$$L_X = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_m}{D_s} \quad \text{H/m}$$

Sendo:

$$D_m = \sqrt[mn]{(D_{aa'} \cdot D_{ab'} \cdot D_{ac'} \cdots D_{am}) \cdot (D_{ba'} \cdot D_{bb'} \cdot D_{bc'} \cdots D_{bm}) \cdots (D_{na'} \cdot D_{nb'} \cdot D_{nc'} \cdots D_{nm})}$$

$D_m = \text{DMG} \rightarrow$ Designada por Distância Média Geométrica

e

$$D_s = \sqrt[n^2]{(D_{aa} \cdot D_{ab} \cdot D_{ac} \cdots D_{an}) \cdot (D_{ba} \cdot D_{bb} \cdot D_{bc} \cdots D_{bn}) \cdots (D_{na} \cdot D_{nb} \cdot D_{nc} \cdots D_{nn})}$$

$D_s = \text{RMG} \rightarrow$ Designado Raio Médio Geométrico.

A indutância do condutor Y (L_Y) é determinada de maneira análoga e a indutância total da linha é dada por:

$$L_T = L_X + L_Y \quad \text{H/m}$$

1.7 Indutância de uma Linha Trifásica com Espaçamento Assimétrico

Até agora vínhamos considerando apenas linhas monofásicas. No entanto, as equações que encontramos podem ser adaptadas, sem maiores dificuldades, para o cálculo da indutância de linhas trifásicas.

Consideremos uma linha de acordo com o espaçamento da **Figura 1.6**.

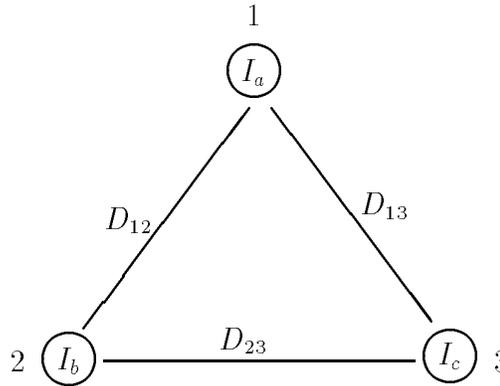


Figura 1.6: Linha trifásica com espaçamento Assimétrico

O fluxo concatenado com o condutor a devido às correntes I_a , I_b e I_c é dado por:

$$\Psi_a = 2 \times 10^{-7} \cdot \left(I_a \cdot \ln \frac{1}{r'_a} + I_b \cdot \ln \frac{1}{D_{12}} + I_c \cdot \ln \frac{1}{D_{13}} \right)$$

Para o condutor \underline{b} e \underline{c} !

$$\Psi_b = 2 \times 10^{-7} \cdot (I_a \cdot \ln \frac{1}{D_{12}} + I_b \cdot \ln \frac{1}{r'_b} + I_c \cdot \ln \frac{1}{D_{23}})$$

e

$$\Psi_c = 2 \times 10^{-7} \cdot (I_a \cdot \ln \frac{1}{D_{13}} + I_b \cdot \ln \frac{1}{D_{23}} + I_c \cdot \ln \frac{1}{r'_c})$$

Passando para a forma matricial, teremos:

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix} = 2 \times 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'_a} & \ln \frac{1}{D_{12}} & \ln \frac{1}{D_{13}} \\ \ln \frac{1}{D_{12}} & \ln \frac{1}{r'_b} & \ln \frac{1}{D_{23}} \\ \ln \frac{1}{D_{13}} & \ln \frac{1}{D_{23}} & \ln \frac{1}{r'_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Ou numa forma mais compacta:

$$[\Psi] = [L][I]$$

Sendo [L] a matriz de indutância dada por:

$$[L] = 2 \times 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'_a} & \ln \frac{1}{D_{12}} & \ln \frac{1}{D_{13}} \\ \ln \frac{1}{D_{12}} & \ln \frac{1}{r'_b} & \ln \frac{1}{D_{23}} \\ \ln \frac{1}{D_{13}} & \ln \frac{1}{D_{23}} & \ln \frac{1}{r'_c} \end{bmatrix}$$

1.8 Indutância de uma Linha com Espaçamento Equilateral

Consideremos $D_{12} = D_{13} = D_{23} = D$. Assim sendo teremos o fluxo concatenado nos três condutores dado por:

$$\Psi_a = 2 \times 10^{-7} \cdot (I_a \cdot \ln \frac{1}{r'_a} + I_b \cdot \ln \frac{1}{D} + I_c \cdot \ln \frac{1}{D})$$

$$\Psi_b = 2 \times 10^{-7} \cdot (I_a \cdot \ln \frac{1}{D} + I_b \cdot \ln \frac{1}{r'_b} + I_c \cdot \ln \frac{1}{D})$$

e

$$\Psi_c = 2 \times 10^{-7} \cdot (I_a \cdot \ln \frac{1}{D} + I_b \cdot \ln \frac{1}{D} + I_c \cdot \ln \frac{1}{r'_c})$$

Onde na forma matricial é dado por:

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix} = 2 \times 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'_a} & \ln \frac{1}{D} & \ln \frac{1}{D} \\ \ln \frac{1}{D} & \ln \frac{1}{r'_b} & \ln \frac{1}{D} \\ \ln \frac{1}{D} & \ln \frac{1}{D} & \ln \frac{1}{r'_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Admitindo que não exista fio neutro, ou correntes fasoriais equilibradas, $I_a + I_b + I_c = 0$, teremos que $I_a = -(I_b + I_c)$, logo:

$$\Psi_a = 2 \times 10^{-7} \left[I_a \ln \frac{1}{r'_a} + (I_b + I_c) \cdot \ln \frac{1}{D} \right],$$

$$\Psi_a = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'_a} - I_a \cdot \ln \frac{1}{D} \right)$$

ou

$$\Psi_a = 2 \times 10^{-7} \cdot I_a \cdot \ln \frac{D}{r'_a}$$

Logo:

$$L_a = 2 \times 10^{-7} \cdot \ln \frac{D}{r'_a} \quad \text{H/m}$$

Fazendo o mesmo para a fase b e c, teremos:

$$L_b = 2 \times 10^{-7} \cdot \ln \frac{D}{r'_b} \quad \text{H/m}$$

e

$$L_c = 2 \times 10^{-7} \cdot \ln \frac{D}{r'_c} \quad \text{H/m}$$

1.9 Indutância de uma Linha com Espaçamento Assimétrico com Transposição

Quando os espaçamentos de uma linha trifásica não forem iguais, a determinação da indutância torna-se mais complicada. Neste caso, o fluxo concatenado e

a indutância correspondente a cada fase não são os mesmos. Uma indutância diferente em cada fase faz com que o circuito seja desequilibrado e resulta na indução de tensões em linhas de comunicações adjacentes, mesmo quando as correntes estiverem equilibradas. Estas características indesejáveis podem ser superadas pela troca de posições entre os condutores em intervalos regulares ao longo da linha, de tal modo que cada condutor ocupe a posição original de cada um em distâncias iguais. Tal troca de posições é chamada de transposição. A **Figura 1.7** mostra um ciclo completo de transposição.

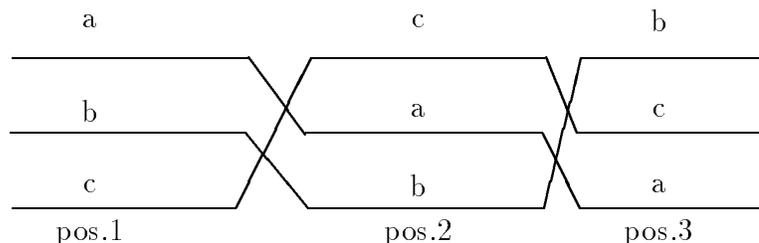


Figura 1.7: Linha Trifásica Assimétrica com Transposição

Consideremos o primeiro trecho da linha na pos. 1, conforme a disposição dos condutores da **Figura 1.8**.

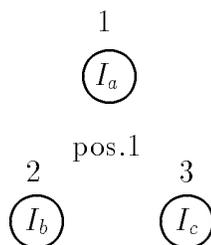


Figura 1.8: Linha Trifásica Assimétrica com Transposição na posição 1

O fluxo concatenado com os condutores é dado na forma matricial por:

$$[\Psi_1] = \begin{bmatrix} \Psi_{a1} \\ \Psi_{b1} \\ \Psi_{c1} \end{bmatrix} = 2 \times 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{D_{12}} & \ln \frac{1}{D_{13}} \\ \ln \frac{1}{D_{12}} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{D_{23}} \\ \ln \frac{1}{D_{13}} & \ln \frac{1}{D_{23}} & \ln \frac{1}{r'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Na posição 2

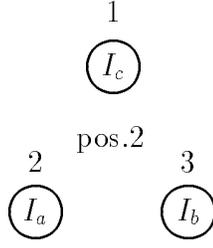


Figura 1.9: Linha Trifásica Assimétrica com Transposição na posição 2

$$[\Psi_2] = \begin{bmatrix} \Psi_{a2} \\ \Psi_{b2} \\ \Psi_{c2} \end{bmatrix} = 2 \times 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{D_{23}} & \ln \frac{1}{D_{12}} \\ \ln \frac{1}{D_{23}} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{D_{13}} \\ \ln \frac{1}{D_{12}} & \ln \frac{1}{D_{13}} & \ln \frac{1}{r'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Na posição 3

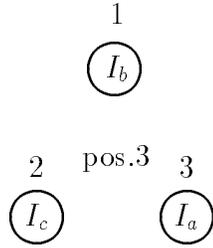


Figura 1.10: Linha Trifásica Assimétrica com Transposição na posição 3

$$[\Psi_3] = \begin{bmatrix} \Psi_{a3} \\ \Psi_{b3} \\ \Psi_{c3} \end{bmatrix} = 2 \times 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{D_{13}} & \ln \frac{1}{D_{23}} \\ \ln \frac{1}{D_{13}} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{D_{12}} \\ \ln \frac{1}{D_{23}} & \ln \frac{1}{D_{12}} & \ln \frac{1}{r'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

O fluxo médio concatenado com os condutores ao longo da linha é:

$$[\Psi] = \frac{[\Psi_1] + [\Psi_2] + [\Psi_3]}{3}$$

Assim,

$$[\Psi] = k \cdot \begin{bmatrix} 3 \ln \frac{1}{r'} & (\ln \frac{1}{D_{12}} + \ln \frac{1}{D_{23}} + \ln \frac{1}{D_{13}}) & (\ln \frac{1}{D_{12}} + \ln \frac{1}{D_{23}} + \ln \frac{1}{D_{13}}) \\ (\ln \frac{1}{D_{12}} + \ln \frac{1}{D_{23}} + \ln \frac{1}{D_{13}}) & 3 \ln \frac{1}{r'} & (\ln \frac{1}{D_{12}} + \ln \frac{1}{D_{23}} + \ln \frac{1}{D_{13}}) \\ (\ln \frac{1}{D_{12}} + \ln \frac{1}{D_{23}} + \ln \frac{1}{D_{13}}) & (\ln \frac{1}{D_{12}} + \ln \frac{1}{D_{23}} + \ln \frac{1}{D_{13}}) & 3 \ln \frac{1}{r'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Sendo:

$$k = \frac{2}{3} \times 10^{-7}$$

e

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix}$$

Ou, numa forma mais simplificada:

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix} = 2 \times 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{D_{12} \cdot D_{23} \cdot D_{13}}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{D_{12} \cdot D_{23} \cdot D_{13}}} \\ \ln \frac{1}{\sqrt[3]{D_{12} \cdot D_{23} \cdot D_{13}}} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{D_{12} \cdot D_{23} \cdot D_{13}}} \\ \ln \frac{1}{\sqrt[3]{D_{12} \cdot D_{23} \cdot D_{13}}} & \ln \frac{1}{\sqrt[3]{D_{12} \cdot D_{23} \cdot D_{13}}} & \ln \frac{1}{r'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Substituindo $\sqrt[3]{D_{12} \cdot D_{23} \cdot D_{13}}$ por D_{eq} , teremos:

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix} = 2 \times 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{D_{eq}} & \ln \frac{1}{D_{eq}} \\ \ln \frac{1}{D_{eq}} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{D_{eq}} \\ \ln \frac{1}{D_{eq}} & \ln \frac{1}{D_{eq}} & \ln \frac{1}{r'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

A matriz indutância é dada por:

$$[L] = 2 \times 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{D_{eq}} & \ln \frac{1}{D_{eq}} \\ \ln \frac{1}{D_{eq}} & \ln \frac{1}{r'} & \ln \frac{1}{D_{eq}} \\ \ln \frac{1}{D_{eq}} & \ln \frac{1}{D_{eq}} & \ln \frac{1}{r'} \end{bmatrix}$$

Na condição de $I_a + I_b + I_c = 0$, ou que não exista condutor neutro, teremos:

$$L_a = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{eq}}{r'}, L_b = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{eq}}{r'}$$

e

$$L_c = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{eq}}{r'}$$

ou

$$L_a = L_b = L_c = L.$$

1.10 Influência da Terra Considerada um Condutor Perfeito

A perturbação causada pela proximidade da terra no campo magnético criado pelas correntes nos condutores de uma linha de transmissão é pequena, desde que não haja corrente de retorno pela terra. Por esta razão no cálculo da indutância de uma linha de transmissão, para a qual a circulação de corrente pela terra é desprezível, a influência da terra não é considerada.

No caso de se considerar o retorno de corrente pela terra, a influência desse fenômeno no valor da indutância é obtido, assumindo-se a terra como um condutor perfeito ($\rho = 0$), usando-se o método das imagens.

Consideremos o sistema multicondutor mostrado na Figura 1.11, com os respectivos condutores imagens.

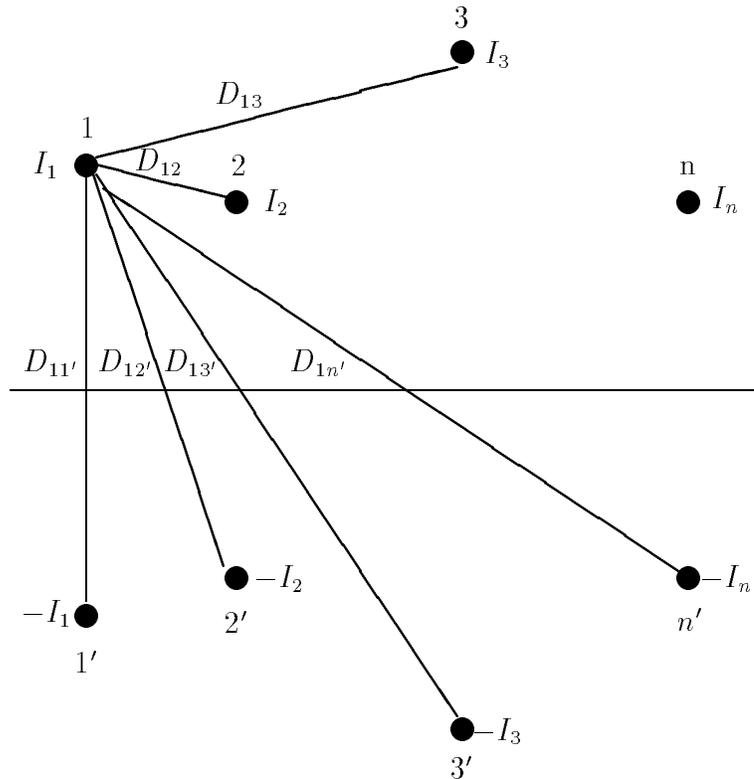


Figura 1.11: Linha com n condutores e suas respectivas imagens considerando a terra um condutor perfeito

O fluxo concatenado com o condutor 1 devido à corrente I_1 e as outras correntes, considerando as imagens, é dado por:

$$\Psi_1 = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \ln \frac{1}{r'_1} - I_1 \ln \frac{1}{D_{11'}} + I_2 \ln \frac{1}{D_{12}} - I_2 \ln \frac{1}{D_{12'}} + \right. \quad (1.7)$$

$$\left. I_3 \ln \frac{1}{D_{13}} - I_3 \ln \frac{1}{D_{13'}} + I_n \ln \frac{1}{D_{1n}} - I_n \ln \frac{1}{D_{1n'}} \right)$$

Arrumando os logaritimos de mesmo coeficiente, teremos:

$$\Psi_1 = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \ln \frac{D_{11'}}{r'_1} + I_2 \ln \frac{D_{12'}}{D_{12}} + I_3 \ln \frac{D_{13'}}{D_{13}} + I_n \ln \frac{D_{1n'}}{D_{1n}} \right)$$

Fazendo o mesmo arranjo nos outros condutores e colocando na forma matricial, teremos:

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_n \end{bmatrix} = 2 \times 10^{-7} \begin{bmatrix} \ln \frac{D_{11'}}{r'_1} & \ln \frac{D_{12'}}{D_{12}} & \ln \frac{D_{13'}}{D_{13}} & \ln \frac{D_{1n'}}{D_{1n}} \\ \ln \frac{D_{21'}}{D_{21}} & \ln \frac{D_{22'}}{r'_2} & \ln \frac{D_{23'}}{D_{23}} & \ln \frac{D_{2n'}}{D_{2n}} \\ \ln \frac{D_{31'}}{D_{31}} & \ln \frac{D_{32'}}{D_{32}} & \ln \frac{D_{33'}}{r'_3} & \ln \frac{D_{3n'}}{D_{3n}} \\ \ln \frac{D_{n1'}}{D_{n1}} & \ln \frac{D_{n2'}}{D_{n2}} & \ln \frac{D_{n3'}}{D_{n3}} & \ln \frac{D_{nn'}}{r'_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_n \end{bmatrix}$$

A matriz indutância é dada na forma acima, e os elementos são dados por

$$L_{ij} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{ij'}}{D_{ij}}$$

Onde:

$$D_{ij} = \begin{cases} i = j : \text{ Raio médio Geométrico do condutor } i \\ i \neq j : \text{ Distância entre os condutores } i \text{ e } j \end{cases}$$

$D_{ij'}$ = Distância entre o condutor i e a imagem do condutor j .

Para uma linha operando em regime estacionário senoidal, a matriz de impedância série, será então, dada por:

$$[Z] = [R] + j\omega[L]$$

Onde $[R]$ é uma matriz diagonal cujos elementos são as resistências dos condutores, e $[L]$ é calculada como mostrada anteriormente e $\omega = 2\pi f$, onde f é a frequência.

1.10.1 Correção de Carson

No caso da terra ser considerada um condutor com resistividade diferente de zero, o que realmente ocorre na prática, Carson (1926) mostrou que as impedâncias próprias e mútuas da linha são as mesmas obtidas considerando-se a terra como um condutor perfeito acrescidas de um termo de correção.

Basicamente, Carson considerou dois condutores cilíndricos, paralelos, de pequeno diâmetro em face da distância entre eles e o solo, paralelos ao solo, supôs o solo plano, de constante dielétrica e condutividade uniforme, o ar de condutividade muito inferior à do solo.

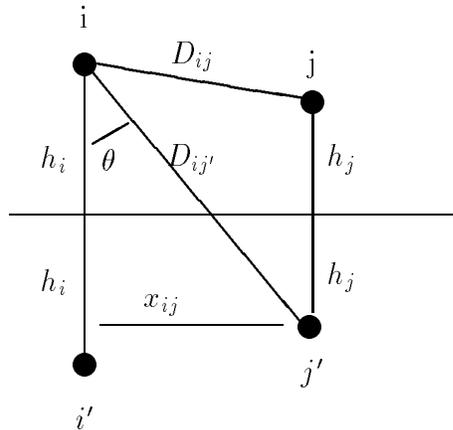


Figura 1.12: Linha Bifásica para correção de Carson

Os termos da correção de Carson são obtidos em forma de séries. De acordo com as considerações de Carson na configuração mostrada na **Figura 1.12**, os termos da correção são dados por:

$$[Z] = [[R] + [\Delta R_c]] + j\omega [[L] + \Delta[L_c]] \quad \Omega/km$$

Onde:

$[R]$: Matriz diagonal das resistências dos condutores

$[L]$: Matriz de indutância dos condutores considerando a terra como condutor perfeito

$[\Delta R_c]$: Matriz de correção dos valores de resistência (não diagonal)

$[\Delta L_c]$: Matriz de correção dos valores de indutância.

Os elementos das matrizes de correção de Carson, $[\Delta R_c]$ e $[\Delta L_c]$, são dadas por:

$$[\Delta R_c] + j\omega[\Delta L_c] = 25,134 \times 10^{-4} \cdot f \cdot ([P] + j[Q]) \quad \Omega/km$$

Os valores de [P] e [Q] são obtidos em função das variáveis p e θ , as quais são diferentes para os valores das impedâncias próprias e mútuas e dependem também da posição dos condutores.

Para o caso da linha dada na Figura 1.12, teremos:

1. Impedâncias próprias

$$\theta_{ii} = 0$$

$$p_{ii} = 5,62 \times 10^{-3} h_i \sqrt{f/\rho}, \quad \rho = \text{resistividade da terra em } \Omega.m$$

2. Impedâncias mútuas

$$\theta_{ij} = tg^{-1} \frac{x_{ij}}{h_i + h_j}$$

$$p_{ij} = 28,1004 \times 10^{-4} \cdot D_{ij'} \cdot \sqrt{f/\rho}$$

Os termos P e Q são dados por séries de potência de p e θ que variam com o valor de p . Para o caso de $p \leq 0,25$, mais comum em linhas de potência em regime permanente, teremos:

$$P = \left[\frac{\pi}{8} - \frac{p}{3\sqrt{2}} \cdot \cos \theta + \frac{p^2}{16} \cdot \cos 2\theta \cdot \left(0,6728 + \ln \frac{2}{p} \right) + \frac{p^2}{16} \cdot \theta \cdot \text{sen} 2\theta \right] \quad \Omega/km$$

e

$$Q = \left[-0,0386 + \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{2}{p} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot p \cdot \cos \theta \right] \quad \Omega/km$$

1.11 Exercício Resolvido

Um circuito de uma linha de transmissão monofásica é composta de três condutores sólidos, cada um com 2,54 mm de Raio. O circuito de retorno é constituído por dois condutores de Raio 5,08 mm. A disposição dos condutores é mostrada na Figura 1.13. Determine a indutância devida à corrente em cada lado da linha e a indutância da linha completa.

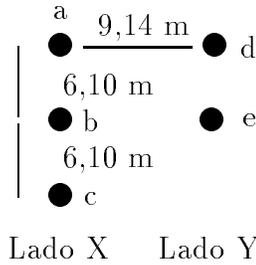


Figura 1.13: Linha de Transmissão monofásica

Distância média Geométrica mútua entre os lados X e Y (DMG).

$$D_m = \sqrt[6]{D_{ad} \cdot D_{ae} \cdot D_{bd} \cdot D_{be} \cdot D_{cd} \cdot D_{ce}}$$

$$D_{ad} = D_{be} = 9,14 \text{ m}$$

$$D_{ae} = D_{bd} = D_{ce} = \sqrt{9,14^2 + 6,10^2} = 10,99 \text{ m}$$

$$D_{cd} = \sqrt{9,14^2 + 12,2^2} = 15,3 \text{ m}$$

$$D_m = \sqrt[6]{9,14^2 \times 15,3 \times 11,0^3} = 10,9 \text{ m}$$

Distância Média Geométrica própria do lado X (Raio Médio Geométrico)

$$D_s = \sqrt[9]{D_{aa} \cdot D_{ab} \cdot D_{ac} \cdot D_{ba} \cdot D_{bb} \cdot D_{bc} \cdot D_{ca} \cdot D_{cb} \cdot D_{cc}}$$

$$D_{aa} = D_{bb} = D_{cc} = 2,54 \times 10^{-3} \times 0,7788 \text{ m}$$

$$D_{ab} = D_{ba} = D_{bc} = D_{cb} = 6,10 \text{ m}$$

$$D_{ac} = D_{ca} = 12,2 \text{ m}$$

$$D_s = \sqrt[9]{(2,54 \times 10^{-3} \times 0,7788)^3 \times 6,14^4 \times 12,2^2} = 0,489 \text{ m}$$

Para o lado Y

$$D_s = \sqrt[4]{(5,08 \times 10^{-3} \times 0,7788)^2 \times 6,10^2} = 0,153 \text{ m}$$

Assim

$$L_X = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_m}{D_s} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{10,9}{0,489} = 0,621 \times 10^{-3} \text{ mH/m} = 0,621 \text{ mH/km}$$

$$L_Y = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_m}{D_s} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{10,9}{0,153} = 0,845 \times 10^{-3} \text{ mH/m} = 0,845 \text{ mH/km}$$

$$L = L_X + L_Y = 1,47 \text{ mH/km}$$

1.12 Exercícios Propostos

- Uma linha de transmissão bifásica, operando em 60 Hz, é constituída de cabos de Bitola 1/0, formados por sete fios de cobre duro, sendo 1,5 m a distância entre seus centros. Eles estão situados na horizontal a uma altura média do solo de 10 m. A resistividade média do solo é de $100 \Omega.m$. Pede-se para calcular a matriz impedância longitudinal na forma matricial nas seguintes condições:
 - Desprezando a presença da terra
 - Considerando a terra um condutor perfeito
 - considerando a terra condutora
- Uma linha de transmissão trifásica com frequência de 60 Hz está disposta num plano horizontal sendo 3,66 m a distância entre os condutores adjacentes. A altura da linha em relação ao solo é de 10 m. Suponha que a linha tenha um cabo pára-raios do mesmo tipo usado nas fases, situado na mesma posição do condutor central, mas a uma distância do solo de 15 m. Os condutores são cabos $n^{\circ} 4/0$, ACSR, de uma camada, com diâmetro externo de 1,43 cm e Raio médio geométrico de 0,248 cm. Este cabo apresenta uma resistência de $0,276 \Omega/km$ a frequência de 60 Hz e a temperatura de $25^{\circ}C$. Pede-se para calcular a matriz impedância longitudinal considerando o solo um condutor perfeito.
- Os condutores de uma linha trifásica estão colocados nos vértices de um triângulo equilátero. O espaçamento entre eles é de 3 m e cada condutor de cobre tem um diâmetro de 10 mm. Calcule a reatância em série na forma matricial.
- Uma linha telefônica rural foi construída paralelamente a uma linha de potência não transposta. A **Figura** 1.14 dá as dimensões de ambas. A linha de potência conduz uma corrente equilibrada de 500 A eficaz por fase. calcule a tensão de 60 Hz induzida por metro na linha telefônica. Considere que a corrente de curto-circuito fase terra na linha de potência é da ordem de 5000 A. Calcule a tensão induzida por metro na linha telefônica durante um curto-circuito na fase 3.

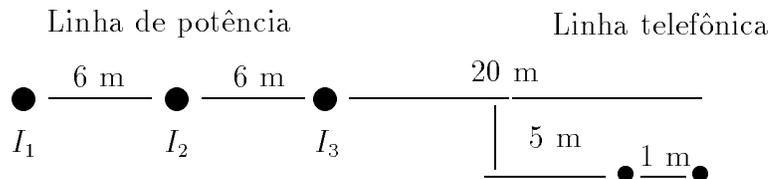


Figura 1.14: Linha telefônica paralela a uma linha de potência

- Uma linha de 750 kV utiliza, por fase, um feixe de quatro condutores, como mostra a **Figura** 1.15.

- (a) Calcule a reatância por fase dessa linha a 60 Hz. Cada condutor conduz 25% da corrente de fase e admitimos que haja transposição. Considere o raio de cada condutor igual à 35 mm.
- (b) Determine as dimensões do cabo de uma linha hipotética com um condutor por fase, cuja indutância seja igual à da linha dada.

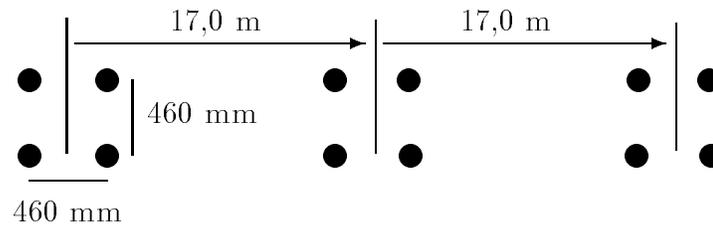


Figura 1.15: Linha de 750 kV

1.13 Capacitância das linhas de Transmissão

A diferença de potencial entre os condutores de uma linha de transmissão faz com que se carreguem da mesma maneira que as placas de um capacitor quando entre elas existe uma diferença de potencial. A capacitância entre os condutores é carga por unidade de diferença de potencial. A capacitância entre condutores paralelos é constante, dependendo da secção e da distância entre eles. Para linhas de transmissão de até uns 80 km, o efeito da capacitância é pequeno e pode ser desprezado. Esse efeito passa a ser de grande importância em linhas mais extensas e de alta tensão.

A aplicação de uma tensão alternada a uma linha faz com que, em qualquer ponto dos condutores, a carga aumente e diminua, com o aumento e diminuição do valor instantâneo da tensão entre esses condutores, no ponto considerado. O fluxo da carga é uma corrente e a corrente causada pela carga, a descarga de uma linha devido à tensão alternada, é chamada de corrente capacitiva da linha. Essa corrente existe até mesmo quando a linha está em vazio; afeta a queda de tensão ao longo da linha, seu rendimento e seu fator de potência, bem como a estabilidade do sistema do qual ela faz parte.

1.14 Campo Elétrico de um Condutor Longo e Reto

Da mesma maneira que o campo magnético é importante no estudo da indutância, o campo elétrico o é para o estudo da capacitância.

As linhas de fluxo elétrico originam-se nas cargas positivas de um condutor e terminam nas cargas negativas do outro. O fluxo elétrico total que emana de um condutor é numericamente igual à carga em coulombs do condutor. A densidade de fluxo elétrico é o fluxo por metro quadrado, medida em coulombs por metro quadrado. Se um condutor longo, reto e cilíndrico tem uma carga elétrica uniforme ao longo de seu comprimento e está isolado de outras cargas de modo que sua carga esteja uniformemente distribuída em sua periferia, o fluxo será radial. Todos os pontos equidistantes desse condutor pertencem a uma mesma equipotencial e têm a mesma densidade de fluxo.

Consideremos um condutor cilíndrico isolado como o da **Figura 1.16**

O campo elétrico a uma distância x do centro do condutor ao ponto considerado é:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{volts/metro} \quad (\text{V/m})$$

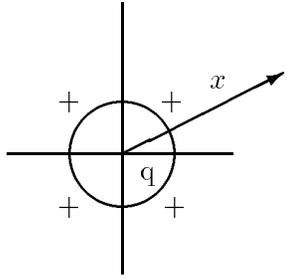


Figura 1.16: Condutor cilíndrico elétrico isolado

Sendo q a carga no condutor em coulombs por metro de comprimento e ϵ a permissividade do meio, que no ar é dada por: $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m ou $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ F/m .

1.15 Diferença de Potencial entre dois Pontos devido a uma Carga

O modo mais simples de calcular a queda de tensão entre os pontos (P_1 e P_2), **Figura 1.17**, é calcular a tensão entre as superfícies equipotenciais que passam por (P_1 e P_2), fazendo a integração sobre uma linha radial entre essas superfícies. Assim, a diferença de potencial entre P_1 e P_2 , será:

$$V_{12} = \int_{D_1}^{D_2} E dx = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \int_{D_1}^{D_2} \frac{dx}{x} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{D_2}{D_1} \quad \text{volts}$$

Onde q é carga instantânea no condutor, em coulombs por metro de comprimento.

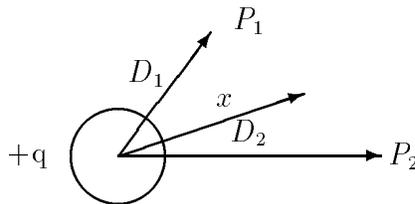


Figura 1.17: Diferença de potencial entre dois pontos externos de um condutor

1.16 Capacitância de uma Linha a dois Condutores

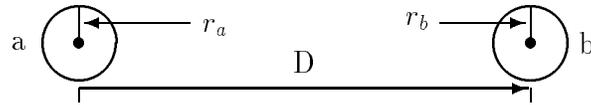


Figura 1.18: Linha de transmissão a dois condutores

A capacitância entre dois condutores de uma linha é definida como a carga dos condutores por unidade de diferença de potencial entre eles. Sob a forma de equação, temos:

$$C = \frac{q}{v} \quad \text{F/m}$$

Onde q é a carga da linha em coulombs por metro e v a diferença de potencial entre os condutores em volts.

A tensão v_{ab} entre os condutores da linha mostrada na **Figura 1.18**, pode ser determinada achando-se a queda de tensão devida à carga q_a no condutor a e, em seguida, a queda de tensão devida à carga q_b no condutor b. Pelo princípio da superposição, a queda de tensão do condutor a ao condutor b, devida às cargas em ambos os condutores, é a soma das quedas provocadas por cada uma das cargas consideradas isoladamente. Assim sendo, a tensão entre os condutores é:

$$V_{ab} = \frac{q_a}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_{r_a}^D \frac{dx_a}{x_a} + \frac{q_b}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_D^{r_b} \frac{dx_b}{x_b}$$

$$V_{ab} = \frac{q_a}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{D}{r_a} + \frac{q_b}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{r_b}{D} \quad \text{volts}$$

Sendo para a linha a dois condutores, $q_a = -q_b$, logo:

$$V_{ab} = \frac{q_a}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{D}{r_a} - \ln \frac{r_b}{D} \right) = \frac{q_a}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{D^2}{r_a r_b} \right) \quad \text{volts}$$

A capacitância entre os condutores é:

$$C_{ab} = \frac{q_a}{V_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D^2}{r_a r_b}} \quad \text{F/m}$$

Se $r_a = r_b = r$

$$C_{ab} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D}{r}} \quad \text{F/m}$$

1.17 Diferença de Potencial entre dois Condutores de um Grupo de Condutores Carregados

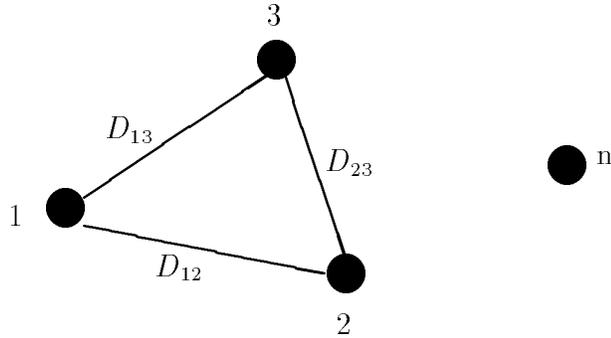


Figura 1.19: Grupo de condutores carregados

A fórmula,

$$V_{12} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D_2}{D_1},$$

pode ser usada para se calcular a diferença de potencial entre dois condutores pertencentes a um grupo de condutores. Este cálculo será feito assumindo-se que cada condutor do grupo é reto, infinitamente longo e possui uma carga elétrica uniformemente distribuída ao longo do seu comprimento. Suponha-se a configuração mostrada na **Figura 1.19**.

A diferença de potencial entre os condutores 1 e 2 é obtida adicionando-se os efeitos das cargas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, ou seja:

$$v_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(q_1 \cdot \ln \frac{D_{12}}{r_1} + q_2 \cdot \ln \frac{r_2}{D_{21}} + q_3 \cdot \ln \frac{D_{32}}{D_{31}} + \dots + q_n \cdot \ln \frac{D_{n2}}{D_{n1}} \right)$$

A capacitância entre os condutores do grupo de condutores é definida como a carga por unidade de diferença de potencial e poderia ser, então, obtida de expressões como a mostrada acima dividindo-se a queda de tensão entre dois condutores pela carga.

Diferentemente do que acontece no caso da indutância, a perturbação causada pela presença da terra próxima aos condutores da linha é bastante acentuada o que torna essencial à consideração desse fenômeno no cálculo da capacitância.

1.18 Efeito da Terra na Capacitância de uma Linha de Transmissão

No caso da capacitância considera-se apenas a terra como um condutor ideal ($\rho = 0$) e, portanto, pode-se usar o método das imagens. Consideremos o sistema multicondutor dado na **Figura 1.20** onde aparecem os condutores imagens.

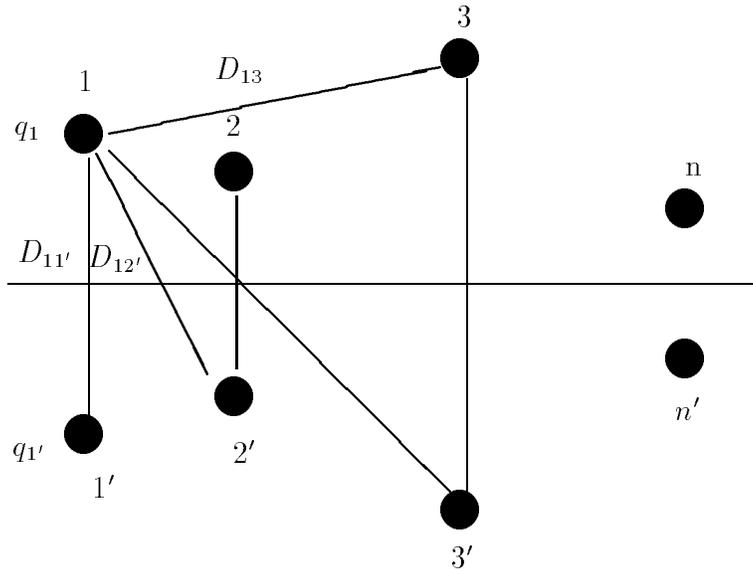


Figura 1.20: Condutores de uma linha de transmissão e suas imagens

A diferença de potencial do condutor 1 em relação à terra é dada por:

$$V_1 = \frac{1}{2}V_{11'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q_1 \cdot \ln \frac{D_{11'}}{r_1} + q_2 \cdot \ln \frac{D_{12'}}{D_{12}} + q_3 \cdot \ln \frac{D_{13'}}{D_{13}} + \dots + q_n \cdot \ln \frac{D_{1n'}}{D_{1n}} \right. \\ \left. - q_1 \cdot \ln \frac{r_1}{D_{11'}} - q_2 \cdot \ln \frac{D_{12}}{D_{12'}} - q_3 \cdot \ln \frac{D_{13}}{D_{13'}} - \dots - q_n \cdot \ln \frac{D_{1n}}{D_{1n'}} \right)$$

Ou ainda

$$V_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(q_1 \cdot \ln \frac{D_{11'}}{r_1} + q_2 \cdot \ln \frac{D_{12'}}{D_{12}} + q_3 \cdot \ln \frac{D_{13'}}{D_{13}} + \dots + q_n \cdot \ln \frac{D_{1n'}}{D_{1n}} \right)$$

Expressões similares, à dada acima, para o condutor 1 podem ser obtidas para os demais condutores as quais podem ser combinadas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} \ln \frac{D_{11'}}{r_1} & \ln \frac{D_{12'}}{D_{12}} & \ln \frac{D_{13'}}{D_{13}} & \cdots & \ln \frac{D_{1n'}}{D_{1n}} \\ \ln \frac{D_{12'}}{D_{12}} & \ln \frac{D_{22'}}{r_2} & \ln \frac{D_{23'}}{D_{23}} & \cdots & \ln \frac{D_{2n'}}{D_{2n}} \\ \ln \frac{D_{13'}}{D_{13}} & \ln \frac{D_{32'}}{D_{32}} & \ln \frac{D_{33'}}{r_3} & \cdots & \ln \frac{D_{3n'}}{D_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln \frac{D_{1n'}}{D_{1n}} & \ln \frac{D_{n2'}}{D_{n2}} & \ln \frac{D_{n3'}}{D_{n3}} & \cdots & \ln \frac{D_{nn'}}{r_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$[V] = [P][Q]$$

Onde $[P]$ é a chamada matriz de coeficientes de potencial cujos elementos são dados genericamente por:

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{ij'}}{D_{ij}}$$

Onde:

D_{ij} = Distância entre o condutor i e o condutor j

$D_{ij'}$ = Distância entre o condutor i e a imagem do condutor j .

Quando $i = j$, têm-se $D_{ii} = r_{ii}$ = Raio do condutor i .

A matriz de capacitância é dada pelo inverso da matriz de coeficientes de potencial, isto é,

$$[C] = [P]^{-1} \quad \text{F/m}$$

A qual em forma matricial é:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & -C_{12} & -C_{13} \cdots & -C_{1n} \\ -C_{12} & C_{22} & -C_{23} \cdots & -C_{2n} \\ -C_{13} & -C_{32} & C_{33} \cdots & -C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -C_{1n} & -C_{n2} & C_{n3} \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Cujos elementos tem a interpretação dada na **Figura 1.21**.

Onde:

$$C_{1g} = C_{11} - C_{12} - C_{13} - \cdots - C_{1n}$$

$$C_{2g} = C_{22} - C_{12} - C_{23} - \cdots - C_{2n}$$

$$C_{3g} = C_{33} - C_{13} - C_{23} - \cdots - C_{3n}$$

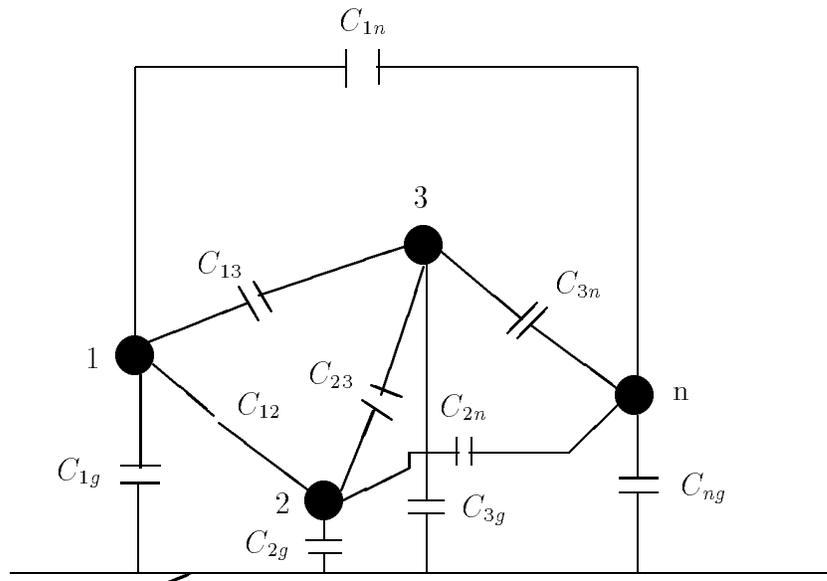


Figura 1.21: Circuito equivalente da matriz capacitância

⋮

$$C_{ng} = C_{nn} - C_{1n} - C_{2n} - \dots - C_{(n-1)n}$$

No cálculo das capacitâncias utiliza-se o valor do raio externo dos condutores, contrariamente ao que é feito no caso da indutância onde se usa o RMG, pois as cargas se localizam na superfície dos condutores.

No caso de condutores compostos (ou múltiplos) pode-se substituir as distâncias entre os condutores pela DMG quando isto for conveniente.

Para uma linha operando em regime estacionário senoidal a equação,

$$[Q] = [C][V].$$

Pode ser reescrita em termos de corrente como

$$[I] = j\omega[Q] = j\omega[C][V]$$

de onde se obteria a matriz admitância paralelo (susceptância)

$$[Y] = j\omega[C]$$

onde $\omega = 2\pi f$ (f = Frequência).

1.19 Exercícios Resolvidos

1. Determine a susceptância capacitiva de uma linha monofásica a dois condutores (cabos), operando em 60 Hz. Os cabos são de Bitola 1/0, constituídos por sete fios de cobre duro, sendo de 5,5 m a distância entre seus centros.

Solução:

O diâmetro desse cabo é 0,368 polegadas = 0,935 cm. O raio será : $r = 0,467$ cm. Sabe-se que a capacitância entre os dois condutores é,

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{D}{r}} \quad \text{F/m.}$$



Figura 1.22: Capacitância entre dois condutores e entre um condutor e o neutro

Assim:

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{550}{0,467}} = 3,928 \times 10^{-12} \quad \text{F/m} = 3,928 \times 10^{-3} \quad \mu\text{F/km} \quad \text{entre condutores}$$

A capacitância entre cada condutor e neutro como na **Figura 1.22** é:

$$C_n = 2 \times 3,928 \times 10^{-3} = 7,856 \times 10^{-3} \quad \mu\text{F/km,} \quad \text{para o neutro}$$

A reatância capacitiva é dada por:

$X_c = \frac{1}{\omega C}$ e a susceptancia por $b_c = \frac{1}{X_c} = \omega C$ Logo: $b_c = 377 \times 7,856 \times 10^{-3} \quad \text{U/km,}$
para o neutro ou

$$X_c = \frac{1}{377 \times 7,856 \times 10^{-3}} = 0,338 \times 10^6 \quad \Omega/\text{km} = 0,338 \text{M}\Omega/\text{km,} \quad \text{para o neutro .}$$

2. Considere que a linha anterior tenha $l = 20 \text{ km}$ de comprimento e funcione com a tensão de 13,8 kV. Calcule a potência reativa total fornecida pela linha e a corrente capacitiva por unidade de comprimento.

A potência reativa é dada por:

$$Q = V \cdot I = \frac{V^2}{X_c} = V^2 \cdot \omega \cdot C$$

Logo:

$$Q_T = (13,8)^2 \cdot 377 \times 3,928 \times 10^{-3} \times 20 = 5,64 \quad \text{kVar}$$

$$I = \frac{V}{X_c} = V \omega C = 13,8 \times 377 \times 3,928 \times 10^{-3} = 20,43 \quad \text{mA/km}$$

1.20 Problemas propostos

1. Calcular os parâmetros, indutância e capacitância de uma linha de transmissão bifásica operando em 60 Hz. Os cabos são de bitola 1/0 , constituídos por sete fios de cobre duro, sendo 5,5 m a distância entre seus centros. Eles estão situados na horizontal a uma altura média do solo de 10 m. A resistividade média do solo ao longo da linha é de $100 \rho.m$. Pede-se para calcular os parâmetros, impedância longitudinal e transversal, na forma matricial nas seguintes condições:
 - (a) desprezando a presença da terra;
 - (b) considerando a terra um condutor perfeito;
 - (c) considerando a terra condutora.

1.21 Redução à Linha Equivalente com Três Condutores

As linhas de transmissão encontradas na prática apresentam diferentes configurações no que diz respeito ao número, posição, e tipo dos condutores. O uso de condutores múltiplos (“blunded”, geminados), cabos terra (pára raios) e circuitos duplos faz com que o número de condutores constituintes de uma linha seja, em geral, maior que o número de condutores necessários para uma linha trifásica (três). Portanto, as matrizes impedância série e admitância paralelo obtidas pelo procedimento anterior terão, também, dimensões maiores que 3 X 3 desde que a cada condutor do sistema corresponda uma linha e uma coluna das matrizes de parâmetros. Nas figuras seguintes, são mostrados alguns exemplos de configuração de linhas e respectivas matrizes de parâmetros.

Raramente existe interesse em se manter a individualidade dos condutores em um estudo de análise em regime permanente (fluxo de carga, curto-circuito, etc). Por outro lado, devido à existência de linhas de transmissão com diferente número de condutores em uma rede de transmissão, a manutenção da individualidade desses condutores causaria problemas quando da montagem do modelo da rede. Por esta razão é importante obter-se matrizes impedância série e admitância paralela para um sistema equivalente de três condutores. Isto é feito por um processo de redução de matrizes que explore certas características dos condutores múltiplo e cabos-terra.

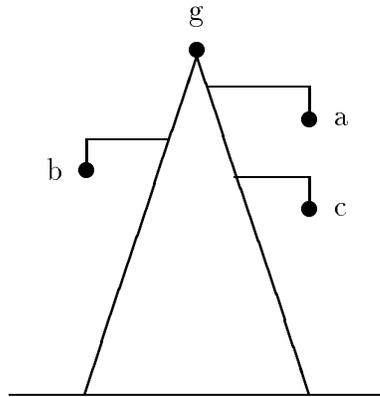


Figura 1.23: Linha com três condutores fase e o cabo terra

A matriz que representa a **Figura 1.23** é dada a seguir:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{ag} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bg} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} & Z_{cg} \\ Z_{ag} & Z_{bg} & Z_{cg} & Z_{gg} \end{bmatrix}$$

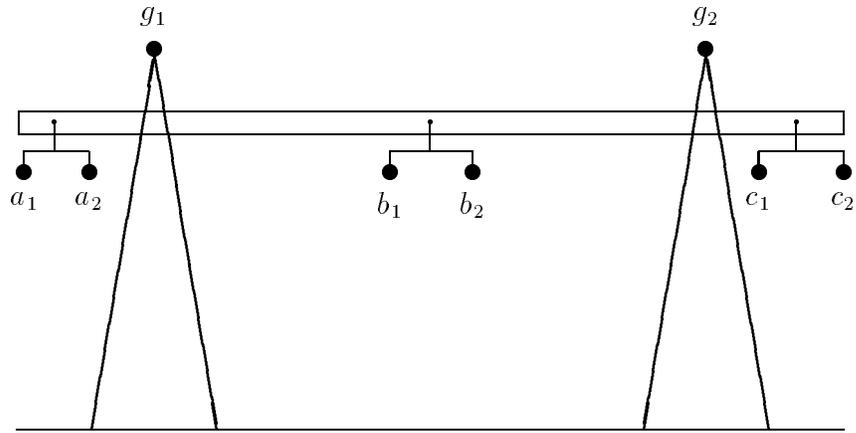


Figura 1.24: Linha com condutores múltiplos e dois cabos terra

A matriz correspondente à linha da **Figura 1.24** é dada por:

$$[Z] = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline a_1/x & b_1/x & c_1/x & a_2/x & b_2/x & c_2/x & g_1/x & g_2/x \\ \hline b_1/x & x & x & x & x & x & x & x \\ \hline c_1/x & x & x & x & x & x & x & x \\ \hline a_2/x & x & x & x & x & x & x & x \\ \hline b_2/x & x & x & x & x & x & x & x \\ \hline c_2/x & x & x & x & x & x & x & x \\ \hline g_1/x & x & x & x & x & x & x & x \\ \hline g_2/x & x & x & x & x & x & x & x \\ \hline \end{array} \\ \end{array}$$

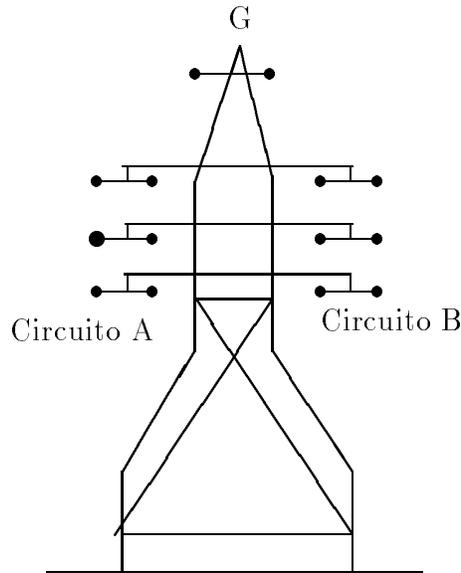


Figura 1.25: Linha com circuito paralelo, condutores múltiplos e dois cabos terra

$$[Z] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} 6 \times 6 \\ \text{Circuito} \\ \text{A-A} \end{array} & \begin{array}{c} 6 \times 6 \\ \text{Acoplamento} \\ \text{A-B} \end{array} & \begin{array}{c} 6 \times 2 \\ \text{Acoplamento} \\ \text{A-G} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{Acoplamento} \\ \text{A-B} \\ 6 \times 6 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Circuito} \\ \text{B-B} \\ 6 \times 6 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Acoplamento} \\ \text{B-G} \\ 6 \times 2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{Acoplamento} \\ \text{G-A} \\ 2 \times 6 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Acoplamento} \\ \text{G-B} \\ 2 \times 6 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Circuito} \\ \text{G-G} \\ 2 \times 2 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

1.21.1 Eliminação de Cabos Terra

Suponhamos uma linha de transmissão com a configuração mostrada na **Figura 1.23**. A queda de tensão nos condutores dessa linha seria dada por:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \\ \Delta V_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{ag} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bg} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} & Z_{cg} \\ Z_{ag} & Z_{bg} & Z_{cg} & Z_{gg} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_g \end{bmatrix}$$

Considerando $\Delta V_g = 0$, e simplificando a equação matricial acima, teremos:

$$\begin{bmatrix} [\Delta V^{abc}] \\ [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Z_*^{abc}] & [Z_g] \\ [Z_g^t] & [Z_{gg}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [I^{abc}] \\ [I_g] \end{bmatrix}$$

Onde as submatrizes são as mostradas na equação original e $\Delta V_g = 0$, resulta do fato do potencial do cabo terra ser nulo. Reescrevendo as equações individualmente, temos:

$$[\Delta V^{abc}] = [Z_*^{abc}] \cdot [I^{abc}] + [Z_g] \cdot [I_g]$$

$$[0] = [Z_g^t] \cdot [I^{abc}] + [Z_{gg}] \cdot [I_g]$$

Do que resulta

$$[\Delta V^{abc}] = [Z^{abc}] \cdot [I^{abc}]$$

Onde

$$[Z^{abc}] = [Z_*^{abc}] - [Z_g] \cdot [Z_{gg}^{-1}] \cdot [Z_g^t]$$

A matriz $[Z^{abc}]$, representa a linha fictícia com três condutores equivalentes à linha original. Esta técnica é aplicável a uma linha com qualquer número de condutores e, como será visto a seguir, a linhas com condutores geminados e circuitos duplos.

1.21.2 Redução de Condutores Múltiplos a um Condutor Equivalente

Para efeito de ilustração da técnica de redução de condutores geminados, suponhamos uma linha de transmissão com a configuração atípica mostrada na **Figura 1.26**, onde também é mostrada a matriz impedância.

A queda de tensão nos condutores é dada por

$$\begin{bmatrix} \Delta V_d \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{dd} & Z_{db} & Z_{dc} & Z_{df} \\ Z_{db} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bf} \\ Z_{dc} & Z_{bc} & Z_{cc} & Z_{cf} \\ Z_{df} - Z_{dd} & Z_{bf} - Z_{db} & Z_{cf} - Z_{dc} & Z_{ff} - Z_{df} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_d \\ I_b \\ I_c \\ I_f \end{bmatrix}$$

Onde a equação correspondente ao cabo " f " foi adicionada à equação correspondente ao cabo " d " multiplicada por -1.

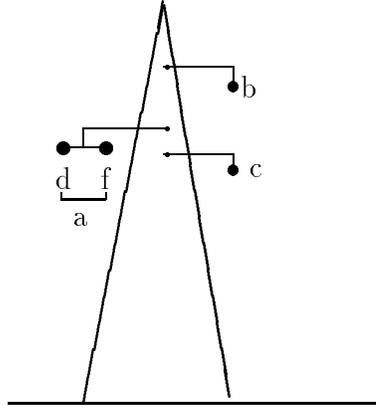


Figura 1.26: Linha com configuração atípica com condutores múltiplos

Colocando as quedas de tensão em função da corrente total da fase a, isto é, $I_a = I_d + I_f$, vem

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{dd} & Z_{db} & Z_{dc} & Z_{df} - Z_{dd} \\ Z_{db} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bf} - Z_{db} \\ Z_{dc} & Z_{bc} & Z_{cc} & Z_{cf} - Z_{dc} \\ Z_{df} - Z_{dd} & Z_{bf} - Z_{db} & Z_{cf} - Z_{dc} & Z_{ff} - 2Z_{df} + Z_{dd} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_f \end{bmatrix}$$

Nesta forma o sistema de equações pode ser reduzido, usando-se um procedimento semelhante ao mostrado para o caso dos cabos terra, eliminando-se a equação correspondente ao cabo f. A matriz resultante (3X3) é a matriz equivalente.

1.21.3 Circuitos Paralelos

No caso de circuitos paralelos, como mostrado na **Figura 1.25** por exemplo, costuma-se manter a individualidade de cada circuito, representando-se o acoplamento entre os dois circuitos por uma matriz de acoplamento. Se os dois circuitos forem conectados aos mesmos barramentos terminais seria possível efetuar uma redução ao sistema equivalente de três condutores como mostrado nos itens anteriores.

Os exemplos mostrados neste item foram todos baseados na matriz impedância série. O mesmo procedimento pode ser seguido para o caso da matriz admitância paralelo.

1.22 Relações entre Tensão e Corrente numa Linha de Transmissão

Aqui, iremos desenvolver equações com as quais poderemos calcular a tensão, a corrente e o fator de potência em qualquer ponto de uma linha de transmissão, desde que estes valores sejam conhecidos em um ponto da linha .

Estas expressões que iremos deduzir são importantes porque indicam o efeito dos diversos parâmetros da linha sobre as quedas de tensão ao longo da mesma para várias cargas. São úteis também no cálculo do rendimento da transmissão, bem como no cálculo da potência que flui por uma linha.

1.23 Representação das Linhas

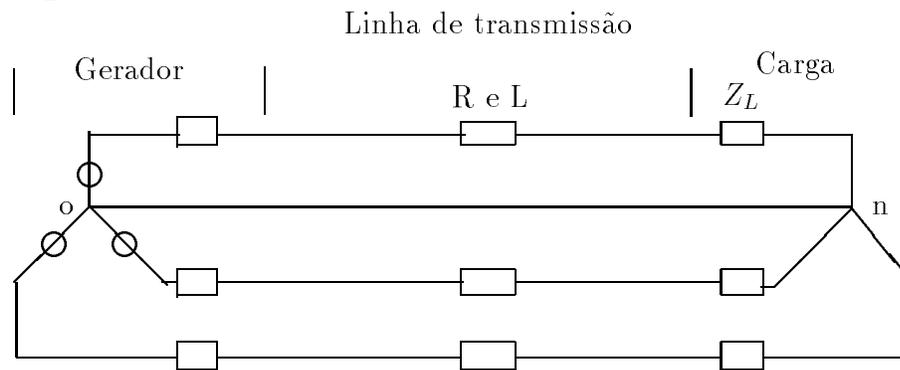


Figura 1.27: Rede equilibrada composta de uma Linha, um Gerador e a Carga

A **Figura 1.27** representa um gerador ligado em Y alimentando uma carga equilibrada também ligada em Y.

A corrente que circula pelo condutor que une o neutro "o" do gerador ao neutro "n" da carga é nula, uma vez que a soma das correntes que convergem para "n" é zero em um sistema equilibrado. Portanto, os pontos "o" e "n" estão no mesmo potencial, não passando corrente pelo condutor neutro e ele pode ser eliminado sem que ocorra qualquer mudança no circuito.

Para resolver o circuito, supõe-se que exista o neutro e considera-se que por ele circule a soma das três correntes de fase; aplica-se a lei de Kirchhoff das tensões na malha que contém uma fase e o neutro, conforme **Figura 1.28**.

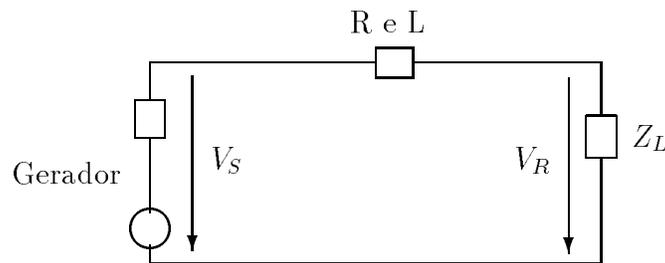


Figura 1.28: Circuito equivalente monofásico da rede trifásica equilibrada

A classificação das linhas de transmissão segundo sua extensão está baseada nas aproximações admitidas no uso dos parâmetros da linha.

- Linhas curtas → até 80 km.
- Linhas médias → até 240 km.
- Linhas longas → acima de 240 km .

Para fazer a distinção entre a impedância série total da linha e a impedância em série por unidade de comprimento, temos:

z = impedância em série por unidade de comprimento, por fase.

y = admitância em paralelo por unidade de comprimento, entre linha e neutro.

l = comprimento da linha.

$z.l = Z$ = impedância total em série, por fase.

$y.l = Y$ = admitância total em paralelo, entre linha e neutro.

1.23.1 Linha de Transmissão Curta

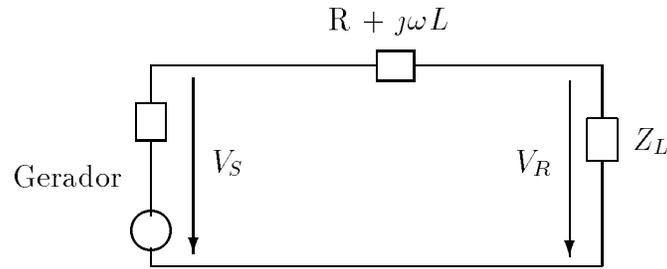


Figura 1.29: Circuito equivalente de uma linha curta

$$\text{Regulação em \%} = \frac{|V_{NL}| - |V_{FL}|}{|V_{FL}|} \cdot 100$$

$|V_{NL}|$ = módulo da tensão nos terminais da carga em vazio.

$|V_{FL}|$ = módulo da tensão nos terminais da carga em plena carga.

$$|V_{NL}| = |V_S|$$

$$|V_{FL}| = |V_R|.$$

Os diagramas da **Figura 1.30** mostram que é necessário uma tensão maior no gerador para manter uma dada tensão na carga quando a corrente está atrasada, do que quando a tensão e corrente estão em fase.

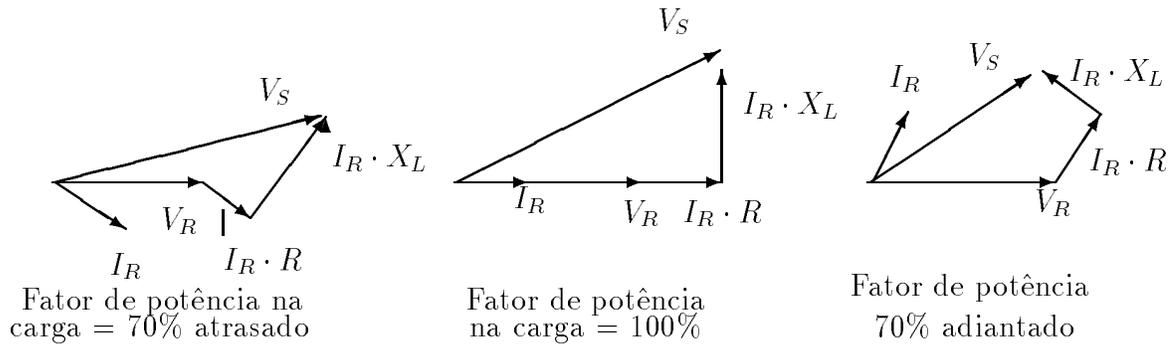


Figura 1.30: Diagramas fasorial de tensão e corrente de uma carga

1.23.2 Linhas de Comprimento Médio

O circuito π é mais utilizado nas linhas de transmissão médias do que o circuito nominal T da **Figura 1.31**.

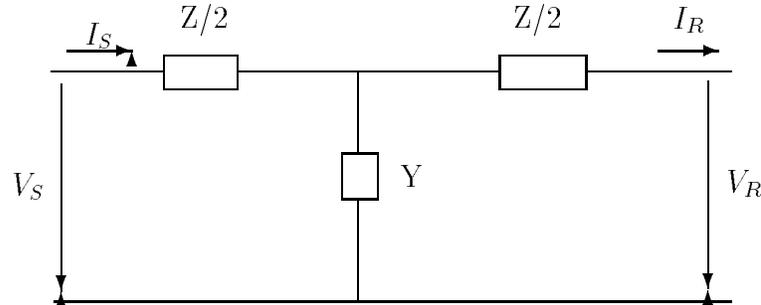


Figura 1.31: Circuito nominal T

Para deduzir as equações, temos p/ o circuito π na **Figura 1.32**.

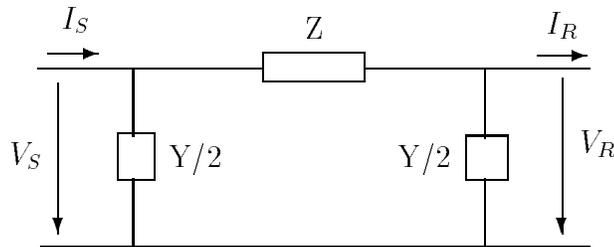


Figura 1.32: Circuito nominal π

$$V_S = \left(V_R \cdot \frac{Y}{2} + I_R \right) \cdot Z + V_R$$

$$V_S = \left(\frac{ZY}{2} + 1 \right) \cdot V_R + Z \cdot I_R$$

$$I_S = V_S \frac{Y}{2} + V_R \cdot \frac{Y}{2} + I_R$$

Substituindo V_S :

$$I_S = V_R \cdot Y \left(1 + \frac{ZY}{4} \right) + \left(\frac{ZY}{2} + 1 \right) \cdot I_R$$

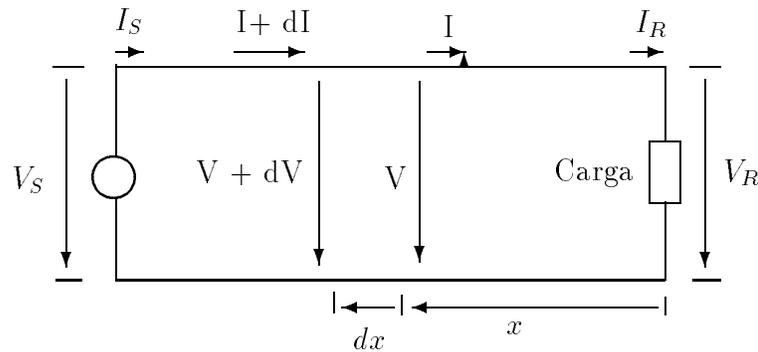


Figura 1.33: Linha de transmissão com Parâmetros distribuídos. Solução exata.

1.23.3 Linhas de Transmissão Longas - Solução das Equações Diferenciais

Considerando-se um pequeno elemento da linha na **Figura 1.33** e calculando-se as diferenças de tensões e correntes entre eles.

$$dV = I \cdot z dx \qquad dI = V \cdot y dx$$

$$\frac{dV}{dx} = I \cdot z \qquad \frac{dI}{dx} = V \cdot y$$

Derivando em relação à x as equações:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = z \frac{dI}{dx} \qquad \frac{d^2 I}{dx^2} = y \cdot \frac{dV}{dx}$$

Substituindo os valores

$$\frac{dI}{dx} \quad e \quad \frac{dV}{dx}$$

temos:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = z \cdot y \cdot V \tag{1.8}$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = z \cdot y \cdot I$$

Supondo que a solução da equação 1.8 seja:

$$V = A_1 e^{\sqrt{yz}x} + A_2 e^{-\sqrt{yz}x}$$

Assim

$$\frac{d^2V}{dx^2} = yz \left(A_1 e^{\sqrt{yz}x} + A_2 e^{-\sqrt{yz}x} \right)$$

Observa-se que a derivada segunda é yz vezes a suposta solução de V .

$$\frac{dV}{dx} = \sqrt{yz} A_1 e^{\sqrt{yz}x} - \sqrt{yz} A_2 e^{-\sqrt{yz}x} = I \cdot z$$

$$I = \frac{\sqrt{yz}}{z} A_1 e^{\sqrt{yz}x} - \frac{\sqrt{yz}}{z} A_2 e^{-\sqrt{yz}x}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{z/y}} A_1 e^{\sqrt{yz}x} - \frac{1}{\sqrt{z/y}} A_2 e^{-\sqrt{yz}x}$$

Na extremidade da linha, temos:

$$x = 0; \quad V = V_R; \quad I = I_R$$

$$V_R = A_1 + A_2$$

$$I_R = \frac{1}{\sqrt{z/y}} (A_1 - A_2)$$

Fazendo:

$$Z_c = \sqrt{z/y} \quad e \quad \gamma = \sqrt{zy}$$

sendo Z_c - Impedância característica e γ - Constante de propagação, temos

$$A_1 = \frac{V_R + I_R \cdot Z_c}{2} \quad e \quad A_2 = \frac{V_R - I_R \cdot Z_c}{2}$$

logo

$$V = \frac{V_R + I_R \cdot Z_c}{2} e^{\gamma x} + \frac{V_R - I_R \cdot Z_c}{2} e^{-\gamma x}$$

$$I = \frac{V_R/Z_c + I_R}{2} e^{\gamma x} - \frac{V_R/Z_c - I_R}{2} e^{-\gamma x}$$

1.23.4 Linha de Transmissão Longa - Interpretação das Equações

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

sendo α - constante de atenuação (nepers/km) e β - constante de fase (rd/km).

$$V = \frac{\overbrace{V_R + I_R \cdot Z_c}^{\text{Tensão incidente}}}{2} e^{\alpha x} e^{j\beta x} + \frac{\overbrace{V_R - I_R \cdot Z_c}^{\text{Tensão refletida}}}{2} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

$$I = \frac{\overbrace{V_R/Z_c + I_R}^{\text{Corrente incidente}}}{2} e^{\alpha x} e^{j\beta x} - \frac{\overbrace{V_R/Z_c - I_R}^{\text{Corrente refletida}}}{2} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

$V_R = I_R \cdot Z_c$ - não existe onda refletida. $|Z_c| = 400$ e fase de 0° a -15° .
Impedância de surto = $\sqrt{L/C}$.

A carga de impedância de surto (SIL) é dada por:

$$|I_L| = \frac{|V_L|}{\sqrt{3}(400)} \quad \text{A}$$

$$SIL = \sqrt{3}|V_L| \frac{|V_L|}{\sqrt{3}(400)} \quad \text{watts}$$

P/ V_L em kV,

$$SIL = 2,5 \cdot |V_L|^2 \quad \text{kw}$$

O comprimento de onda λ é dado por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{km}$$

Velocidade $v = f\lambda$

1.23.5 Linha de Transmissão Longa - Forma Hiperbólica das Equações

$$\sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \quad e \quad \cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

$$V = V_R \cosh\gamma x + I_R Z_c \sinh\gamma x \quad e \quad I = I_R \cosh\gamma x + \frac{V_R}{Z_c} \sinh\gamma x$$

Para $x = l$, temos,

$$V_S = V_R \cosh\gamma l + I_R Z_c \sinh\gamma l \quad e \quad I_S = I_R \cosh\gamma l + \frac{V_R}{Z_c} \sinh\gamma l$$

Para encontrar V_R e I_R em função de V_S e I_S , temos,

$$V_R = V_S \cosh\gamma l - I_S Z_c \sinh\gamma l \quad e \quad I_R = I_S \cosh\gamma l - \frac{V_S}{Z_c} \sinh\gamma l$$

Quando não se dispõe de gráficos especiais, as funções hiperbólicas podem ser encontradas por outros métodos.

$$\cosh(\alpha l + j\beta l) = \cosh(\alpha l)\cos(\beta l) + j\sinh(\alpha l)\sen(\beta l)$$

$$\sinh(\alpha l + j\beta l) = \sinh(\alpha l)\cos(\beta l) + j\cosh(\alpha l)\sen(\beta l).$$

Outro método:

$$\cosh\theta = 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

Um terceiro método é:

$$\cosh(\alpha + j\beta) = \frac{e^{\alpha} \cdot e^{j\beta} + e^{-\alpha} \cdot e^{-j\beta}}{2} = \frac{1}{2}(e^{\alpha}L^{\beta} + e^{-\alpha}L^{-\beta})$$

$$\sinh(\alpha - j\beta) = \frac{e^{\alpha} \cdot e^{j\beta} - e^{-\alpha} \cdot e^{-j\beta}}{2} = \frac{1}{2}(e^{\alpha}L^{\beta} - e^{-\alpha}L^{-\beta})$$

1.23.6 Circuito Equivalente de uma Linha Longa

$$V_S = \left(\frac{Z'Y'}{2} + 1 \right) V_R + Z'I_R$$

$$V_S = V_R \cosh \gamma l + I_R Z_c \sinh \gamma l \quad e \quad I_S = I_R \cosh \gamma l + \frac{V_R}{Z_c} \sinh \gamma l$$

$$Z' = Z_c \cdot \sinh \gamma l = \sqrt{\frac{z}{y}} \sinh \gamma l$$

Multiplicando por z dentro do radical, temos

$$Z' = \sqrt{\frac{z^2}{zy}} \sinh \gamma l = \frac{zl}{\sqrt{zy}l} \sinh \gamma l$$

ou

$$Z' = Z \frac{\sinh \gamma l}{\gamma l}$$

Comparando as equações:

$$\frac{Z'Y'}{2} + 1 = \cosh \gamma l$$

Substituindo Z' por $Z_c \sinh \gamma l$, virá:

$$\frac{Y' \cdot Z_c \sinh \gamma l}{2} + 1 = \cosh \gamma l$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_c} \cdot \frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l}$$

Substituindo a seguinte identidade:

$$\tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right) = \frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l}$$

teremos

$$\frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_c} \cdot \tanh \frac{\gamma l}{2}$$

Multiplicando por y dentro do radical

$$\frac{Y'}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{z y}{y^2}}} \cdot \tanh \frac{\gamma l}{2}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{y}{\gamma} \cdot \tanh \frac{\gamma l}{2}$$

Multiplicando por $l/2$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{y l / 2}{\gamma l / 2} \cdot \tanh \frac{\gamma l}{2}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Y}{2} \cdot \frac{\tanh \frac{\gamma l}{2}}{\gamma l / 2}$$

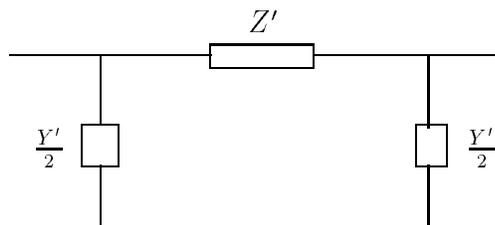


Figura 1.34: Circuito π Equivalente de uma linha longa

1.24 Constantes Generalizadas de um Circuito

1. Linhas médias

$$V_S = \left(\frac{ZY}{2} + 1\right)V_R + Z \cdot I_R \quad e \quad I_S = V_R Y \left(1 + \frac{ZY}{4}\right) + \left(\frac{ZY}{2} + 1\right) \cdot I_R$$

Essas equações podem ser expressas na forma:

$$V_S = A \cdot V_R + B \cdot I_R \quad e \quad I_S = C \cdot V_R + D \cdot I_R$$

Comparando essas equações, tem-se:

$$A = D = \frac{ZY}{2} + 1, \quad B = Z \quad e \quad C = Y \left(1 + \frac{ZY}{4}\right)$$

As constantes ABCD são chamadas constantes generalizadas da linha de transmissão.

2. Linhas longas

$$V_S = V_R \cosh(\gamma l) + I_R Z_c \sinh(\gamma l) \quad e \quad I_S = I_R \cosh(\gamma l) + \frac{V_R}{Z_c} \sinh(\gamma l)$$

A partir dessas equações tem-se que as constantes generalizadas do circuito para uma linha longa são:

$$A = \cosh(\gamma l), \quad B = Z_c \sinh(\gamma l), \\ C = \frac{1}{Z_c} \sinh(\gamma l) \quad e \quad D = \cosh(\gamma l)$$

1.25 Exercícios Resolvidos

1. Uma linha de transmissão de 60 Hz com um só circuito tem 225 milhas (362 km) de extensão. A carga é de 125.000 kW com 100% de fator de potência, sendo a tensão de 200 kV.

Calcule as tensões incidente e refletida nos terminais do gerador e da carga. Determine a tensão de linha nos terminais do gerador a partir das tensões incidente e refletida. Calcule também o comprimento de onda e a velocidade de propagação.

Os parâmetros da linha são:

$$R = 0,172 \text{ ohm/milha}$$

$$L = 2,180 \text{ mH/milha}$$

$$C = 0,0136 \text{ } \mu\text{F/milha}$$

$$G = 0$$

Solução:

$$z = 0,172 + j : 2\pi \times 60 \times 2,18 \times 10^{-3} = 0,172 + j : 0,822 = 0,841 \angle 78,2^\circ \text{ ohm/milha}$$

$$y = 0 + j : 5,12 \times 10^{-6} = 0 + j : 5,12 \times 10^{-6} = 5,12 \times 10^{-6} \angle 90^\circ \text{ mho/milha}$$

$$\gamma l = \sqrt{yz} \cdot l = 225 \sqrt{0,841 \times 5,12 \times 10^{-6}} \angle \left(\frac{78,2^\circ + 90^\circ}{2} \right)$$

$$\gamma l = 0,467 \angle 84,1^\circ = 0,0481 + j : 0,465$$

$$Z_c = \sqrt{z/y} = \sqrt{\frac{0,841}{5,12 \times 10^{-6}}} : \angle \left(\frac{78,2^\circ - 90^\circ}{2} \right) = 405 \angle -5,9^\circ \text{ ohms}$$

$$V_R = \frac{200.000}{\sqrt{3}} = 115.200 \angle 0^\circ \text{ volts}$$

$$I_R = \frac{125.000}{\sqrt{3} \times 200} = 361 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Representando a tensão incidente por V^+ e a refletida por V^- , nos terminais da carga onde $x = 0$ teremos:

$$V_R^+ = \frac{V_R + I_R \cdot Z_c}{2} = \frac{115.200 \angle 0^\circ + 361 \angle 0^\circ \times 405 \angle -5,9^\circ}{2}$$

$$V_R^+ = 57.600 + 72.500 - j : 7.500 = 130.100 - j : 7.500 = 130.100 \angle -3,3^\circ \text{ V}$$

$$V_R^- = \frac{V_R - I_R \cdot Z_c}{2} = \frac{115.200 \angle 0^\circ - 361 \angle 0^\circ \times 405 \angle -5,9^\circ}{2}$$

$$V_R^- = 57.600 - 72.500 + j : 7.500 = -14.900 + j : 7.500 = 16.700 \angle 153,3^\circ \text{ V}$$

Nos terminais do gerador $x = l$

$$V_S^+ = \frac{V_R + I_R \cdot Z_c}{2} \cdot e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} = (130.100\angle -3,3^\circ) \cdot e^{0,0481} \cdot e^{j:0,465}$$

$$V_S^+ = (130.100\angle -3,3^\circ) \cdot 1,049\angle 26,6^\circ = 136.500\angle 23,3^\circ \quad \text{V}$$

$$V_S^- = \frac{V_R - I_R \cdot Z_c}{2} \cdot e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l} = 16.700\angle 153,3^\circ \left(\frac{1}{1,049}\angle -26,6^\circ\right)$$

$$V_S^- = 15.900\angle 126,7^\circ \quad \text{V}$$

A tensão entre linha e neutro nos terminais do gerador é:

$$V_S = 136.500\angle 23,3^\circ + 15.900\angle 126,7^\circ = 125.300 + j : 54.000 - 9.500 + j : 12.750$$

$$V_S = 115.800 + j : 66.750 = 133.800\angle 30^\circ \quad \text{V}$$

A tensão trifásica correspondente será:

$$V_S = \sqrt{3} \times 133,8 = 232 \quad \text{kV}$$

O comprimento de onda e a velocidade de propagação são calculados da seguinte maneira:

$$\beta = \frac{0,465}{225} = 0,002065 \quad \text{radiano/milha}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0,002065} = 3.040 \quad \text{milha}$$

$$\text{velocidade} = f \cdot \lambda = 60 \times 3.040 = 182.400 \quad \text{milhas/s}$$

2. Determine a tensão, a corrente e a potência relativas aos terminais do gerador para a linha descrita no exemplo 1.

Solução:

Da solução do exemplo 1., temos:

$$Z_c = 405\angle -5,9^\circ \quad \text{ohms}$$

$$\gamma l = 0,0481 + j : 0,465$$

$$V_R = 115.200\angle 0^\circ \quad \text{volts}$$

$$I_R = 361\angle 0^\circ \quad \text{A}$$

Sabe-se que:

$$\cosh(\gamma l) = \cosh(0,0481) \cdot \cos(0,465) + j \sinh(0,0481) \cdot \sen(0,465)$$

$$\begin{aligned}\cosh(\gamma l) &= 0,895 + j : 0,0215 = 0,895\angle 1,38^\circ \\ \sinh(\gamma l) &= \sinh(0,0481) \cdot \cos(0,465) + j \cosh(0,0481) \cdot \sen(0,465) \\ \sinh(\gamma l) &= 0,0429 + j : 0,449 = 0,449\angle 84,5^\circ\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}V_S &= 115.200 \times 0,895\angle 1,38^\circ + 361 \times (405\angle -5,9^\circ) \times 0,449\angle 84,5^\circ \\ V_S &= 103.000\angle 1,38^\circ + 65.600\angle 78,6^\circ = 103.000 + j : 2.480 + 13.000 + j : 64.400 \\ V_S &= 116.000 + j : 66.880 = 133.800\angle 30,0^\circ \quad \text{V}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}I_S &= 361 \times 0,895\angle 1,38^\circ + \frac{115.200}{405\angle -5,9^\circ} \times 0,449\angle 84,5^\circ \\ I_S &= 323\angle 1,38^\circ + 128\angle 90,4^\circ = 324 + j : 7,8 - 0,9 + j : 128 \\ I_S &= 322 + j : 136 = 350\angle 22,9^\circ \quad \text{A}\end{aligned}$$

Nos extremos do gerador :

$$\begin{aligned}\text{Tensão : de : linha} &= \sqrt{3} \times 133,8 = 232 \quad \text{kV} \\ \text{Corrente : de : linha} &= 350 \quad \text{A} \\ \text{Fator : de : potência} &= \cos(30^\circ - 22,9^\circ) = 0,9923 \\ \text{Potência} &= \sqrt{3} \times 232 \times 350 \times 0,9923 = 140.000 \quad \text{kW}\end{aligned}$$

3. Determine o circuito π equivalente da linha descrita no exemplo 1 e faça a comparação com o circuito π nominal.

Solução:

Como já são conhecidos do exemplo 2 os valores de $\text{Senh}(\gamma l)$ e $\text{cosh}(\gamma l)$, teremos:

$$\begin{aligned}Z' &= (405\angle -5,9^\circ) \times 0,449\angle 84,5^\circ = 182\angle 78,6^\circ \quad \text{ohms} \\ \frac{Y'}{2} &= \frac{0,895 + j : 0,0215 - 1}{182\angle 78,6^\circ} = \frac{-0,105 + j : 0,0215}{182\angle 78,6^\circ} \\ \frac{Y'}{2} &= \frac{0,107\angle 168,4^\circ}{182\angle 78,6^\circ} = 0,000588\angle 89,8^\circ \quad \text{mho}\end{aligned}$$

O circuito π nominal tem uma impedância em série de

$$Z = 225 \times 0,841\angle 78,2^\circ = 189\angle 78,2^\circ \quad \text{ohms}$$

E a admitância dos ramos em paralelo são:

$$\frac{Y}{2} = \frac{5,12 \times 10^{-6} \angle 90^\circ}{2} \times 225 = 0,000575\angle 90^\circ \quad \text{mho}$$

1.26 Exercícios Propostos

1. Uma linha trifásica de 60 Hz, com um só circuito e 16 km é constituída por cabos 4/0 de cobre duro, com 19 fios cada; os cabos estão dispostos nos vértices de um triângulo equilátero, com espaçamento de 1,52 m entre os centros. A linha alimenta a 11.000 volts uma carga equilibrada de 2.500 kW. Determinar a tensão nos terminais do gerador quando o fator de potência for de 80% em atraso, quando o fator de potência for unitário e quando for de 90% em avanço. Considere a temperatura dos cabos de 50°C.
2. Uma linha trifásica de 60 Hz tem seus cabos dispostos num plano horizontal com uma separação de 4,57 m entre eles. Os cabos são ACSR de 300.000 CM. A linha tem 121 km de extensão e alimenta uma carga de de 30.000 kW, com tensão de 115 kV, sendo o fator de potência 0,8, em atraso. Determine tensão, corrente, potência e fator de potência nos terminais do gerador. Qual o rendimento da transmissão? Considere os cabos a 50°C.
3. Uma linha de transmissão trifásica de 60 Hz, apresenta os seguintes parâmetros:
R = 0,30 ohm/milha
L = 2,10 mH/milha
C = 0,014 μ F/milha.
A tensão nos terminais da carga é de 132 kV. Se a linha estiver aberta nesse extremo, determinar o valor eficaz e a fase de:
 - (a) Tensão incidente, em relação ao neutro, nos terminais da carga(considere essa tensão como referência para o cálculo das fases).
 - (b) Tensão refletida, em relação ao neutro, nos terminais da carga.
 - (c) Tensão incidente, em relação ao neutro, a 121 km da carga.
 - (d) Tensão refletida, em relação ao neutro, a 121 km da carga.
 - (e) Tensão resultante, em relação ao neutro, e a tensão de linha, a 121 da carga.
4. Se a linha do item anterior tiver 121 km de comprimento e fornecer 40.000 kW a 132 kV e fator de potência de 80% em atraso, determinar a tensão, a corrente, a potência e o fator de potência no início da linha. Calcule também o rendimento da transmissão, a impedância característica, o comprimento de onda e a velocidade de propagação.
5. Uma linha de transmissão trifásica de 60 Hz tem 282 km de extensão. Sua impedância total em série é de $35+j : 140$ ohms e sua admitância total em paralelo é de 930×10^{-6} mhos. Ela fornece 40.000 kW a 220 kV com fator de potência em atraso de 90%. Determinar a tensão no início da linha utilizando:
 - (a) a aproximação para linhas curtas

- (b) a aproximação do circuito π nominal
 - (c) a equação da linha longa.
6. Uma linha de transmissão possui uma impedância em série de $0,16 + j : 0,8$ ohm/milha e uma admitância em paralelo de $5,3 \times 10^{-6}$ mho/milha.
- (a) Calcule as constantes ABCD se a linha tiver 15 milhas (24 km) extensão.
 - (b) Calcule a relação $|V_S|/|V_R|$ se a linha tiver 75 milhas (121 km) de extensão, estando aberto os terminais da barra receptora.
 - (c) Calcule a relação $|V_S|/|V_R|$ se a linha tiver 200 milhas (322 km) de extensão, estando aberto os terminais da barra receptora.

Capítulo 2

FORMAÇÃO DAS MATRIZES ADMITÂNCIA E IMPEDÂNCIA DE BARRA E REDUÇÃO DE REDES. [4, 12]

2.1 Introdução

O desenvolvimento continuado de grandes computadores de alta velocidade tem propiciado uma importante mudança nas técnicas de solução de grandes circuitos elétricos. As soluções através de computador digital dependem das equações do circuito. Assim, é importante que o engenheiro de sistemas de potência entenda a formulação das equações e, para a obtenção da solução, desenvolva o programa de computador.

Neste capítulo abordaremos a formulação das matrizes admitância de barra e impedância de barra e a técnica de redução de redes que será de fundamental importância em estudos posteriores.

2.2 Fontes Equivalentes

Um problema bastante útil em alguns problemas de análise de circuitos é a substituição de uma fonte de corrente constante, em paralelo com uma impedância, por uma fonte de tensão, em série com a mesma impedância. Os dois circuitos da **Figura 2.1** ilustra o que foi mencionado. As duas fontes associadas com suas respectivas impedâncias são conectadas a um circuito com dois terminais e uma impedância de entrada Z_L . A carga é considerada um circuito passivo, isto é, as tensões internas do circuito de carga

são curto-circuitadas e as fontes de correntes abertas.

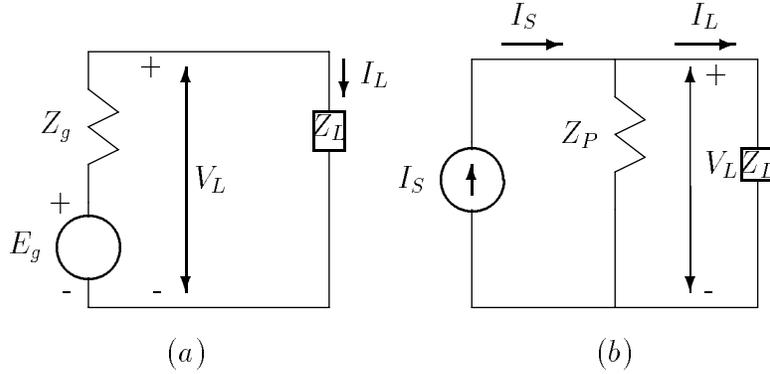


Figura 2.1: Circuitos ilustrativos das fontes equivalentes

Um circuito com fonte de tensão E_g e impedância série Z_g , a tensão na carga é

$$V_L = E_g - Z_g \cdot I_L, \quad (2.1)$$

onde I_L é a corrente de carga. Para um circuito com fonte de corrente constante I_s e uma impedância shunt Z_p , a tensão na carga é

$$V_L = Z_p \cdot (I_s - I_L) = Z_p \cdot I_s - Z_p \cdot I_L. \quad (2.2)$$

As duas fontes e as impedância são equivalentes se a tensão V_L for a mesma nos dois circuitos. De fato, para valores iguais de V_L significa valores iguais de I_L para cargas idênticas.

A comparação das equações (2.1) e (2.2) mostram que V_L será idêntica nos dois circuitos e, portanto, a fonte de tensão e a impedância série podem ser substituídas pela fonte de corrente e a impedância shunt desde que

$$E_g = Z_p \cdot I_s \quad (2.3)$$

e

$$Z_g = Z_p. \quad (2.4)$$

Estas relações mostram que a fonte de corrente e a impedância shunt podem ser substituídas por uma fonte de tensão constante em série com uma impedância se a tensão da fonte for igual ao produto da corrente constante pela impedância shunt e se a impedância série for igual a impedância shunt.

Mostrou-se as condições de fontes equivalentes conectadas a um circuito passivo. Considerando o princípio da superposição mostra-se que a mesma providência

aplica-se se a saída é um circuito ativo, isto é, se o circuito de saída inclui fontes de tensão e corrente. Para determinar a contribuição do circuito de saída, o princípio da superposição é utilizado curto-circuitando as fontes de tensão e abrindo as fontes de corrente com as impedâncias permanecendo inalteradas.

2.3 Equações Nodais

As junções formadas quando dois ou mais elementos (R, L, C, ou uma fonte ideal de corrente ou tensão) conectados nos seus terminais, são chamados de nós. Em sistemas de potência são comumente chamados de barras. A formulação sistemática das equações determinada nos nós de um circuito pela aplicação da lei de Kirchhoff das correntes, é a base de algumas soluções de problemas de sistemas de potência.

No sentido de examinar alguns aspectos das equações nodais, começaremos com um sistema de potência simples como mostra a **Figura 2.2**. Os geradores são conectados através de transformadores as barras de alta tensão 1 e 3 suprimindo um motor síncrono na barra 2.

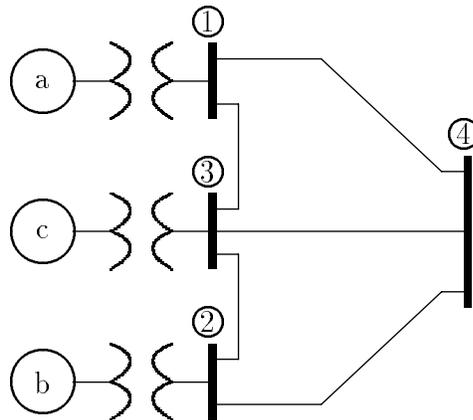


Figura 2.2: Diagrama unifilar de um sistema simples

Para análise, as máquinas ligadas a uma barra são tratadas como máquinas simples representadas por uma fonte de tensão em série com uma reatância. O diagrama de reatância, com as reatâncias em p.u., é mostrado na **Figura 2.3**. Os nós são indicados por pontos e os nós com mais de duas conexões são indicados por números circunscritos.

O circuito é refeito com as fontes de tensão em série com as impedâncias conectadas aos nós com mais de duas conexões trocadas por fontes de corrente em paralelo com admitância shunt, com mostra a **Figura 2.4**.

Aplicando a lei de Kirchhoff das correntes no nó 1 com a fonte de corrente injetando corrente igual a soma das correntes que deixam o nó, temos

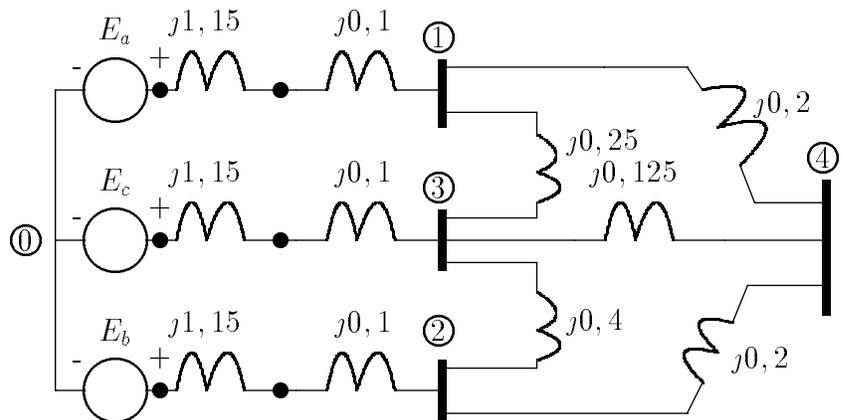


Figura 2.3: Diagrama de reatâncias do sistema da **Figura 2**. Valores das reatâncias em p.u..

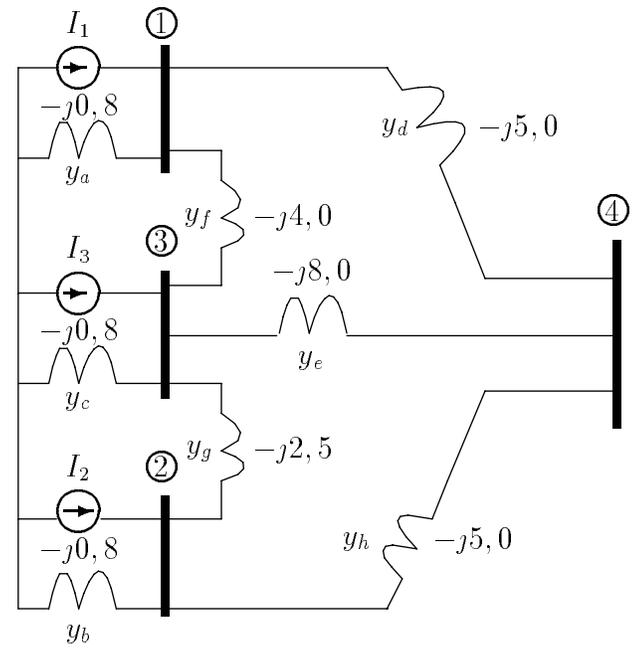


Figura 2.4: Circuito da **Figura 2.3** com fontes de corrente ao invés das fontes de tensão. Os valores mostrados são admitâncias em p.u.

$$I_1 = y_a \cdot V_1 + y_f \cdot (V_1 - V_3) + y_d \cdot (V_1 - V_4) \quad (2.5)$$

e para o nó 4

$$0 = y_d \cdot (V_4 - V_1) + y_h \cdot (V_4 - V_2) + y_e \cdot (V_4 - V_3). \quad (2.6)$$

Rearranjando essas equações, temos

$$I_1 = (y_a + y_f + y_d) \cdot V_1 - y_f \cdot V_3 - y_d \cdot V_4 \quad (2.7)$$

$$0 = -y_d \cdot V_1 - y_h \cdot V_2 - y_e \cdot V_3 + (y_d + y_e + y_h) \cdot V_4. \quad (2.8)$$

Equações semelhantes podem ser formadas para os nós 2 e 3, e o sistema de equações pode ser resolvido para determinar V_1 , V_2 , V_3 e V_4 . As correntes podem ser calculadas uma vez conhecidas essas tensões.

As equações do sistema podem ser colocadas na forma matricial por

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A matriz \mathbf{Y} é simétrica e denominada de \mathbf{Y}_{BARRA} e chamada de matriz admitância de barra. Os elementos Y_{11} , Y_{22} , Y_{33} e Y_{44} são chamados de elementos próprios da matriz. Os elementos fora da diagonal são chamados de elementos mútuos.

A expressão geral para a corrente injetada no nó k de um circuito com N nós independentes, isto é, N barras fora a referência, é

$$I_k = \sum_{n=1}^N Y_{kn} \cdot V_n. \quad (2.10)$$

Os elementos da matriz \mathbf{Y}_{BARRA} são formados de uma forma genérica, equação (2.7) e (2.8), por:

1. Elementos próprios

$$Y_{ii} = \sum_{j=1}^N y_{ij}$$

2. Elementos mútuos

$$Y_{ij} = -y_{ij}.$$

Sendo y_{ij} a admitância conectada entre a barra i e a barra j .

Exemplo 1.

Escreva na forma matricial as equações nodais para as tensões nas barras numeradas da **Figura 2.4**. O circuito é equivalente ao da **Figura 2.3**. As fontes de tensão são: $E_a = 1,5\angle 0^\circ$, $E_b = 1,5\angle -36,87^\circ$ e $E_c = 1,5\angle 0^\circ$ em p.u..

Solução:

As correntes das fontes são dadas por

$$I_1 = I_3 = \frac{1,5\angle 0^\circ}{j1,25} = 1,2\angle -90^\circ = 0 - j1,2 \text{ p.u.}$$

$$I_2 = \frac{1,5\angle -36,87^\circ}{j1,25} = 1,2\angle -126,87^\circ = 0,72 - j0,96 \text{ p.u..}$$

Os elementos próprios da matriz admitância são obtidos por

$$Y_{11} = -j(5,0 + 4,0 + 0,8) = -j9,8 \quad Y_{22} = -j(5,0 + 2,5 + 0,8) = -j8,3$$

$$Y_{33} = -j(4,0 + 2,5 + 0,8) = -j15,3 \quad Y_{44} = -j(5,0 + 5,0 + 8,0) = -j18,0$$

e os elementos mútuos por

$$Y_{12} = Y_{21} = 0 \quad Y_{23} = Y_{32} = j2,5$$

$$Y_{13} = Y_{31} = j4,0 \quad Y_{24} = Y_{42} = j5,0$$

$$Y_{14} = Y_{41} = j5,0 \quad Y_{34} = Y_{43} = j8,0$$

As equações nodais na forma matricial são dadas por

$$\begin{bmatrix} 0,00 - j1,20 \\ -0,72 - j0,96 \\ 0,00 - j1,20 \\ 0,00 - j0,00 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} -9,8 & 0,0 & 4,0 & 5,0 \\ 0,0 & -8,3 & 2,5 & 5,0 \\ 4,0 & 2,5 & -15,3 & 8,0 \\ 5,0 & 5,0 & 8,0 & -18,0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

A matriz 4×4 é chamada de matriz admitância de barra \mathbf{Y}_{BARRA}

Exemplo 2.

Resolver o sistema de equações anterior a fim de determinar as tensões de barra pela inversão da matriz admitância de barra.

Solução:

Multiplicando os dois lados da matriz pela inversa da matriz admitância de barra, temos

$$j \begin{bmatrix} 0,4774 & 0,3706 & 0,4020 & 0,4142 \\ 0,3706 & 0,4872 & 0,3922 & 0,4126 \\ 0,4020 & 0,3922 & 0,4558 & 0,4232 \\ 0,4142 & 0,4126 & 0,4232 & 0,4733 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,00 - j1,20 \\ -0,72 - j0,96 \\ 0,00 - j1,20 \\ 0,00 - j0,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

A matriz obtida pela inversa de \mathbf{Y}_{BARRA} é chamada de matriz impedância de barra \mathbf{Z}_{BARRA} . Multiplicando essa matriz pelo vetor de corrente, temos

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4111 - j0,2668 \\ 1,3830 - j0,3508 \\ 1,4059 - j0,2824 \\ 1,4009 - j0,2971 \end{bmatrix}.$$

As tensões nodais ou tensões de barras em p.u., são

$$\begin{aligned} V_1 &= 1,4111 - j0,2668 = 1,436\angle -10,71^\circ \\ V_2 &= 1,3830 - j0,3508 = 1,427\angle -14,24^\circ \\ V_3 &= 1,4059 - j0,2824 = 1,434\angle -11,36^\circ \\ V_4 &= 1,4009 - j0,2971 = 1,432\angle -11,97^\circ. \end{aligned}$$

2.4 Redução de Redes

Alguns nós podem ser eliminados do circuito através de manipulações matriciais na matriz das equações nodais.

As equações nodais na forma matricial são dadas por

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{BARRA} \cdot \mathbf{V}, \quad (2.11)$$

onde \mathbf{I} e \mathbf{V} são vetores e \mathbf{Y}_{BARRA} uma matriz quadrada simétrica. Os vetores devem ser arrumados de forma que os elementos associados com os nós a serem eliminados estejam nas linhas inferiores. Os elementos da matriz admitância devem ser localizados para corresponder essa associação. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_A \\ \mathbf{I}_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_A \\ \mathbf{V}_X \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

onde \mathbf{I}_X é o vetor composto das correntes dos nós a serem eliminados e \mathbf{V}_X o vetor das tensões correspondentes a esses nós. Para os nós serem eliminados, é necessário que \mathbf{I}_X seja nulo.

Desenvolvendo a equação (2.12)

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_A + \mathbf{L} \cdot \mathbf{V}_X \quad (2.13)$$

e

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{V}_A + \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}_X. \quad (2.14)$$

Sendo os elementos de \mathbf{I}_X nulos, temos

$$\mathbf{V}_X = -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{V}_A. \quad (2.15)$$

Substituindo \mathbf{V}_X na equação (2.13), temos

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_A - \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{V}_A, \quad (2.16)$$

que é uma equação nodal, sendo a matriz admitância igual a

$$\mathbf{Y}_{BARRA} = \mathbf{K} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{L}^T. \quad (2.17)$$

Exemplo 3.

Se a máquina e o transformador da barra 3 forem retirados do circuito da **Figura 2.3**, elimine os nós 3 e 4 pelo método matricial descrito anteriormente. Determine o circuito equivalente e a potência transferida do circuito entre os nós 1 e 2 e calcule a tensão em 1.

Solução:

A matriz admitância de barra do circuito para a eliminação dos nós 3 e 4 é

$$\mathbf{Y}_{BARRA} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{M} \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} -9,8 & 0,0 & \vdots & 4,0 & 5,0 \\ 0,0 & -8,3 & \vdots & 2,5 & 5,0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4,0 & 2,5 & \vdots & -15,3 & 8,0 \\ 5,0 & 5,0 & \vdots & 8,0 & -18,0 \end{bmatrix}.$$

A inversa da submatriz \mathbf{M} é

$$\mathbf{M}^{-1} = j \frac{1}{-197} \cdot \begin{bmatrix} -18,0 & -8,0 \\ -8,0 & -15,3 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 0,0914 & 0,0406 \\ 0,0406 & 0,0736 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{L}^T &= (j)^3 \begin{bmatrix} 4,0 & 5,0 \\ 2,5 & 5,0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,0914 & 0,0406 \\ 0,0406 & 0,0736 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4,0 & 2,5 \\ 5,0 & 5,0 \end{bmatrix} = \\ &= -j \begin{bmatrix} 4,9264 & 4,0736 \\ 4,0736 & 3,4260 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y}_{BARRA} = \mathbf{K} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{L}^T = j \begin{bmatrix} -9,8 & 0,0 \\ 0,0 & -8,3 \end{bmatrix} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{Y}_{BARRA} = j \begin{bmatrix} -4,8736 & 4,0736 \\ 4,0736 & -4,8736 \end{bmatrix}.$$

A matriz mostra que a admitância entre as barras 1 e 2 é $-j4,0736$ cuja inversa é a impedância entre essas barras.

A admitância entre cada barra e a barra de referência é

$$-j4,8736 - (-j4,0736) = -j0,800 \text{ p.u.}$$

O circuito resultante é mostrado na **Figura 2.5a**. Quando as fontes de corrente são convertidas para fontes de tensão, o circuito com as impedâncias em p.u. é mostrado na **Figura 2.5b**.

$$I = \frac{1,5\angle 0^\circ - 1,5\angle -36,87^\circ}{j(1,25 + 1,25 + 0,2455)} = \frac{1,5 - 1,2 + j0,9}{j(2,7455)} = 0,3278 - j0,1093 = 0,3455\angle -18,44 \text{ p.u.}$$

A potência de saída da fonte **a** é

$$1,5\angle 0^\circ \times 0,3455\angle 18,44^\circ = 0,492 + j0,164 \text{ p.u.}$$

e a potência da fonte **b** é

$$1,5\angle -36,87^\circ \times 0,3455\angle 18,44^\circ = 0,492 - j0,164 \text{ p.u.}$$

Observe que a potência reativa do circuito é igual a

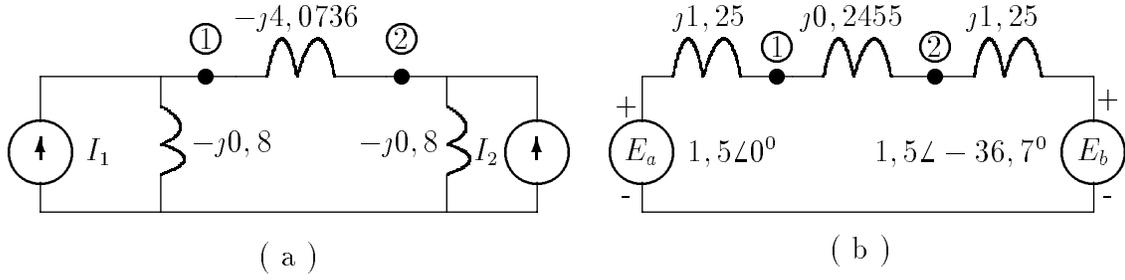


Figura 2.5: Circuito da **Figura 3** sem a fonte no nó 3. a) Com as fontes de corrente equivalentes b) com as fontes de tensão equivalentes nos nós 1 e 2.

$$(0,3455)^2 \times 2,7455 = 0,328 = 0,164 + 0,164.$$

A tensão no nó 1 é

$$1,5 - j1,25 \times (0,3278 - j0,1093) = 1,363 - j0,41 \text{ p.u..}$$

Em um circuito simples como o desse exemplo, a eliminação poderia ter sido feita por transformação Y- Δ e combinações série e paralela das impedâncias. O método matricial é geral e mais fácil de ser implementado em computador digital. Entretanto, para a eliminação de grande número de nós, a inversa da matriz \mathbf{M} também é grande.

A inversão da matriz é facilitada pela eliminação de um nó de cada vez. O nó a ser eliminado deve ser o de maior numeração e em seguida ser feita uma nova numeração. A matriz \mathbf{M} será formada por um único elemento e \mathbf{M}^{-1} será o inverso desse elemento. A matriz original particionada em submatrizes \mathbf{K} , \mathbf{L} , \mathbf{L}^T e \mathbf{M} é

$$\mathbf{Y}_{BARRA} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \vdots & \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_{\mathbf{L}} & \vdots & \\ Y_{11} \cdots Y_{1j} \cdots & \vdots & Y_{1n} \\ Y_{k1} \cdots Y_{kj} \cdots & \vdots & Y_{kn} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots & \cdots & \cdots \cdots \\ Y_{n1} \cdots Y_{nj} \cdots & \vdots & Y_{nn} \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_{\mathbf{L}^T} & \vdots & \underbrace{\quad\quad\quad}_{\mathbf{M}} \end{array} \right] \quad (2.18)$$

A matriz reduzida $(n-1) \times (n-1)$ será, de acordo com a equação (2.17),

$$\mathbf{Y}_{BARRA} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1j} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ Y_{k1} & \cdots & Y_{kj} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} - \frac{1}{Y_{nn}} \cdot \begin{bmatrix} Y_{1n} \\ \vdots \\ Y_{kn} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot [Y_{n1} \quad \cdots \quad Y_{nj} \quad \cdots]. \quad (2.19)$$

Quando é feita a manipulação da matriz, o elemento da linha k e coluna j da matriz $(n-1) \times (n-1)$ é

$$Y_{kj(nova)} = Y_{kj(original)} - \frac{Y_{kn} \cdot Y_{nj}}{Y_{nn}}. \quad (2.20)$$

Exemplo 4.

Proceda a eliminação dos nós do exemplo 3 primeiro removendo o nó 4 e depois o nó 3.

Solução:

Como no exemplo 3, a matriz particionada para a eliminação de um nó é

$$\mathbf{Y}_{BARRA} = J \begin{bmatrix} -9,8 & 0,0 & 4,0 & \vdots & 5,0 \\ 0,0 & -8,3 & 2,5 & \vdots & 5,0 \\ 4,0 & 2,5 & -14,5 & \vdots & 8,0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5,0 & 5,0 & 8,0 & \vdots & -18,0 \end{bmatrix}.$$

Para modificar o elemento $j2,5$ na linha 3 e coluna 2, fazemos

$$Y_{32} = j2,5 - \frac{j8,0 \times j5,0}{-j18,0} = j4,7222.$$

Igualmente, o novo elemento da linha 1 e coluna 1 é

$$Y_{11} = -j9,8 - \frac{j5,0 \times j5,0}{-j18,0} = -j8,4111.$$

Os outros elementos são calculados da mesma forma. Assim, a matriz reduzida será

$$\mathbf{Y}_{BARRA} = J \begin{bmatrix} -8,4111 & 1,3889 & 6,2222 \\ 1,3889 & -6,9111 & 4,7222 \\ 6,2222 & 4,7222 & -10,9444 \end{bmatrix}.$$

Reduzindo essa matriz para eliminar o nó 3, temos

$$\mathbf{Y}_{BARRA} = \begin{bmatrix} -4,8736 & 4,0736 \\ 4,0736 & -4,8736 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz é idêntica a encontrada pelo método matricial em que os dois nós foram eliminados de uma só vez.

2.5 Medição dos Elementos das Matrizes Impedância e Admitância de Barra

No exemplo 2, a inversão da matriz admitância de barra \mathbf{Y}_{BARRA} é chamada de matriz impedância de barra \mathbf{Z}_{BARRA} e é, por definição,

$$\mathbf{Z}_{BARRA} = \mathbf{Y}_{BARRA}^{-1}. \quad (2.21)$$

Para um circuito de três nós, temos que

$$\mathbf{Z}_{BARRA} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

sendo \mathbf{Z}_{BARRA} uma matriz simétrica.

A matriz \mathbf{Y}_{BARRA} não necessariamente deve ser obtida para se obter \mathbf{Z}_{BARRA} . Posteriormente será apresentada a forma de se obter \mathbf{Z}_{BARRA} diretamente.

A matriz impedância é bastante importante no cálculo de faltas. No sentido de entender o significado físico das impedâncias na matriz, vamos comparar com a admitância. A equação nodal é expressa na forma

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{BARRA} \cdot \mathbf{V}. \quad (2.23)$$

Temos no nó 2, da **Figura 2.6**, que

$$I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2 + Y_{23} \cdot V_3. \quad (2.24)$$

Curto-circuitando os nós 1 e 3 ao nó de referência, ou seja, fazendo $V_1 = 0$ e $V_3 = 0$, e injetando a corrente I_2 no nó 2, a admitância própria do nó 2 é

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=V_3=0}. \quad (2.25)$$

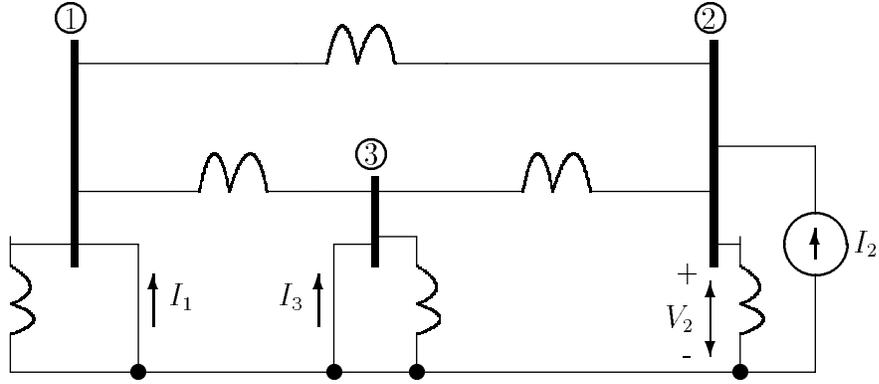


Figura 2.6: Circuito para medição de Y_{22} , Y_{12} e Y_{32} .

Dessa forma a admitância própria de um nó particular será medido curto-circuitando todos os outros nós ao nó de referência e calculando a relação entre a corrente injetada nesse nó e a tensão resultante. A **Figura 2.6** ilustra o método para um circuito com três nós. O resultado é equivalente a somar todas as admitâncias diretamente conectadas ao nó.

A **Figura 2.6** serve também para ilustrar a medição da admitância mútua. No nó 1 a equação é obtida expandindo a equação (2.23) na forma

$$I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2 + Y_{13} \cdot V_3 \quad (2.26)$$

onde temos

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=V_3=0} . \quad (2.27)$$

Assim, a admitância mútua é medida curto-circuitando os nós ao nó de referência, exceto o nó 2, e injetando a corrente I_2 como mostra a **Figura 2.6**. Dessa forma, Y_{12} é a relação do negativo da corrente que sai do circuito no curto-circuito do nó 1 e a tensão V_2 . O termo, negativo da corrente que sai do nó 1, é usado por ser I_1 definido como a corrente que entra no circuito. A admitância resultante é o negativo da admitância diretamente conectada entre os nós 1 e 2.

Resolvendo a equação (2.23), multiplicando os dois lados por \mathbf{Y}_{BARRA}^{-1} , temos

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}_{BARRA} \cdot \mathbf{I} \quad (2.28)$$

sendo $\mathbf{Z}_{BARRA} = \mathbf{Y}_{BARRA}^{-1}$.

Expandindo a equação (2.28) para um circuito com três nós, temos

$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 + Z_{13} \cdot I_3 \quad (2.29)$$

$$V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 + Z_{23} \cdot I_3 \quad (2.30)$$

$$V_3 = Z_{31} \cdot I_1 + Z_{32} \cdot I_2 + Z_{33} \cdot I_3 \quad (2.31)$$

Da equação (2.30) temos que a impedância Z_{22} é determinada abrindo as fontes de corrente nos nós 1 e 3 e injetando a corrente I_2 no nó 2. Assim,

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=I_3=0} . \quad (2.32)$$

A **Figura 2.7** mostra o circuito descrito. Z_{22} é obtida abrindo todas as fontes de corrente conectadas aos outros nós

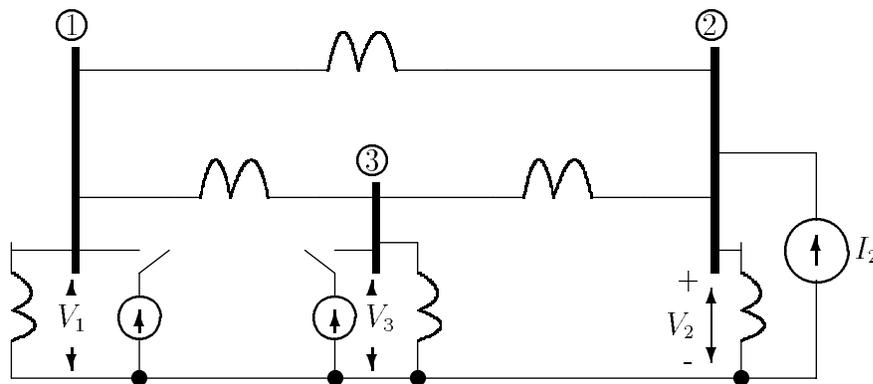


Figura 2.7: Circuito para medição de Z_{22} , Z_{12} e Z_{32} .

A **Figura 2.7** permite medir as impedâncias de transferência, como pode ser visto pela equação (2.29) que as fontes de corrente I_1 e I_2 são abertas e,

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=I_3=0}, \quad (2.33)$$

e da equação (2.31)

$$Z_{32} = \frac{V_3}{I_2} \Big|_{I_1=I_3=0} .$$

Assim podemos medir as impedâncias Z_{12} e Z_{32} injetando corrente no nó 2 e encontrando a relação entre V_1 e I_2 , V_3 e I_2 com as fontes abertas nos outros nós.

Exemplo 5.

Um capacitor de reatância de 5,0p.u é conectado ao nó 4 do circuito dos exemplos 1 e 2. As tensões E_a , E_b e E_c são iguais nesses exemplos. Determine a corrente solicitada pelo capacitor.

Solução:

A tensão do equivalente de Thévenin vista do nó 4 é

$$E_{th} = 1,432\angle -11,97^\circ$$

que é a tensão no nó 4 antes de colocar o capacitor. Para encontrar a impedância de Thévenin, as tensões (fontes) são curto-circuitadas ou as fontes de corrente são abertas e a impedância entre o nó 4 e a referência é a impedância procurada. Da expressão $\mathbf{V} = \mathbf{Z}_{BARRA} \cdot \mathbf{I}$, temos no nó 4

$$V_4 = Z_{41} \cdot I_1 + Z_{42} \cdot I_2 + Z_{43} \cdot I_3 + Z_{44} \cdot I_4.$$

Com as fontes de tensão curto-circuitadas ou as fontes de corrente abertas, nenhuma corrente é injetada nos nós 1, 2 e 3. A relação entre a tensão aplicada no nó 4 e a corrente produzida por ela, é a impedância Z_{44} . Assim,

$$Z_{th} = Z_{44} = j0,4733.$$

E a corrente solicitada pelo capacitor é

$$I_c = \frac{1,432\angle -11,97^\circ}{j0,4733 - j5,0} = 0,316\angle 78,03^\circ \text{ p.u..}$$

Exemplo 6.

Se a corrente de $-0,316\angle 78,03^\circ$ p.u. é injetada no circuito, no nó 4, determine a tensão resultante nos nós 1, 2, 3 e 4.

Solução:

Com as fontes de tensão curto-circuitadas, as tensões nos nós devidas apenas a corrente injetada, serão calculadas usando a matriz impedância de barra do circuito. As impedâncias são as da coluna 4 de \mathbf{Z}_{BARRA} . Assim sendo,

$$V_1 = Z_{14} \cdot I_4 = -0,316\angle 78,03^\circ \times 0,4142\angle 90^\circ = 0,1309\angle -11,97^\circ$$

$$V_2 = Z_{24} \cdot I_4 = -0,316\angle 78,03^\circ \times 0,4126\angle 90^\circ = 0,1304\angle -11,97^\circ$$

$$V_3 = Z_{34} \cdot I_4 = -0,316\angle 78,03^\circ \times 0,4232\angle 90^\circ = 0,1337\angle -11,97^\circ$$

$$V_4 = Z_{44} \cdot I_4 = -0,316\angle 78,03^\circ \times 0,4733\angle 90^\circ = 0,1496\angle -11,97^\circ.$$

Por superposição, as tensões resultantes são determinadas pela a adição da tensão causada pela injeção de corrente com as tensões das fontes curto-circuitadas. As novas tensões são:

$$V_1 = 1,436\angle -10,71^\circ + 0,1309\angle -11,97^\circ = 1,567\angle -10,81^\circ \text{ p.u}$$

$$V_2 = 1,427\angle -14,2^\circ + 0,1304\angle -11,97^\circ = 1,557\angle -14,04^\circ \text{ p.u}$$

$$V_3 = 1,434\angle -11,4^\circ + 0,1337\angle -11,97^\circ = 1,568\angle -11,41^\circ \text{ p.u}$$

$$V_4 = 1,432\angle -11,97^\circ + 0,1496\angle -11,97^\circ = 1,582\angle -11,97^\circ \text{ p.u..}$$

As variações nas tensões devidas a corrente injetada, têm o mesmo ângulo os quais diferem pouco do ângulo das tensões originais. Os dois últimos exemplos ilustraram a importância da matriz impedância de barra.

2.6 Modificação de uma Matriz Impedância de Barra

A matriz \mathbf{Z}_{BARRA} é uma ferramenta importante em análise de sistemas de potência. Veremos como modificar \mathbf{Z}_{BARRA} ao adicionar uma nova barra ou ao conectar uma nova linha a uma barra já existente. Poderíamos criar uma nova matriz \mathbf{Y}_{BARRA} e invertê-la, mas, o método direto de modificação é mais vantajoso e mais simples que a inversão. Após a modificação de \mathbf{Z}_{BARRA} , veremos como construí-la.

Consideremos vários tipos de modificações envolvendo a adição de um ramo com impedância Z_b a um circuito cuja matriz original \mathbf{Z}_{BARRA} é conhecida e que a identificaremos por \mathbf{Z}_{orig} ($n \times n$).

Em nossa análise, as barras existentes identificaremos por números ou letras h, i, j e k. A letra p designará a nova barra a ser adicionada ao circuito para converter \mathbf{Z}_{orig} a uma matriz $(n+1) \times (n+1)$. Quatro casos serão considerados.

1. Adição de Z_b de uma nova barra p a barra de referência.

A adição de Z_b de uma nova barra p a barra de referência sem conexão com as barras já existentes do circuito original, não altera as tensões de barra original quando uma corrente I_p é injetada na nova barra. A tensão V_p na nova barra é igual a $Z_b \cdot I_p$. Assim,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ \dots \\ V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \vdots & 0 \\ & & & \vdots & 0 \\ & & \mathbf{Z}_{orig} & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & 0 \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ & & & & Z_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ \dots \\ I_p \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Observe que o vetor de correntes multiplicado pela nova matriz \mathbf{Z}_{BARRA} não altera as tensões do circuito original.

2. Adição de Z_b de uma barra p a uma barra existente k.

A adição de Z_b de uma barra p a uma barra k, já existente, com injeção de I_p na barra p, produzirá na barra k $I_k + I_p$, como mostra a **Figura 2.8**.

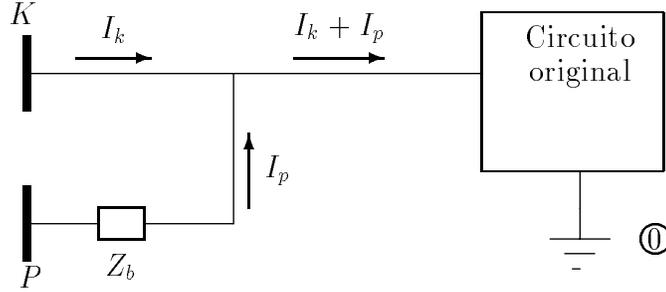


Figura 2.8: Adição da nova barra p conectada através da impedância Z_b a barra k existente.

A corrente I_p injetada na barra k produzirá um acréscimo na tensão original de $Z_{kk} \cdot I_p$, ou seja

$$V_{k(novo)} = V_{k(orig)} + Z_{kk} \cdot I_p \quad (2.35)$$

e V_p será igual a

$$V_p = V_{k(orig)} + Z_{kk} \cdot I_p + Z_b \cdot I_p \quad (2.36)$$

e

$$V_p = Z_{k1} \cdot I_1 + Z_{k2} \cdot I_2 + \dots + Z_{kn} \cdot I_n + (Z_{kk} + Z_b) \cdot I_p. \quad (2.37)$$

A nova linha a ser acrescida a Z_{orig} para encontrar V_p é

$$Z_{k1} \quad Z_{k2} \quad \dots \quad Z_{kn} \quad (Z_{kk} + Z_b).$$

Como Z_{BARRA} é uma matriz quadrada e diagonal, devemos colocar uma coluna igual a transposta da nova linha. Assim a equação matricial torna-se

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ \dots \\ V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \vdots & Z_{1k} \\ & & & & \vdots & Z_{2k} \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & \vdots & Z_{nk} \\ & & & & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{k1} & Z_{k2} & \dots & Z_{kn} & \vdots & Z_{kk} + Z_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ \dots \\ I_p \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Observe que os n primeiros elementos da nova linha são os elementos da linha k de Z_{orig} e os n primeiros elementos da nova coluna são os elementos da coluna k de Z_{orig} .

3. Adição de Z_b de uma barra existente k a barra de referência.

Para alterar Z_{orig} conectando uma impedância Z_b de uma barra k existente a barra

de referência, adiciona-se uma nova barra p conectada por Z_b a barra k . Depois curto-circuita-se a barra p a barra de referência fazendo V_p igual a zero, formando-se assim uma equação matricial semelhante a equação (2.38), exceto que $V_p = 0$. Para modificar, cria-se uma nova linha e uma nova coluna semelhante ao caso 2 e depois elimina-se a linha e a coluna $(n+1)$ pelo fato da tensão ser nula. Para determinar os elementos da nova matriz, temos

$$Z_{hi(nova)} = Z_{hi(orig)} - \frac{Z_{h(n+1)} \cdot Z_{(n+1)i}}{Z_{kk} + Z_b} \quad (2.39)$$

4. Adição de Z_b entre duas barras existentes j e k .

Para adicionar Z_b entre duas barras existentes j e k examinaremos a **Figura 2.9**.

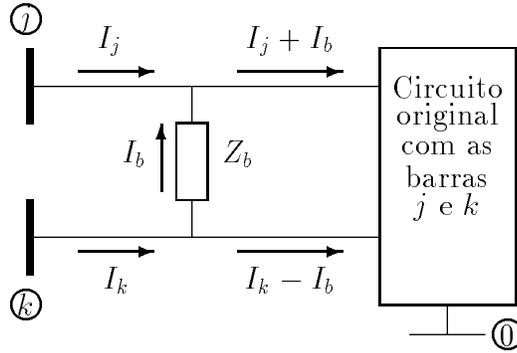


Figura 2.9: Adição da impedância Z_b entre as barras j e k existentes.

A corrente I_b flui através de Z_b de k para j . As equações para as tensões são:

$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + \dots + Z_{1j} \cdot (I_j + I_b) + Z_{1k} \cdot (I_k - I_b) + \dots \quad (2.40)$$

Rearranjando

$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + \dots + Z_{1j} \cdot I_j + Z_{1k} \cdot I_k + \dots + I_b \cdot (Z_{1j} - Z_{1k}) \quad (2.41)$$

igualmente

$$V_j = Z_{j1} \cdot I_1 + \dots + Z_{jj} \cdot I_j + Z_{jk} \cdot I_k + \dots + I_b \cdot (Z_{jj} - Z_{jk}) \quad (2.42)$$

$$V_k = Z_{k1} \cdot I_1 + \dots + Z_{kj} \cdot I_j + Z_{kk} \cdot I_k + \dots + I_b \cdot (Z_{kj} - Z_{kk}). \quad (2.43)$$

Necessita-se de mais uma equação, já que I_b é desconhecida.

$$V_k - V_j = Z_b \cdot I_b \quad (2.44)$$

ou

$$0 = Z_b \cdot I_b + V_j - V_k. \quad (2.45)$$

Substituindo V_j e V_k das equações (2.42) e (2.43) na equação (2.45), temos

$$0 = Z_b \cdot I_b + (Z_{j1} - Z_{k1}) \cdot I_1 + \dots + (Z_{jj} - Z_{kj}) \cdot I_j + \dots + (Z_{jk} - Z_{kk}) \cdot I_k + \dots + (Z_{jj} + Z_{kk} - 2Z_{jk}) \cdot I_b \quad (2.46)$$

Tomando os coeficientes de I_b e nominando sua soma por Z_{bb} , temos

$$Z_{bb} = Z_b + Z_{jj} + Z_{kk} - 2Z_{jk}. \quad (2.48)$$

Examinando as equações (2.41) a (2.43) e (2.46) podemos escrever a equação matricial,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_j \\ V_k \\ \vdots \\ V_n \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \vdots & & & & & & Z_{1j} - Z_{1k} \\ & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & \vdots & & & & & & Z_{jj} - Z_{jk} \\ & & & & \vdots & & & & & & Z_{kj} - Z_{kk} \\ & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & \vdots & & & & & & Z_{nj} - Z_{nk} \\ & & & & \vdots & & & & & & \dots \\ & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ \dots & \dots \\ (Z_{j1} - Z_{k1}) & \dots & (Z_{kj} - Z_{kk}) & \dots & \vdots & & & & & & Z_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_j \\ I_k \\ \vdots \\ I_n \\ \dots \\ I_b \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Eliminando a linha e a coluna $(n+1)$, temos, para cada elemento da nova matriz

$$Z_{hi(nova)} = Z_{hi(orig)} - \frac{Z_{h(n+1)} \cdot Z_{(n+1)i}}{Z_b + Z_{jj} + Z_{kk} - 2Z_{jk}}. \quad (2.50)$$

Exemplo 7.

Modifique a matriz impedância de barra do exemplo 2 para a conexão de um capacitor de reatância 5.0p.u. entre a barra 4 e a barra de referência do circuito da **Figura 2.4**. Determine V_4 usando a impedância da nova matriz e a fonte do exemplo 2. Compare o valor de V_4 com o valor do exemplo 6.

Solução:

Utilizando a equação (2.38) e considerando que Z_{orig} é uma matriz 4×4 e $Z_b = -j5,0 p.u.$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} & & & & \vdots & & & & & & 0,4142 \\ & & & & \vdots & & & & & & 0,4146 \\ & & & & \vdots & & & & & & 0,4232 \\ & & & & \vdots & & & & & & 0,4733 \\ & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\ \dots & \dots \\ 0,4142 & 0,4146 & 0,4232 & 0,4733 & \vdots & & & & & & -4,5267 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ \dots \\ I_b \end{bmatrix}$$

Os elementos da quinta linha e quinta coluna foram obtidos pela repetição da quarta linha e quarta coluna da matriz original. Observe que

$$Z_{55} = Z_{44} + Z_b = j0,4733 - j5,0 = -j4,5267.$$

A eliminação da quinta linha e coluna da matriz $\mathbf{Z}_{BARRA(nova)}$ é obtida da equação (2.39), dessa forma

$$Z_{11} = j0,4774 - \frac{j0,4142 \times j0,4142}{-j4,5267} = j0,5153$$

$$Z_{24} = j0,4126 - \frac{j0,4733 \times j0,4126}{-j4,5267} = j0,5153.$$

Os outros elementos são obtidos da mesma maneira. Assim

$$\mathbf{Z}_{BARRA(nova)} = j \begin{bmatrix} 0,5153 & 0,4084 & 0,4407 & 0,4575 \\ 0,4084 & 0,5242 & 0,4308 & 0,4557 \\ 0,4407 & 0,4308 & 0,4954 & 0,4674 \\ 0,4575 & 0,4557 & 0,4674 & 0,5228 \end{bmatrix}.$$

O vetor de correntes para se obter as novas tensões de barra é o mesmo do exemplo 2. Assim

$$\begin{aligned} V_4 &= j0,4575 \times (-j1,2) + j0,4557 \times (-0,72 - j0,96) + j0,4674 \times (-j1,20) = \\ &= 1,5474 - j0,3281 = 1,582\angle -11,97^\circ \text{ p.u.} \end{aligned}$$

Que é o mesmo valor encontrado no exemplo 6.

2.7 Determinação Direta de uma Matriz Impedância de Barra

Foi visto que uma forma para se obter \mathbf{Z}_{BARRA} era fazendo a inversão de \mathbf{Y}_{BARRA} . Entretanto, a formação de \mathbf{Z}_{BARRA} diretamente, sob o ponto de vista computacional, é mais simples que inverter \mathbf{Y}_{BARRA} , principalmente para grandes circuitos.

Para a montagem de \mathbf{Z}_{BARRA} é necessário possuir uma lista das impedâncias mostrando as barras que elas são conectadas. Inicia-se escrevendo a equação de uma barra conectada através de uma impedância Z_b a barra de referência, como

$$V_1 = Z_a \cdot I_1.$$

Agora podemos adicionar uma nova barra conectada a primeira ou a barra de referência. Assim, se a segunda barra for conectada a barra de referência através de Z_b , temos a equação matricial,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & 0 \\ 0 & Z_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

E assim prosegue-se com a modificação da matriz adicionando outras barras seguindo o procedimento descrito no item anterior.

Exemplo 8.

Determine \mathbf{Z}_{BARRA} para o circuito da **Figura 2.10**, onde as impedâncias são dadas em p.u., preservando os três nós.

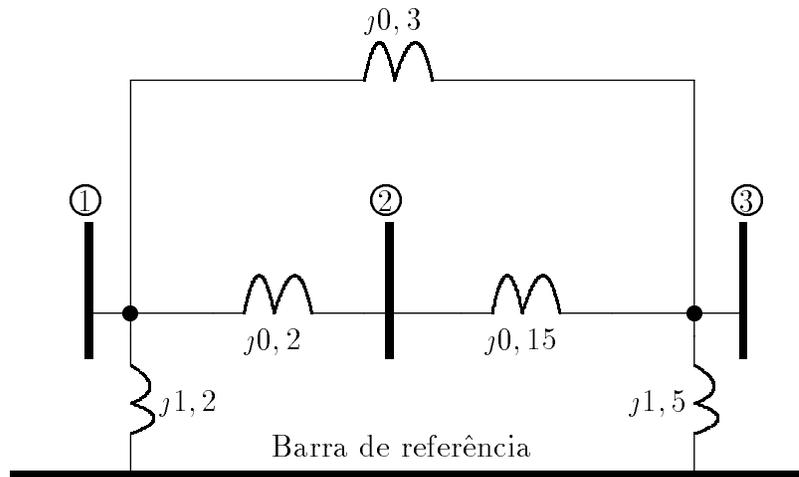


Figura 2.10: Circuito do exemplo 8.

Solução:

Iniciamos pela barra 1 conectando-a a barra de referência através da impedância $j1,2$,

$$V_1 = j1,2 \times I_1,$$

temos uma matriz impedância de barra 1×1

$$\mathbf{Z}_{BARAA} = j1,2.$$

Adicionando a barra 2, conectada a barra 1 através da impedância $j0,2$, temos, pela equação (2.38),

$$\mathbf{Z}_{BARRA} = j \begin{bmatrix} 1,2 & 1,2 \\ 1,2 & 1,4 \end{bmatrix}.$$

O valor 1,4 é obtido pela soma de 1,2+0,2. Os outros elementos da matriz com valores 1,2 são os elementos da linha e coluna 1 da matriz a ser modificada.

A barra 3, com a impedância conectada a barra 1, é adicionada fazendo-se

$$j \begin{bmatrix} 1,2 & 1,2 & 1,2 \\ 1,2 & 1,4 & 1,2 \\ 1,2 & 1,2 & 1,5 \end{bmatrix}.$$

O valor 1,5 é dado pela soma de $Z_{11} = 1,2$ da matriz anterior com a impedância que está sendo conectada $Z_b = 0,3$. Os outros elementos da nova linha e da coluna são repetições da linha 1 e coluna 1 da matriz que está sendo modificada.

Adicionando a impedância $Z_b = j1,5$ do nó 3 a barra de referência, obtemos a matriz impedância

$$j \begin{bmatrix} 1,2 & 1,2 & 1,2 & \vdots & 1,2 \\ 1,2 & 1,4 & 1,2 & \vdots & 1,2 \\ 1,2 & 1,2 & 1,5 & \vdots & 1,4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1,2 & 1,2 & 1,5 & \vdots & 3,0 \end{bmatrix}$$

onde o valor 3 é a soma de $Z_{33}+Z_b$. Os outros elementos na nova linha e coluna são repetições da linha 3 e coluna 3 da matriz que está sendo modificada. Para eliminar a linha 4 e a coluna 4 usa-se a equação (2.39)

$$Z_{11} = j1,2 - \frac{j1,2 \times j1,2}{j3,0} = j0,72$$

$$Z_{22} = j1,4 - \frac{j1,2 \times j1,2}{j3,0} = j0,92$$

$$Z_{23} = Z_{32} = j1,2 - \frac{j1,2 \times j1,5}{j3,0} = j0,60.$$

Os outros elementos são obtidos da mesma forma. Após isso, temos

$$\mathbf{Z}_{BARRA(nova)} = j \begin{bmatrix} 0,72 & 0,72 & 0,60 \\ 0,72 & 0,92 & 0,60 \\ 0,60 & 0,60 & 0,75 \end{bmatrix}.$$

Finalmente adiciona-s a impedância $Z_b = j0,15$ entre as barras 2 e 3. Se tomarmos as letras j e k na equação (2.49) igual a 2 e 3 respectivamente, obteremos os elementos da linha 4 e coluna 4.

$$Z_{14} = Z_{12} - Z_{13} = j0,72 - j0,60 = j0,12$$

$$Z_{24} = Z_{22} - Z_{23} = j0,92 - j0,60 = j0,32$$

$$Z_{34} = Z_{32} - Z_{33} = j0,60 - j0,75 = -j0,15$$

e da equação (2.48)

$$Z_{44} = Z_b + Z_{22} + Z_{33} - 2Z_{23} = j0,15 + j0,92 + j0,75 - 2 \times (j0,60) = j0,62.$$

Assim,

$$j \begin{bmatrix} 0,72 & 0,72 & 0,60 & 0,12 \\ 0,72 & 0,92 & 0,60 & 0,32 \\ 0,60 & 0,60 & 0,75 & -0,15 \\ 0,12 & 0,32 & -0,15 & 0,62 \end{bmatrix}.$$

A partir da equação (2.50) obteremos:

$$Z_{BARRA(nova)} = j \begin{bmatrix} 0,6968 & 0,6581 & 0,6290 \\ 0,6581 & 0,7548 & 0,6774 \\ 0,6290 & 0,6774 & 0,7137 \end{bmatrix}$$

Que é a matriz impedância de barra procurada.

O procedimento é simples para um computador digital. Para isso se faz necessário determinar os tipos de modificações envolvidas para cada impedância a ser adicionada. Entretanto, as operações devem seguir uma sequência de forma a permitir conexões entre duas barras.

Exemplo 9.

Calcule Z_{11} do circuito do exemplo 8 pela medição da impedância entre o nó 1 e a barra de referência para as correntes injetadas nos nós 2 e 3 iguais a zero.

Solução:

De acordo com a equação (2.32), temos que

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=I_3=0}.$$

Considerando os dois ramos em paralelo entre os nós 1 e 3 do circuito da **Figura 2.10**, temos

$$\frac{j0,3 \times j0,35}{j0,3 + j0,35} = j0,1615.$$

Essa impedância em série com $j1,5$ está em paralelo com $j1,2$, cujo resultado é

$$Z_{11} = \frac{j1,2 \times (j1,5 + j0,1615)}{j(1,2 + 1,5 + 0,1615)} = j0,6968.$$

Que é igual ao valor encontrado no exemplo 8.

Capítulo 3

ESTUDO DE FLUXO DE CARGA [1, 2]

3.1 Introdução

Todo sistema de potência deve ser planejado de forma a atender seus usuários com elevada continuidade de serviço, respeitando ainda diversos critérios de qualidade nesse atendimento. Esses critérios (de regime permanente) referem-se a valores máximo e mínimo de tensão nos pontos de entrega, excursão máxima de frequência em torno do valor nominal, carregamento máximo dos componentes do sistema, etc.

No projeto de sistemas elétricos ou planejamento da ampliação de sistemas já existentes, devido ao crescimento anual da carga, impõem-se a instalação de novas usinas e reforços nos sistemas de transmissão e distribuição.

Os estudos de fluxo de carga desempenham um papel muito importante, pois permitem verificar, admitida uma projeção da carga ao longo do tempo, se o sistema proposto será capaz de manter-se dentro dos critérios estabelecidos no atendimento aos usuários. Permitem ainda a comparação de alternativas de expansão, bem como a avaliação do impacto no sistema da entrada de novas unidades geradoras.

Quanto a esse último aspecto deve-se lembrar que atualmente o tamanho econômico de uma unidade geradora, componente de um aproveitamento hidroelétrico de grande porte, atinge valores da ordem de 700 MW, de forma que a entrada em operação de uma unidade desse porte pode sobrecarregar o sistema de transmissão.

Além do setor de planejamento, os estudos de fluxo de carga são largamente utilizados para operação de sistemas. Nesse último caso, a maneira como o sistema irá evoluir até atingir uma certa configuração já está definida, e os estudos de fluxo de potência visam, com informações mais confiáveis a respeito da carga, definir o melhor perfil de tensões para a operação do sistema bem como os ajustes de *taps* dos transformadores, condições para o chaveamento de bancos de capacitores, etc..

Na operação de sistemas elétricos modernos, os estudos de fluxo de carga são realizados praticamente *on line* pelo computador, recebendo os dados das telemedições comandadas por um sistema supervisivo.

Quer em planejamento ou operação, os estudos de fluxo de potência são realizados para simular o sistema funcionando em regime permanente, seja em condições normal ou de emergência.

Entende-se como condição normal aquela em que o sistema apresenta todos os componentes em serviço, carregados de acordo com o despacho de geração/carga estabelecido (despacho nominal). Estudos de fluxo de potência para a condição normal são feitos para verificar se nessa situação os critérios estabelecidos são respeitados, tanto na situação de carga máxima quanto de carga mínima.

Eventualmente, podem-se incluir nos métodos de cálculo usuais rotinas de otimização que visam obter uma minimização das perdas e despacho econômico de geração automaticamente.

Os critérios para condição normal, em geral, dizem respeito a:

- Valores máximos e mínimos de tensão permitidos, para todas as barras do sistema.
- Carregamentos máximos permitidos para as linhas de Transmissão e Transformadores.
- Fator de potência mínimo das unidades geradoras, que se traduz em um limite de potência reativa para essas máquinas.
- Limites de potência reativa para os compensadores síncronos.

O fluxo de carga em condições de emergência é realizado de forma a verificar a viabilidade de o sistema continuar operando, mesmo com a perda temporária de algum equipamento ou Linha de Transmissão, dentro de critérios estabelecidos para as condições de emergência.

3.2 Equações Básicas de Fluxo de Carga

Para obtermos a solução de qualquer rede elétrica em regime permanente é necessário resolver um sistema de equações algébricas não-lineares, que corresponde à solução simultânea $(n-1)$ equações, onde n é o número de barras da rede. Há casos em que, dependendo da metodologia utilizada na formulação das equações de fluxo de carga, poderemos recair em um sistema com menor número de equações, e nesse capítulo nos deteremos em um desses casos, qual seja o método de Newton-Raphson formulado em coordenadas polares.

Devemos ressaltar algumas particularidades das relações com as quais vamos nos defrontar:

- As equações são algébricas e não diferenciais, porque estamos interessados em obter a solução do sistema operando em regime senoidal. Por isso também, representamos cada componente por seu modelo estático.
- As equações são não-lineares e não podemos, infelizmente, utilizar na sua solução os processos diretos de análise de malhas ou de análise nodal, usuais na teoria de circuitos.

Desta forma são necessários, conforme veremos a seguir, processos iterativos de cálculo numérico para solucionar o nosso problema.

A não-linearidade das equações com que trabalharemos ocorre devido a certas características da modelagem de alguns componentes do sistema.

Assim, uma barra geradora tem uma característica muito mais de potência ativa constante do que de uma força eletromotriz constante em módulo e fase, conforme exigiriam as técnicas de circuitos. Além disso, as cargas (em sua maioria) comportam-se como elementos que absorvem potência ativa e reativa constante, nas faixas habituais de tensão operativa, diferindo de um elemento dito de impedância constante onde as potências ativa e reativa seriam proporcionais ao quadrado da tensão.

O tratamento a ser adotado nesse texto será matricial, pois toda ênfase será dada na solução das equações de fluxo de carga por computadores digitais. Evitaremos, tanto quanto possível, um enfoque por variáveis de estado, admitindo que a maioria dos leitores não esteja familiarizada com tal tipo de abordagem.

Em todo o equacionamento que se segue, admitiremos tacitamente que as variáveis e constantes são valores dados em *p.u.*, e o leitor, ao aplicar as fórmulas deduzidas, deve ter em mente esse detalhe.

A potência aparente complexa em função da tensão e corrente na barra pode ser escrita como:

$$S = \dot{V} \cdot \dot{I}^* \quad (3.1)$$

Da equação (3.1), considerando-se o conjugado de ambos os membros e explicitando-se a potência aparente em função de suas componentes retangulares, vem:

$$P - jQ = \dot{V}^* \cdot \dot{I} \quad (3.2)$$

Para uma rede elétrica é válida, conforme já visto, a relação:

$$[\dot{I}] = [Y_{BARRA}] \cdot [\dot{V}] \quad (3.3)$$

onde: $[\dot{I}]$ = vetor coluna das correntes injetadas nas barras

$[\dot{V}]$ = vetor coluna das tensões nas barras

$[Y_{BARRA}]$ = matriz admitância nodal

Escrevendo a equação (3.3) para a linha i , vem:

$$\dot{I}_i = Y_{i1} \cdot \dot{V}_1 + Y_{i2} \cdot \dot{V}_2 + \dots + Y_{in} \cdot \dot{V}_n . \quad (3.4)$$

Das equações (3.1) e (3.4) resulta:

$$\boxed{P_i - jQ_i = \dot{V}_i^* \sum_{j=1}^n Y_{ij} \cdot \dot{V}_j} . \quad (3.5)$$

Essa é a primeira das equações fundamentais da análise de fluxo de carga, e nela a convenção para P_i e Q_i é de valores positivos quando forem potências injetadas na barra, e negativo quando forem potências absorvidas.

Admitindo-se resolvido o sistema de equações resultantes da aplicação da equação (3.5) para todas as barras da rede, devemos calcular os fluxos de potência em todas as ligações do sistema.

Lembrando que tanto as linhas quanto os transformadores são representados por um modelo π , e observando ainda que na **Figura 3.1** s_{ij} representa a potência fluindo de i para j , temos:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{ij} &= \dot{I}_{s_{ij}} + \dot{I}_{pi} \\ \dot{I}_{s_{ij}} &= \frac{(\dot{V}_i - \dot{V}_j)}{z_{ij}} \\ \dot{I}_{pi} &= \dot{V}_i \cdot y_{pi} \end{aligned}$$

$S_{ij} = P_{ij} + jQ_{ij} = \dot{V}_i \cdot \dot{I}_{ij}^*$, da qual, substituindo \dot{I}_{ij} por suas componentes expressas em termos das tensões, obtemos :

$$\boxed{S_{ij} = \dot{V}_i \cdot \frac{(\dot{V}_i^* - \dot{V}_j^*)}{z_{ij}^*} + |\dot{V}_i|^2 \cdot y_{pi}^*} . \quad (3.6)$$

As Equações (3.5) e (3.6) são as equações básicas de fluxo de carga.

Uma análise pormenorizada dessas equações permite concluir que os dados necessários a um estudo de fluxo de carga são:

- Dados da rede
Parâmetros das linhas de transmissão; parâmetros, $taps$ e potência nominal dos transformadores; topologia da rede.

Esses são os dados necessários à montagem da matriz de admitância nodal.

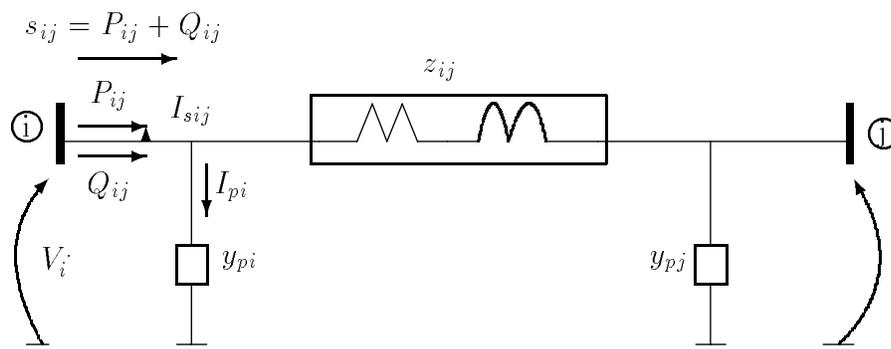


Figura 3.1: Fluxo em um elemento da rede

- Dados de carga
Projeção de carga para todas as barras do sistema na condição que se quer realizar o estudo de fluxo de potência (ano, horário de carga leve ou pesada, etc.).
- Dados de geração
Despacho de geração e a tensão em que se quer controlar a barra de geração para todas as barras desse tipo.
- Dados de barras
Fora os já mencionados, serão necessárias as tensões nominais de todas as barras do sistema.

Esses são os dados considerados indispensáveis, podendo, opcionalmente, o usuário dos programas de computador mais recentes fornecer muitos outros dados, como por exemplo valores limites de tensão para verificação automática, valores limites de potência reativa para as barras de geração, limites de carregamento de linhas e transformadores, etc.

Deve-se ressaltar que os dados de rede necessários incluem apenas a seqüência positiva, porque nos estudos de fluxo de carga convencionais estamos interessados apenas no regime permanente senoidal, e nessa condição, supõem-se as tensões dos geradores perfeitamente equilibradas desprezando-se o acoplamento mútuo entre as seqüências provenientes de pequenos desequilíbrios da rede, como por exemplo aquele causado por uma linha de transmissão não perfeitamente transposta.

A solução das equações básicas permitem obter:

- Tensões em toda a rede.
- Derivações de todos os transformadores providos de comutador de derivação sob carga (LTC, do inglês *Load Tap Changing*), e que são ajustados automaticamente durante a solução.
- Carregamento em todo o sistema.

- Perdas.
- Potência reativa absorvida/gerada por todos os geradores, etc.

Analisando esses resultados é que o engenheiro de sistemas verifica a necessidade ou não de reforços na rede, ou necessidade de chaveamento de capacitores/reatores, ou ainda de alteração de derivações fixas de transformadores.

Para a aplicação da equação (3.5), devemos definir quem são as constantes e quem são as variáveis de nosso problema. Para decidir essa questão, observemos que admitimos definida, a princípio, a configuração da rede. Logo, os elementos da matriz $[Y_{BUS}]$ são constantes, restando como variáveis as potências e tensões das barras.

A equação (3.5) é complexa, podendo ser decomposta em duas equações reais. Isso nos permite escrever duas equações para cada barra do sistema, e assim para tornar possível uma solução temos que especificar *a priori*, duas das quatro variáveis de barra de modo a reduzir o número de incógnitas ao número de equações.

É usual na Engenharia de Sistemas Elétricos de Potência definir-se três tipos de barra em função da dupla de variáveis que são fixadas:

- Barra tipo 1 ou de carga → Barra PQ
Conhecemos as potências ativa e reativa de carga P_C e Q_C e portanto essas serão, naturalmente, as variáveis fixadas.

Nossas incógnitas serão o módulo e a fase da tensão de barra. No caso de haver também geradores conectados a uma barra tipo 1, fixamos também as potências ativa e reativa geradas P_G e Q_G , respectivamente, e utilizamos a soma algébrica das potências $[(P_C + P_G) + j(Q_C + Q_G)]$ no processo de solução. (Note o leitor que o valor de P_C é um número negativo, e o valor de Q_C será negativo para carga indutiva e positivo para carga capacitiva).

- Barra tipo 2 ou de geração → Barra PV
Nessa barra admitimos conhecida a potência ativa gerada P_G e o módulo da tensão de barra, restando como incógnitas a potência reativa Q_G e a fase da tensão de barra.

Caso exista uma carga $P_C + jQ_C$ na barra, utilizamos o valor $(P_C + P_G)$ durante a solução e deixamos Q_G para ser computado só ao final do processo iterativo, pois a potência reativa total injetada/absorvida na barra é incógnita de nosso problema.

- Barra tipo 3 ou oscilante → Barra Swing
Aqui, as variáveis fixadas serão módulo e a fase da tensão da barra, restando como incógnitas as potências P_G e Q_G .

A necessidade deste tipo de barra surge devido ao fato de que as perdas também são uma incógnita e só serão conhecidas ao final da solução, não permitindo que se especifique *a priori*, o despacho de todos os geradores.

As equações (3.7), a seguir, precisam ser respeitadas, sob pena de não conseguirmos obter solução para o nosso sistema de equações algébricas de fluxo de carga; e é para possibilitar a existência de uma solução que se torna indispensável a presença de uma barra Swing.

$$\begin{cases} P_{CTOTAL} + perdas = P_{GTOTAL} \\ Q_{CTOTAL} + perdas = Q_{GTOTAL} \end{cases} \quad (3.7)$$

Em um sistema totalmente conexo, apenas uma barra *Swing* é especificada, mas se o sistema for constituído por vários subsistema desconexos ou interligados apenas em corrente contínua, haverá necessidade de tantas *Swings* quantos forem os subsistemas.

Usualmente fixamos o valor zero para fase da tensão da barra oscilante, embora não seja obrigatório.

3.3 Método de Gauss e Gauss-Seidel

Neste tópico, tomaremos contato com as técnicas numéricas de solução do sistema de equações de fluxo de potência mais freqüentemente nos programas digitais existentes. A rigor, os métodos de Gauss e Gauss-Seidel já caíram em desuso pois, conforme veremos, o método de Newton-Raphson se comporta muito melhor no caso de grandes sistemas. No entanto, devido ao seu grande valor didático, os métodos de Gauss e Gauss-Seidel serão discutidos de forma abreviada neste capítulo.

Para fixar idéias, procuraremos desenvolver um método para solução de uma equação não-linear. Assim, seja por exemplo, resolver a equação transcendente:

$$x^2 - 2x - \ln x = 0 \quad (3.8)$$

Essa equação pode ser reescrita na forma:

$$x = \frac{x^2 - \ln x}{2}$$

a qual permite que se proponha um processo iterativo:

$$x_k = \frac{x_{k-1}^2 - \ln x_{k-1}}{2} \quad (3.9)$$

que se traduz em:

- A partir da estimativa de x na interação $(k - 1)$, x_{k-1} , obtém-se o novo valor de x com auxílio da equação (3.9). Procede-se assim até que a diferença $(x_k - x_{k-1})$ seja menor que uma tolerância preestabelecida.

A **Tabela 1** ilustra a aplicação do algoritmo proposto para a solução da equação (3.8). O resultado correto, com precisão superior a 10^{-5} , é 0.48140.

Tabela 1. Resolução iterativa de equação transcendente pelo método de Gauss

Iteração	$x_{(k-1)}$	$(x_{(k-1)}^2 - \ln x_{(k-1)}) / 2$
1	2,0	1,65343
2	1,6534	1,11548
3	1,11548	0,56751
4	0,56751	0,44428
5	0,44428	0,50434
6	0,50434	0,46943
7	0,46943	0,48830
8	0,48830	0,47763
9	0,47763	0,48352
10	0,48352	0,48022
⋮	⋮	⋮
21	0,48140	0,48140

A **Figura 3.2** ilustra o processo de convergência.

Esse processo é conhecido como Método de Gauss, podendo ser generalizado para a solução de um sistema de n equações lineares ou não.

Assim, seja o sistema de equações:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Seguindo os mesmos passos que executamos para solucionar a equação (3.8), vem:

- Primeiramente reescrevemos o sistema na forma:

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (3.11)$$

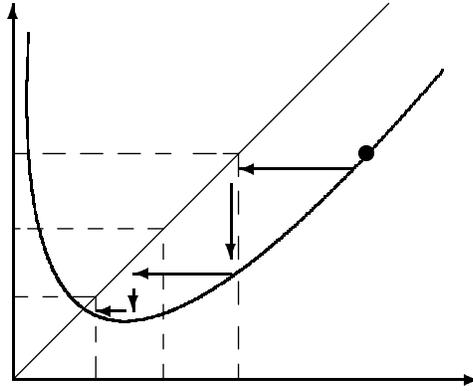


Figura 3.2: Processo de convergência do Método de Gauss.

- A seguir executamos o processo iterativo indicando na equação (3.12), até que todos os $\Delta x_i = |x_i^k - x_i^{(k-1)}|$ sejam menores que uma dada tolerância.

$$\begin{cases} x_1^k = \phi_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ x_2^k = \phi_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ x_n^k = \phi_n(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \end{cases} \quad (3.12)$$

O método de Gauss-Seidel é um aperfeiçoamento do método de Gauss e possibilita uma convergência mais rápida do processo. A única modificação em relação ao método anterior consiste na utilização imediata de um dado x_i^k assim que ele for obtido. Isto quer dizer que ao calcular um x_i^k qualquer, utilizando a linha i da equação (3.12), são empregados os valores de $x_1^k, x_2^k, \dots, x_{i-1}^k$ já obtidos para essa interação k .

Explicitamente, teremos:

$$\begin{cases} x_1^k = \phi_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ x_2^k = \phi_2(x_1^k, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ \vdots \\ x_i^k = \phi_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_{i-1}^k, x_i^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ x_n^k = \phi_n(x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n-1}^k, x_n^{(k-1)}) \end{cases} \quad (3.13)$$

Ambos os métodos podem ser aplicados na solução do sistema de equações de fluxo de potência, mas devido à maior velocidade de convergência só nos deteremos no método de Gauss-Seidel.

Remanejando os termos da equação (3.5), podemos escrever:

$$\dot{V}_i = \frac{1}{Y_{ii}} \cdot \left\{ \frac{P_i - jQ_i}{\dot{V}_i^*} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} \cdot \dot{V}_j \right\}. \quad (3.14)$$

O sistema de equações necessário é constituído da equação (3.14) repetida para todas as barras da rede, exceto para a barra oscilante, pois nessa última o módulo e a fase da tensão são conhecidos. Totalizamos assim (n-1) equações complexas.

O processo iterativo resultante da aplicação do método de Gauss-Seidel ao nosso problema é representado na equação (3.15), que se segue:

$$\dot{V}_i^k = \frac{1}{Y_{ii}} \cdot \left\{ \frac{P_i - jQ_i}{\dot{V}_i^{(k-1)*}} - \sum_{j=1}^{(i-1)} Y_{ij} \cdot \dot{V}_j^k - \sum_{j=i+1}^n Y_{ij} \cdot \dot{V}_j^{(k-1)} \right\}. \quad (3.15)$$

Ao programar o algoritmo representado pela equação (3.15), podemos conseguir uma redução considerável no tempo de processamento se, antes de entrarmos na malha iterativa, já tivermos calculado algumas constantes que aparecem no membro à direita dessa equação.

Podemos, então, definir duas matrizes cujos elementos são:

$$[A] = [A_1, A_2, \dots, A_n]^t, \quad A_i = \frac{P_i - jQ_i}{Y_{ii}}. \quad (3.16)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \cdots & B_{n \ n-1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{i,j} = \frac{Y_{ij}}{Y_{ii}}. \quad (3.17)$$

Reescrevendo a equação (3.15) com auxílio da notação introduzida, vem:

$$\dot{V}_i^k = \frac{A_i}{\dot{V}_i^{(k-1)*}} - \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij} \cdot \dot{V}_j^k - \sum_{j=i+1}^n B_{ij} \cdot \dot{V}_j^{(k-1)}.$$

Notemos que as matrizes $[A]$ e $[B]$ são matrizes constituídas por elementos complexos, sendo ainda a matriz $[A]$ um vetor coluna e a matriz $[B]$ simétrica com a diagonal principal nula. Essa última característica de $[B]$ permite uma considerável economia de memória de computador, caso o programa seja elaborado de forma a guardar apenas a parte superior da $[B]$ na forma compactada, de modo a armazenar somente os elementos não nulos do triângulo superior da matriz.

A experiência na utilização de programas digitais que trabalhavam com o método de Gauss-Seidel mostra que é conveniente, na maioria dos casos, o uso de fatores de aceleração.

No método de gauss-Seidel, os fatores de aceleração podem ser introduzidos como se segue:

- Calcula-se a diferença de tensões entre as iterações k e $(k-1)$ para uma determinada barra i :

$$\Delta \dot{V}_i = [\dot{V}_i^k - \dot{V}_i^{(k-1)}] . \quad (3.18)$$

- A seguir, redefine-se V_i^K como:

$$\dot{V}_i^k = \dot{V}_i^{(k-1)} + \alpha \cdot \Delta \dot{V}_i . \quad (3.19)$$

e é este o valor a se utilizar no restante da iteração k .

No caso prático de existirem barras PV no sistema, o algoritmo é ligeiramente modificado. Abordaremos aqui apenas o caso em que não há restrição de potência reativa para essa barras(ou seja, qualquer valor de Q_G é permitido), ficando o caso com vínculos para estudos posteriores.

O procedimento que adotamos para o caso sem vínculos é:

— Em uma iteração k qualquer, antes de calcularmos a tensão na barra p suposta PV, estimamos a sua potência reativa com valores de tensão disponíveis. Da equação (3.5) vem:

$$Q_p = -I_m \left\{ \dot{V}_p^* \sum_{j=1}^n Y_{pj} \cdot \dot{V}_j \right\} . \quad (3.20)$$

Fazendo:

$$\begin{cases} \dot{V}_p = e_p + jf_p \\ \dot{V}_j = e_j + jf_p \\ Y_{pj} = G_{pj} + jB_{pj} \end{cases} \quad (3.21)$$

e separando ainda a parte imaginária do membro direito da equação (3.20), resulta:

$$Q_P = (e_p^2 + f_p^2) \cdot B_{pp} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \{f_p \cdot (e_j \cdot G_{pj} - f_j \cdot B_{pj}) - e_p \cdot (f_j \cdot G_{pj} + e_j \cdot B_{pj})\} . \quad (3.22)$$

- Os valores e_p e f_p devem satisfazer a relação:

$$(e_p^2 + f_p^2) = V_{esp}^2 \quad (3.23)$$

onde V_{esp} = tensão especificada para a barra p .

Assim que for realizado o cálculo da equação (3.15) para a barra p , utilizando o valor estimado de Q_p dado pela equação (3.22), faz-se a seguinte modificação no valor de V_p obtido.

$$\dot{V}'_p = V_{esp} \cdot \exp(j\delta_p^k) \quad (3.24)$$

onde

$$\delta_p^k = \arctan(f_p^k / e_p^k) . \quad (3.25)$$

- Com o valor de V'_p prossegue-se na iteração k até a barra n .

3.4 Método de Newton-Raphson

Com o aumento de conexões em Extra Alta Tensão, que reflete a evolução dos sistemas modernos, o número de barras a serem representadas em um estudo de fluxo de potência cresce vertiginosamente. O método de Gauss-Seidel passa então a encontrar sérias dificuldades de convergência, pois um ajuste em uma tensão de uma certa barra durante uma iteração reflete-se de imediato apenas para as barras vizinhas, requerendo várias iterações para propagar-se ao longo do sistema.

São registrados casos, em estudos de operação, em que o método falha, não encontrando solução, para os dados de um sistema que se encontra operando normalmente.

Uma outra restrição séria do método de Gauss-Seidel é a sua dificuldade em tratar com impedâncias negativas, que se tornaram comuns devido ao difundido uso de compensação série em sistemas de Extra Alta Tensão. A presença de impedâncias negativas no sistema pode resultar em uma admitância própria muito grande em alguma(s) barra(s), tornando difícil convergência o processo iterativo (ver equação (3.15)).

Na pesquisa por novos métodos, aquele que se mostrou mais adequado e que é o empregado pela maioria dos programas existentes, é o método que agora passamos a analisar.

Ao invés de passarmos diretamente à sua aplicação ao sistema de equações de fluxo de potência, é mais instrutivo reanalisarmos o problema e resolver uma equação transcendente da forma:

$$f(X) = 0 . \quad (3.26)$$

O teorema do valor médio nos garante que se a $f(X)$ for derivável em um intervalo $|X, X_0|$, existe \bar{X} ($X \leq \bar{X} \leq X_0$) tal que:

$$\frac{f(X_0) - f(X)}{(X_0 - X)} = f'(\bar{X}) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{X=\bar{X}} . \quad (3.27)$$

Se \bar{X} for a solução que procuramos, então $f(X)$ é nula, e supondo ainda que estamos próximos à solução procurada, então \bar{X} estará próximo de X_0 , e poderemos admitir em primeira aproximação que:

$$f'(X_0) \cong f'(\bar{X}) . \quad (3.28)$$

Utilizando a equação (3.28), podemos reescrever a equação (3.27) como:

$$\frac{f(X_0)}{(X_0 - X)} \cong f'(X_0) \quad (3.29)$$

onde admitimos $f(X) = 0$ quando X tende à solução da equação. Rearranjando a equação (3.29), resulta:

$$X \cong X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} . \quad (3.30)$$

Na solução de equações de uma variável, o método de Newton-Raphson é também conhecido como “método das tangentes”.

A equação (3.30) define um processo iterativo que tem boas características de convergência (convergência quadrática) desde que se parta de uma estimativa inicial suficientemente próxima da solução. Explicitamente, o processo fica:

$$X^k = X^{(k-1)} - \frac{f(X^{(k-1)})}{f'(X^{(k-1)})} . \quad (3.31)$$

A **Tabela 2** ilustra a aplicação do método à solução da equação (3.8), já resolvida pelo método de gauss no item anterior.

A generalização do método de Newton-Raphson à solução de um sistema qualquer de equações algébricas não-lineares é feita conforme se segue:

Consideremos o sistema de equações da forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y_n \end{cases} \quad (3.32)$$

onde Y_1, Y_2, \dots, Y_n são constantes.

As funções f_1, f_2, \dots, f_n das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n podem ser expandidas em série de Taylor em torno de um ponto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ resultando:

$$\begin{cases} f_1(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) = f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \Delta x_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^0} + \\ \quad \Delta x_2 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_2^0} + \dots + \Delta x_n \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{x_n=x_n^0} + \phi_1 \\ f_2(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) = f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \Delta x_1 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^0} + \\ \quad \Delta x_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_2^0} + \dots + \Delta x_n \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \Big|_{x_n=x_n^0} + \phi_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) = f_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \Delta x_1 \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^0} + \\ \quad \Delta x_2 \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \Big|_{x_2=x_2^0} + \dots + \Delta x_n \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Big|_{x_n=x_n^0} + \phi_n \end{cases} \quad (3.33)$$

As funções $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ são funções de potências de $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, e se admitimos estar próximo de uma solução $(x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s)$, os Δx_i devem ser pequenos, e podemos então desprezar as suas potências além da primeira, o que equivale a fazer todas as ϕ_i iguais a zero.

Utilizando-se a expansão indicada em (3.33), reescrevemos o sistema de equações originais como:

$$[D] = [J] \cdot [\Delta x] \quad (3.34)$$

Tabela 2. Processo de convergência do Método de Newton-Raphson.

Iteração	$X_{(k-1)}$	$X_k = [X_{k-1} - f(X_{k-1})/f'(X_{k-1})]$
a)	1	0,8
	2	0,35342
	3	0,46455
	4	0,48111
	5	0,48140
Iteração	$X_{(k-1)}$	$X_k = [X_{k-1} - f(X_{k-1})/f'(X_{k-1})]$
b)	1	2,0
	2	2,46210
	3	2,36809
	4	2,36395
	5	2,36394

Observa-se que, dependendo do ponto de partida, obtém-se uma outra raiz da equação, ao passo que no caso anterior do Método de Gauss, como formulado, ou obtém-se a raiz inferior, ou o processo diverge.

Onde:

$$[D] = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ Y_2 - f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ \vdots \\ Y_n - f_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna da diferenças entre os valores exatos das f_i no ponto solução e o estimado no ponto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

$$[J] = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2^0} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{x_n=x_n^0} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2^0} & \cdots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{x_n=x_n^0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^0} & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_2^0} & \cdots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{x_n=x_n^0} \end{bmatrix}$$

matriz jacobiana do sistema de equações

$$[\Delta x] = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

vetor coluna dos valores de Δx_i que levam as coordenadas do ponto estimado x_i^0 a se aproximar do ponto solução x_i^s .

O processo iterativo inicia-se a partir de uma solução estimada $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, que permite o cálculo da matriz $[J]$ e do vetor $[D]$. A seguir calcula-se o vetor $[\Delta x]$ através de:

$$[\Delta x] = [J]^{-1} \cdot [D] \quad (3.35)$$

Corrige-se a solução estimada de com os valores de Δx (genericamente $x_i^1 = x_i^0 + \Delta x^0$), calcula-se o novo vetor $[D]$, a nova matriz $[J]$ e recalcula-se o vetor $[\Delta x]$. Prossegue-se iterando até que o vetor $[D]$ apresente todas as suas coordenadas inferiores a uma tolerância preestabelecida.

3.4.1 Aplicações às equações de Fluxo de Potência

O sistema de equações que necessitamos resolver se resume em:

$$\begin{cases} P_1 - jQ_1 = V_1^* \sum_{j=1}^n Y_{1j} \cdot \dot{V}_j \\ P_2 - jQ_2 = V_2^* \sum_{j=1}^n Y_{2j} \cdot \dot{V}_j \\ \vdots \\ P_n - jQ_n = V_n^* \sum_{j=1}^n Y_{nj} \cdot \dot{V}_j \end{cases} \quad (3.36)$$

Se uma barra r qualquer for a barra de referência (*Swing*), a r -ésima equação é deletada e recaímos em um sistema de $(n-1)$ equações complexas.

Identificando os termos com o sistema (3.32), vem:

$$\begin{cases} f_1(\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3, \dots, \dot{V}_n) = P_1 - jQ_1 = Y_1 \\ f_2(\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3, \dots, \dot{V}_n) = P_2 - jQ_2 = Y_2 \\ \vdots \\ f_n(\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3, \dots, \dot{V}_n) = P_n - jQ_n = Y_n \end{cases}$$

Prosseguindo de forma análoga à indicada, temos

$$[\Delta \dot{V}^k] = [J]^{-1} \cdot [\Delta P, \Delta Q]^{(k-1)} \quad (3.37)$$

onde: $[\Delta P, \Delta Q]^{(k-1)} = [D]^{(k-1)} =$ vetor constituído por termos do tipo $(P_i - P_{calc_i}^{(k-1)}) + j(Q_i - Q_{calc_i}^{(k-1)})$, e:

$P_{calc_i}^{(k-1)}$ = potência ativa injetada na barra i , calculada com valores de tensão disponível na iteração $(k-1)$

$Q_{cali}^{(k-1)}$ = potência reativa injetada na barra i , calculada com valores de tensão disponível na iteração $(k-1)$.

O sistema (3.37) é formado por equações complexas, de modo que para aplicar o algoritmo desenvolvido, devemos desmembrá-lo em equações reais. Isso pode ser feito de duas maneiras distintas, dependendo do sistema de coordenadas que se escolha ao desenvolver as equações.

A literatura a respeito do assunto registra que os algoritmos escritos em termos do método de Newton-Raphson em coordenadas cartesianas têm se mostrado mais eficientes.

Por outro lado, o desenvolvimento das equações em coordenadas polares dá origem a métodos (chamados de desacoplados) e que nos serão úteis depois na análise de contingências. Assim sendo, optamos por desenvolver neste tópico ambas as formas de ataque ao problema.

3.4.2 Método de Newton-Raphson: Coordenadas Cartesianas

Uma equação genérica do sistema de equações (3.36) pode ser escrita em coordenadas cartesianas, colocando $\dot{V}_i = e_i + jf_i eY_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$ como:

$$P_i - jQ_i = (e_i + jf_i)^* \sum_{j=1}^n (G_{ij} + jB_{ij}) \cdot (e_j + jf_j) \quad (3.38)$$

Separando as partes real e imaginárias, resulta:

$$\begin{cases} P_i = \sum_{j=1}^n e_i \cdot (G_{ij} \cdot e_j - f_j \cdot B_{ij}) + f_i \cdot (f_j \cdot G_{ij} + e_j \cdot B_{ij}) \\ Q_i = \sum_{j=1}^n f_i \cdot (G_{ij} \cdot e_j - f_j \cdot B_{ij}) + e_i \cdot (f_j \cdot G_{ij} + e_j \cdot B_{ij}) \end{cases} \quad (3.39)$$

Deletando-se a r -ésima equação (r é a barra oscilante), renumerando-se as barras restantes de 1 a $(n-1)$, desconsiderando ainda a presença de barras PV, pode-se escrever o sistema de equações (já na forma apropriada ao algoritmo de Newton-Raphson) com:

$$\begin{bmatrix} \Delta e_1 \\ \Delta e_2 \\ \vdots \\ \Delta e_{n-1} \\ \cdots \\ \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \vdots \\ \Delta f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial e_1} & \frac{\partial P_1}{\partial e_2} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial e_{n-1}} & \vdots & \frac{\partial P_1}{\partial f_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial f_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_{n-1}}{\partial e_1} & & \cdots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial e_{n-1}} & \vdots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial f_1} & \cdots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial f_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial e_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial e_2} & & \frac{\partial Q_1}{\partial e_{n-1}} & \vdots & \frac{\partial Q_1}{\partial f_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial f_{n-1}} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial e_1} & & \cdots & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial e_{n-1}} & \vdots & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial f_1} & \cdots & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial f_{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1} \\ \cdots \\ \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Reescrevendo a equação (3.40) em forma compacta, vem:

$$\begin{bmatrix} [\Delta e] \\ \cdots \\ [\Delta f] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_1] & \vdots & [J_2] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [J_3] & \vdots & [J_4] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Delta P] \\ \cdots \\ [\Delta Q] \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

As derivadas parciais necessárias para o cálculo da matriz Jacobiana são calculadas como segue:

— Submatriz $[J_1]$

- Elementos fora da diagonal:

$$\frac{\partial P_i}{\partial e_j} = (e_j \cdot G_{ij} + f_j \cdot B_{ij}) \quad (j \neq i) \quad (3.42)$$

- Elementos da diagonal:

De (3.39) a equação para P_i pode ser reescrita como

$$P_i = (e_i^2 + f_i^2) \cdot G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n e_i \cdot (G_{ij} \cdot e_j - f_j \cdot B_{ij}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_i \cdot (f_j \cdot G_{ij} + e_j \cdot B_{ij}) . \quad (3.43)$$

A diferenciação da equação (3.43) com relação à variável e_i conduz a

$$\frac{\partial P_i}{\partial e_i} = 2 \cdot e_i \cdot G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (G_{ij} \cdot e_j - f_j \cdot B_{ij}) \quad (3.44)$$

— Submatriz $[J_2]$

- Elementos de fora da diagonal:

$$\frac{\partial P_i}{\partial f_j} = (-e_i \cdot B_{ij} + f_i \cdot G_{ij}) \quad (j \neq i) \quad (3.45)$$

- Elementos da diagonal:

$$\frac{\partial P_i}{\partial f_i} = 2 \cdot f_i \cdot G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (f_j \cdot G_{ij} + e_j \cdot B_{ij}) \quad (3.46)$$

—Submatriz $[J_3]$

- Elementos de fora da diagonal:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial e_j} = (f_i \cdot G_{ij} - e_i \cdot B_{ij}) \quad \text{com } (i \neq j) \quad (3.47)$$

- Elementos da diagonal:

Da equação (3.39) a expressão de Q_i pode ser colocada sob a forma:

$$Q_i = - \left(e_i^2 + f_i^2 \right) \cdot B_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [f_i \cdot (G_{ij} \cdot e_j - f_j \cdot B_{ij}) - e_i \cdot (f_j \cdot G_{ij} + e_j \cdot B_{ij})] . \quad (3.48)$$

A diferenciação da equação (3.48) com relação à variável e_i resulta em:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial e_i} = -2 \cdot e_i \cdot B_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (e_j \cdot B_{ij} + f_j \cdot G_{ij}) \quad (3.49)$$

— Submatriz[J_4]

- Elementos de fora da diagonal:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial f_i} = (f_i \cdot B_{ij} + e_i \cdot G_{ij}) \quad \text{com } (j \neq i) \quad (3.50)$$

- Elementos da diagonal:

$$\frac{\delta Q_i}{\delta f_i} = -2 \cdot f_i \cdot B_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (G_{ij} \cdot e_j - B_{ij} \cdot f_j) \quad (3.51)$$

O processo de cálculo resume-se em :

Numa dada iteração k , calcula-se inicialmente a matriz jacobiana utilizando os valores de e_i e f_i disponíveis da iteração $(k - 1)$. Com o vetor $[D]^{(k-1)}$ já calculado e os vetores de $\Delta P_i^{(k-1)}$ e $\Delta Q_i^{(k-1)}$ da iteração anterior, resolve-se o sistema linear da equação (3.52), através de método que iremos descrever na próxima secção, e redefinem-se os valores de e_i e f_i através da relação (3.53).

$$\begin{bmatrix} [\Delta e] \\ \dots \\ [\Delta f] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_1] & \vdots & [J_2] \\ \dots & \dots & \dots \\ [J_3] & \vdots & [J_4] \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} [\Delta P] \\ \dots \\ [\Delta Q] \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\begin{cases} e_i^k = e_i^{(k-1)} + \Delta e_i^{(k-1)} \\ f_i^k = f_i^{(k-1)} + \Delta f_i^{(k-1)} \end{cases} . \quad (3.53)$$

Calcula-se, então, o vetor $[D]^k$ com os novos valores de e_i e f_i , e se suas coordenadas forem inferiores a uma dada tolerância, admite-se a convergência do processo, caso contrário deve-se iniciar uma nova iteração.

• **Barras de tensão controlada→PV**

Antes de passarmos à análise do método de Newton-Raphson em coordenadas polares, falta considerarmos a presença de barras PV em nosso sistema.

Nesse caso, especificamos a potência ativa da barra e o módulo da tensão, restando a fase da tensão da barra e a potência reativa como incógnitas.

As equações para uma barra de tensão controlada são apresentadas a seguir, notando-se que a equação para a potência ativa é a mesma que para uma barra PQ, sendo que a segunda equação reflete a restrição ao módulo da tensão de barra que deve permanecer constante.

$$\begin{cases} P_i = (e_i^2 + f_i^2) \cdot G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [e_i (G_{ij} \cdot e_j - f_j \cdot B_{ij}) + f_i \cdot (f_j \cdot G_{ij} + e_j \cdot B_{ij})] \\ V_{iesp}^2 = e_i^2 + f_i^2 \\ V_{iesp} = \text{tensão especificada para a barra geradora } i. \end{cases} \quad (3.54)$$

A primeira equação da relação (3.54) dá origem na matriz jacobiana, em termos idênticos aos já calculados, e a segunda origina os seguintes termos (submatrizes J_5 e J_6):

— Submatriz(J_5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{iesp}^2}{\partial e_i} &= 2 \cdot e_i \leftarrow \text{diagonal principal} \\ \frac{\partial V_{iesp}^2}{\partial e_j} &= 0 \quad (j \neq i) \leftarrow \text{fora da diagonal} \end{aligned} \quad (3.55)$$

— Submatriz(J_6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{iesp}^2}{\partial f_i} &= 2 \cdot f_i \leftarrow \text{diagonal principal} \\ \frac{\partial V_{iesp}^2}{\partial f_j} &= 0 \quad (j \neq i) \leftarrow \text{fora da diagonal} \end{aligned} \quad (3.56)$$

A variação de tensão ΔV_i^k , necessária à atualização do valor da tensão de barra V_i , calculada através da solução do sistema linear $[\Delta \dot{V}]^k = [J]^{-1}[D]^k$, é computada através da equação que se segue:

$$\Delta (\dot{V}_i^k)^2 = \left\{ V_{iesp}^2 - (\dot{V}_i^k)^2 \right\}$$

No caso geral, que inclui barras PV, o sistema de equações lineares que devemos resolver em cada iteração do método de Newton-Raphson fica:

$$\begin{bmatrix} [\Delta P] \\ \dots \\ [\Delta Q] \\ \dots \\ [\Delta |V|^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_1] & \vdots & [J_2] \\ \dots & \dots & \dots \\ [J_3] & \vdots & [J_4] \\ \dots & \dots & \dots \\ [J_5] & \vdots & [J_6] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Delta e] \\ \dots \\ [\Delta f] \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

A dimensão do vetor $[\Delta P]$ é $(n-1)$, caso tenhamos r barras PV, a dimensão de $[\Delta Q]$ será $(n-1-r)$, e a dimensão de $[\Delta |V|^2]$ será r .

3.4.3 Método de Newton-Raphson: Coordenadas Polares

Reescrevendo a linha genérica i do sistema (3.36), com notação $Y_{ik} = (G_{ik} + jB_{ik})$, resulta:

$$P_i - jQ_i = \sum_{k=1}^n V_i \cdot V_k \cdot e^{j(\delta_k - \delta_i)} \cdot (G_{ik} + jB_{ik}). \quad (3.58)$$

Separando as partes real e imaginária e colocando $\alpha = (\delta_k - \delta_i)$, vem:

$$\begin{cases} P_i = \sum_{k=1}^n V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \cos \alpha - B_{ik} \cdot \sin \alpha) \\ Q_i = -\sum_{k=1}^n V_i \cdot V_k \cdot (B_{ik} \cdot \cos \alpha + G_{ik} \cdot \sin \alpha) \end{cases}. \quad (3.59)$$

Desenvolvendo-se P_i e Q_i em série de Taylor e colocando-se na forma apropriada ao algoritmo de Newton-Rapson, vem:

$$\begin{bmatrix} [\Delta P] \\ \dots \\ [\Delta Q] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H] & \vdots & [N] \\ \dots & \dots & \dots \\ [J] & \vdots & [L] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Delta \delta] \\ \dots \\ \left[\frac{\Delta V}{V} \right] \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

A notação utilizada é a de Van Ness e Griffin(1961), e por conveniência os termos das submatrizes $[N]$ e $[L]$ são tais que resultam variáveis $\left(\frac{\Delta V_i}{V_i}\right)$ como incógnitas.

Explicitamente, temos:

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \delta_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial \delta_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial \delta_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \delta_n} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} V_1 \cdot \frac{\partial P_1}{\partial v_1} & \cdots & V_n \cdot \frac{\partial P_1}{\partial v_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_1 \cdot \frac{\partial P_n}{\partial v_1} & \cdots & V_n \cdot \frac{\partial P_n}{\partial v_n} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial \delta_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial \delta_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_n} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} V_1 \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial v_1} & \cdots & V_n \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial v_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ V_1 \cdot \frac{\partial Q_n}{\partial v_1} & \cdots & V_n \cdot \frac{\partial Q_n}{\partial v_n} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

As derivadas parciais necessárias ao cálculo das quatro submatrizes são obtidas como segue:

— Submatriz [H]

- Elementos de fora da diagonal

Diferenciando a primeira das (3.59) com relação a δ_k vem:

$$H_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_k} = \frac{\partial P_i}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \delta_k} = -V_i \cdot V_k \cdot (B_{ik} \cdot \cos \alpha + G_{ik} \cdot \sen \alpha) \quad (3.65)$$

pois $\frac{\partial \alpha}{\partial \delta_k} = 1$.

- Elementos da diagonal

Para estabelecermos uma fórmula para os H_{ii} , convém reescrever as equações de P_i e Q_i como se segue:

$$P_i = V_i^2 \cdot G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_i \cdot V_k (G_{ik} \cdot \cos \alpha - B_{ik} \cdot \sen \alpha) \quad (3.66)$$

$$Q_i = -V_i^2 \cdot B_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_i \cdot V_k (G_{ik} \cdot \sen \alpha + B_{ik} \cdot \cos \alpha)$$

Assim é imediato que

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = \frac{\partial P_i}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \text{sen } \alpha + B_{ik} \cdot \text{cos } \alpha) \quad (3.67)$$

pois $\frac{\partial \alpha}{\partial \delta_i} = -1$.

A equação (3.67) permite uma simplificação, bastando para isso somar e subtrair a quantidade $+V_i^2 B_{ii}$ ao seu membro direito. Daí, lembrando a segunda das (3.66), vem:

$$H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -Q_i - V_i^2 \cdot B_{ii} \quad (3.68)$$

— Submatriz [N]

- Elementos de fora da diagonal:

$$N_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial V_i} = V_i \cdot (G_{ik} \cdot \text{cos } \alpha - B_{ik} \cdot \text{sen } \alpha) \quad (3.69)$$

Ou ainda:

$$N_{ik} = V_k \cdot \frac{\partial P_i}{\partial V_k} = V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \text{cos } \alpha - B_{ik} \cdot \text{sen } \alpha) \quad (3.70)$$

- Elementos da diagonal:

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_i} = 2 \cdot V_i \cdot G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k \cdot (G_{ik} \cdot \text{cos } \alpha - B_{ik} \cdot \text{sen } \alpha) \quad (3.71)$$

A equação (3.71), obtida por diferenciação da primeira das (3.66) com relação à V_i , permite uma simplificação após a multiplicação de ambos os membros por V_i :

$$V_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial V_i} = N_{ii} = 2 \cdot V_i^2 \cdot G_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \text{cos } \alpha - B_{ik} \cdot \text{sen } \alpha) \quad (3.72)$$

Utilizando novamente a equação (3.66), vem:

$$N_{ii} = V_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial V_i} = P_i + V_i^2 \cdot G_{ii} \quad (3.73)$$

— Submatriz $[J]$

- Elementos de fora da diagonal

$$J_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_k} = \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \delta_k} = V_i \cdot V_k \cdot (B_{ik} \cdot \text{sen } \alpha - G_{ik} \cdot \text{cos } \alpha) \quad (3.74)$$

pois $\frac{\partial \alpha}{\partial \delta_k} = 1$.

- Elementos da diagonal

Diferenciando a segunda das (3.66) com relação à δ_i , lembrando ainda que $\frac{\partial \alpha}{\partial \delta_i} = -1$, vem:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = J_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \delta_i} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (B_{ik} \cdot \text{sen } \alpha - G_{ik} \cdot \text{cos } \alpha) \cdot V_i \cdot V_k . \quad (3.75)$$

A equação (3.75) pode ser simplificada, somando e subtraindo $V_i^2 G_{ii}$ ao membro à direita.

Fazendo isso e levando-se em conta a equação (3.66), temos:

$$J_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = P_i - V_i^2 \cdot G_{ii} \quad (3.76)$$

— Submatriz $[L]$

- Elementos de fora da diagonal:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_k} = -V_i \cdot (B_{ik} \cdot \text{cos } \alpha + G_{ik} \cdot \text{sen } \alpha) . \quad (3.77)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (3.77) por V_k , vem:

$$L_{ik} = V_k \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial V_k} = -V_i \cdot V_k \cdot (B_{ik} \cdot \text{cos } \alpha + G_{ik} \cdot \text{sen } \alpha) . \quad (3.78)$$

- Elementos da diagonal:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = -2 \cdot V_i \cdot B_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} -V_k \cdot (B_{ik} \cdot \cos \alpha + G_{ik} \cdot \sen \alpha) . \quad (3.79)$$

Após multiplicar ambos os membros por V_i , resulta:

$$L_{ii} = V_i \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = -2 \cdot V_i^2 \cdot B_{ii} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} V_i V_k \cdot (B_{ik} \cdot \cos \alpha + G_{ik} \cdot \sen \alpha) . \quad (3.80)$$

A equação (3.80) pode ser simplificada passando-se $V_i^2 B_{ii}$ para dentro da somatória (eliminando-se assim a restrição $k \neq i$), ficando então:

$$V_i \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = L_{ii} = Q_i - V_i^2 \cdot B_{ii} \quad (3.81)$$

o que completa nosso cálculo de derivadas parciais.

Das equações deduzidas, podem-se notar as seguintes particularidades, que permitem economia no tempo de processamento do computador:

$$\begin{cases} H_{ik} = L_{ik} \\ J_{ik} = -N_{ik} \end{cases} \quad (3.82)$$

- **Barras de tensão controlada** → PV

A consideração de barras PV é a mais simples possível no método de Newton-Raphson em coordenadas polares. Se k for uma barra de tensão controlada, basta deletar a equação correspondente a Q_k no sistema de equações, reduzindo assim a dimensão das matrizes $[J]$ e $[L]$. Exemplificando, se um sistema qualquer, conexo, tivermos n barras, sendo uma oscilante, s PV e o restante PQ, as dimensões das matrizes serão as seguintes:

$$\begin{aligned} [H] \text{ e } [N] &= n - 1 \\ [J] \text{ e } [L] &= n - 1 - s \end{aligned}$$

$$\text{Matriz jacobiana} = 2(n-1) - s$$

Em qualquer instante, durante o processo iterativo de solução de equações de fluxo de potência, podemos calcular a potência reativa associada à uma barra PV utilizando os valores complexos da tensão, ou os valores de módulo e fase separadamente, até então disponíveis. As equações opcionais são as (3.83) e (3.84) apresentadas a seguir:

$$Q_r^{(\gamma)} = -I_m \left\{ \dot{V}_r^{*(\gamma)} \sum_{k=1}^n Y_{rk} \cdot \dot{V}_k^{(\gamma)} \right\} \quad (3.83)$$

ou

$$Q_r^{(\gamma)} = -V_r^{2(\gamma)} \cdot B_{rr} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^n V_r^{(\gamma)} \cdot V_k^{(\gamma)} \cdot (B_{rk} \cdot \cos \alpha^{(\gamma)} + G_{rk} \cdot \sen \alpha^{(\gamma)}) \quad (3.84)$$

onde o índice (γ) indica o número da iteração (γ -ésima iteração).

Conforme veremos no item seguinte, esse cálculo será necessário sempre que quisermos verificar se a potência reativa de uma barra PV está entre os valores máximo e mínimo especificados.

Uma outra característica introduzida pelas barras de tensão controlada é que como nessas barras o módulo da tensão não varia, todas as derivadas parciais com relação a essa tensão são nulas. Explicitamente, se V_k é a tensão especificada para uma barra PV, então:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_i}{\partial V_k} = 0 & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial Q_i}{\partial V_k} = 0 & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.85)$$

sendo por isso mesmo a tensão V_k eliminada do vetor coluna das incógnitas.

3.4.4 Considerações Finais sobre o Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson tem excelente características de convergência, desde que adotada uma razoável estimativa inicial das variáveis.

Por esta razão, era comum nos programas digitais para cálculo de fluxo de carga que usavam o método de Newton-Raphson iniciar as iterações pelo método de Gauss-Seidel; e só depois de duas ou três iterações é que se acionava a rotina de cálculo pelo método de Newton-Raphson. Com isso procurava-se garantir um bom ponto de partida para um processo iterativo de boas características de convergências, mas muito sensível à estimativa inicial.

A experiência mostra, no entanto, que tal processo de iniciação não é tão razoável, pois no método de Gauss-Seidel, nas primeiras iterações, é comum as tensões se afastarem da solução. Além disso, não seria sensato restringir o método de Newton-Raphson porque o método de inicialização tem dificuldades em tratar com reatâncias negativas em série. No decurso dos estudos de desenvolvimento, verificou-se ainda que um ponto de partida que permite convergência rápida na maioria dos casos práticos consiste

na adoção de $|V_i|=1.0$ p.u para todas as barras PQ, e $\delta_i = 0.0$ para todas as barras da rede. Assim, os programas de computador que adotavam o método de Newton-Raphson sofreram modificações no sentido de abandonar a antiga prática de inicialização.

Até 1967, ainda pairavam dúvidas sobre qual o melhor método de cálculo para as equações de fluxo de carga, pois se por um lado o método de Newton-Raphson exigia bem menos iterações, o tempo de computador gasto em uma iteração deste método era muito maior que o exigido pelo método de Gauss-Seidel, devido à necessidade de calcular a matriz jacobiana e invertê-la a cada iteração. Além disso, o requisito de memória imposto pelo armazenamento da matriz jacobiana era bastante severo.

A partir desse ano, foi publicada uma série de artigos da BPA (Tinney e outros) relatando os progressos feitos na aplicação do Método de Newton-Raphson ao problema do cálculo de fluxo de carga.

As técnicas desenvolvidas; que compreendem armazenamento compacto da matriz Jacobiana Triangularizada, ordenação ótima das equações, triangularização de Gauss aplicada à Matriz e resolução do sistema linear por substituição de trás para frente, estabeleceram a vantagem definitiva do método de Newton-Raphson sobre o método de Gauss-Seidel, e nos dias de hoje praticamente todos os programas de cálculo de fluxo de carga em uso rotineiro utilizam o método de Newton-Raphson.

A matriz jacobiana é uma matriz bastante esparsa (isto é, com poucos elementos não-nulos) como consequência direta da esparsidade da matriz $[Y_{BUS}]$. Em grandes sistemas, a esparsidade da matriz jacobiana é da ordem de 98%, o que significa que para uma matriz 600 x 600 (sistema de 301 barras, com 300 delas tipo 1), dos 360.000 elementos, apenas 7.200 serão não-nulos.

Esses números por si só dão a entender a necessidade de explorar a esparsidade da matriz jacobiana, quer seja no sentido de reduzir os requisitos da memória do computador, quer seja para diminuir o número de operações aritméticas necessárias para a obtenção da solução (explicitamente, essa última assertiva nos diz que devemos evitar que o computador efetue operações com elementos nulos).

A ordenação ótima das equações da rede e o armazenamento compactado da matriz Jacobiana se encarregam simultaneamente de preservar memória e reduzir o número de operações aritméticas, e é graças, principalmente, a essas duas técnicas, que a potencialidade do método de Newton-Raphson alcançou sua plenitude.

Durante o processo de solução, é necessário resolver, em cada iteração, o sistema linear indicado pela equação (3.86)

$$\begin{bmatrix} [\Delta P^{(k)}] \\ \dots \\ [\Delta Q^{(k)}] \end{bmatrix} = [JB^{(k)}] \cdot \begin{bmatrix} [\Delta \delta^{(k)}] \\ \dots \\ [\Delta V/V^{(k)}] \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

onde $[JB]$ é a matriz jacobiana completa calculada para a iteração (k) .

Um método de resolver esse sistema de equações seria através da inversão

Embora existam vários níveis de ordenação, os dois mais utilizados são:

- Ordenação por contagem das ligações

Nesse tipo de ordenação, procede-se à contagem das ligações de cada barra, iniciando-se a eliminação pelas de menor número de ligações.

Esse é o processo mais simples, e a experiência mostra que os resultados têm sido satisfatórios, tanto que muitos programas utilizam apenas esse nível de ordenação.

- Ordenação por Valência

É um nível de ordenação mais sofisticado que o anterior, necessitando maior tempo de computação para a pesquisa, conforme veremos a seguir. Normalmente é utilizado como segundo nível de decisão, ou seja, para “desempatar” as barras em análise de mesma contagem de ligações.

Consiste na simulação de uma redução de Kron (que é análoga ao processo de eliminação de Gauss) para cada barra em análise e verificação do número de ligações novas criadas com a eliminação de cada uma.

Ordenam-se as barras, colocando em primeiro lugar na matriz aquelas que criarem menor número de ligações novas na eliminação.

Trata-se de um processo mais difícil de se programar, consumindo muito mais tempo que o anterior. A rigor, após processar cada linha da matriz jacobiana, as barras ainda não processadas teriam que ser novamente reordenadas, levando-se em conta as ligações criadas com a eliminação das anteriores, o que torna impraticável a adoção desse nível de ordenação como primeiro nível de decisão, devido ao tempo de computador que seria consumido no processo de ordenação.

Por uma questão de eficiência computacional, normalmente a eliminação é feita por linha, o que equivale a dizer que todos os elementos à esquerda da diagonal são eliminados e o elemento da diagonal é dividido por si mesmo (resultando diagonal unitária) antes de passar a próxima linha.

Isso traz uma série de vantagens:

— A matriz jacobiana nunca é construída explicitamente, o que exigiria memória desnecessária. Pelo contrário, a matriz é montada já na forma triangularizada, sendo que apenas os elementos não-nulos de fora da diagonal são armazenados (armazenamento compacto).

— Na montagem da matriz triangularizada, trabalha-se em uma pequena área (na realidade uma “linha de trabalho” e cada linha da matriz é submetida ao processo de triangularização nessa área, assim que acaba de ser calculada. Nota-se que apenas os elementos não-nulos da parte do jacobiano já montada na forma triangular devem ser operadas na “área compacta de trabalho”, o que se traduz em eficiência computacional, pois reduz drasticamente o número de operações.

3.5 Fluxo de Carga Desacoplado Rápido

O método desacoplado rápido que passamos a analisar é um desenvolvimento mais recente que os anteriores e deve-se a Stott e Olsac, que publicaram um artigo a respeito em 1974.

É um processo rápido e preciso, sendo muito atrativo para a análise de contingências e monitoração em tempo real de sistema de potência.

O desenvolvimento analítico é bastante simples. Partimos das equações desacopladas:

$$\begin{cases} [\Delta P] = [H] \cdot [\Delta \delta] \\ [\Delta Q] = [L] \cdot \left[\frac{\Delta V}{V} \right] \end{cases} \quad (3.89)$$

Sabemos que:

$$\begin{cases} H_{km} = L_{km} = -V_k \cdot V_m \cdot (B_{km} \cdot \cos \alpha + G_{km} \cdot \sin \alpha) \\ H_{kk} = -B_{kk} \cdot V_k^2 - Q_k \quad e \quad L_{kk} = -B_{kk} \cdot V_k^2 + Q_k \\ \alpha = \delta_k - \delta_i \end{cases} \quad (3.90)$$

Algumas aproximações fisicamente justificadas podem ser feitas nas equações (3.90). Em Sistemas de Potência reais as seguintes hipóteses geralmente se verificam:

$$\begin{cases} \cos \alpha \cong 1, 0 \\ G_{km} \cdot \sin \alpha \ll B_{km} \\ Q_k \ll B_{kk} \cdot V_k^2 \end{cases} \quad (3.91)$$

A consideração da equação (3.91) torna muito simples o sistema de equações de fluxo de carga

$$\begin{cases} [\Delta P] = [BP] \cdot [\Delta \delta] \\ [\Delta Q] = [BQ] \cdot \left[\frac{\Delta V}{V} \right] \end{cases} \quad (3.92)$$

Os elementos das matrizes $[BP]$ e $[BQ]$ podem ser descritos como segue:

$$\begin{cases} BP_{ii} = V_i^2 \cdot B'_{ii} \\ BP_{ij} = V_i \cdot B'_{ij} \cdot V_j \\ BQ_{ii} = V_i^2 \cdot B''_{ii} \\ BQ_{ij} = V_i \cdot B''_{ij} \cdot V_j \end{cases} \quad (3.93)$$

Os elementos B' e B'' são obtidos do negativo da matriz de susceptâncias nodais com as seguintes hipóteses adicionais:

No cálculo dos elementos B' são omitidos os elementos da rede que predominantemente afetam o fluxo de potência reativa, como por exemplo reatâncias equivalentes em derivação provenientes da representação de transformadores fora do *Tap* nominal. Além disso, omite-se nesse cálculo a parte real dos elementos do sistema, o que torna a matriz $[BP]$ idêntica ao negativo da matriz de susceptâncias que utilizaremos no cálculo do fluxo de carga em corrente contínua, um dos métodos que indicados para a análise de contingências.

No cálculo dos elementos B'' são omitidos, se houver, os efeitos dos transformadores de rotação de fase que afetam praticamente só o fluxo ativo na rede.

Em termos das matrizes $[BP]$ e $[BQ]$ que acabamos de definir, a equação (3.92) pode ser reescrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_n \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_m \end{array} \right] \end{array} \right. = \left[\begin{array}{cccc} V_1^2 \cdot B'_{11} & V_1 \cdot B'_{12} \cdot V_2 & \cdots & \\ V_2 \cdot B'_{21} \cdot V_1 & V_2^2 \cdot B'_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & & V_n^2 \cdot B'_{nn} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta \delta_1 \\ \Delta \delta_2 \\ \vdots \\ \Delta \delta_n \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} V_1^2 \cdot B''_{11} & V_1 \cdot B''_{12} \cdot V_2 & \cdots & V_1 \cdot B'_{1m} \cdot V_m \\ V_2 \cdot B''_{21} \cdot V_1 & V_2^2 \cdot B''_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots V_m^2 \cdot B''_{mm} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta V_1/V_1 \\ \Delta V_2/V_2 \\ \vdots \\ \Delta V_m/V_m \end{array} \right] \quad (3.94)$$

onde (m) é o número de barras tipo (1) representadas no sistema, e ($n + 1$) é o número total de barras.

Dividindo-se cada linha (i) da equação (3.94) por V_i e removendo-se a influência dos fluxos reativos no cálculo de $\Delta\delta$, o que é conseguido assumindo-se todas as tensões V_j que resultaram na matriz $[BP/V]$ iguais a 1.0 p.u e assumindo ainda V_j/V_i igual à unidade em $[BQ/V]$ as equações finais desacopladas tornam-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\Delta P/V] = [B'] \cdot [\Delta\delta] \\ [\Delta Q/V] = [B''] \cdot [\Delta V] \end{array} \right. \quad (3.95)$$

Notemos que os valores das tensões de barra afetam o comportamento das incógnitas, mas não o acoplamento, o qual é função unicamente das matrizes $[B']$ e $[B'']$.

As matrizes $[B']$ e $[B'']$ são reais, esparsas e com estrutura das matrizes $[H]$ e $[L]$ respectivamente.

Devido ao fato de ambas contêm apenas susceptâncias de rede como elemento, são constantes e precisam ser triangularizadas apenas uma vez no processo de solução.

A matriz $[B'']$ é sempre simétrica, e se caso não houver transformadores de rotação de fase na rede $[B']$, também será simétrica, reduzindo os requisitos de memória no armazenamento.

Soluções repetitivas muito rápidas podem ser obtidas para $[\Delta\delta]$ e $[\Delta V]$ usando as tabelas de fatores de $[B']$ e $[B'']$ e substituição de trás para frente.

Essas soluções podem ser iteradas entre si (não esquecer que os módulos de tensão são necessários no cálculo $\Delta P/V$ e portanto há vínculos entre os dois sistemas de equações (3.94) de forma conveniente até a obtenção de uma convergência global para o processo.

Na prática, a estratégia de iterações que produziu os melhores resultados é aquela que consiste na solução alternada da equação (3.94), sempre usando os valores mais recentes de tensão. Cada ciclo de iteração compreende uma solução para $[\Delta\delta]$ que atualiza $[\delta]$ e uma solução para $[\Delta V]$ para atualização de $[V]$.

Como observação final sobre o método, destaque-se que pode ser utilizado no cálculo de fluxo de carga do caso base, em substituição ao método de Newton-Raphson. Adotando-se uma tolerância conveniente para o estabelecimento da convergência, resultados tão precisos quanto aqueles do método de Newton-Raphson podem ser obtidos. A diferença seria no número de iterações necessárias, muito maior no caso do método desacoplado rápido. No entanto, como não há necessidade de cálculo da jacobiana a cada iteração, a experiência tem mostrado que as soluções pelo método em tela se processam acentuadamente mais rápidas e há tendências da substituição do método de Newton-Raphson pelo desacoplado rápido nos programas em operação.

Capítulo 4

CURTO-CIRCUITO[11]

4.1 Equações Básicas de Cálculo de Curto-Circuito

Nas redes trifásicas, podem-se distinguir os seguintes casos de defeitos, dependendo do número de condutores que entram em contato entre si ou com a terra:

1. Curto-Circuito Trifásico
2. Curto-Circuito Bifásico sem contato com a terra
3. Curto-Circuito Bifásico com contato com a terra
4. Curto-Circuito Monofásico à terra (curto à terra)

Dos casos mencionados, o curto-circuito trifásico comporta-se como uma carga simétrica sobre a rede trifásica. Nesta situação, todos os três condutores são solicitados de modo idêntico e conduzem o mesmo valor eficaz de corrente de curto-circuito. Conseqüentemente, como em qualquer caso de carga simétrica, o cálculo precisa apenas ser feito para um condutor. Ao contrário, em todos os demais casos de curto-circuito, originam-se cargas assimétricas, havendo necessidade de efetuar cálculos individuais capazes de definir as assimetrias que aparecem. Tal processo de cálculo se utiliza das componentes simétricas para determinar as correntes de curto-circuito. Em nossos estudos, supõe-se que o leitor tenha conhecimento do assunto, por isso não se faz necessário uma revisão.

Nos estudos de aterramento de Sistemas Elétricos, leva-se em conta as correntes de defeitos que circulam pela terra, por esta razão, são calculados apenas os curto-circuitos que envolvem a terra. Nesses estudos, as impedâncias de sequência são de fundamental importância.

4.2 Impedâncias de Sequência Positiva, Negativa e Zero

As impedâncias efetivas para cada componente de corrente são designadas por positiva, negativa e zero, em correspondência ao sistema a que pertence. A **Figura 4.1**, apresenta o circuito representativo de cada sistema, para a determinação dos valores de impedância. Para os sistemas positivo e negativo, são aplicadas tensões trifásicas alternadas simétricas, de acordo com sua natureza, enquanto o sistema zero possui uma fonte de tensão monofásica.

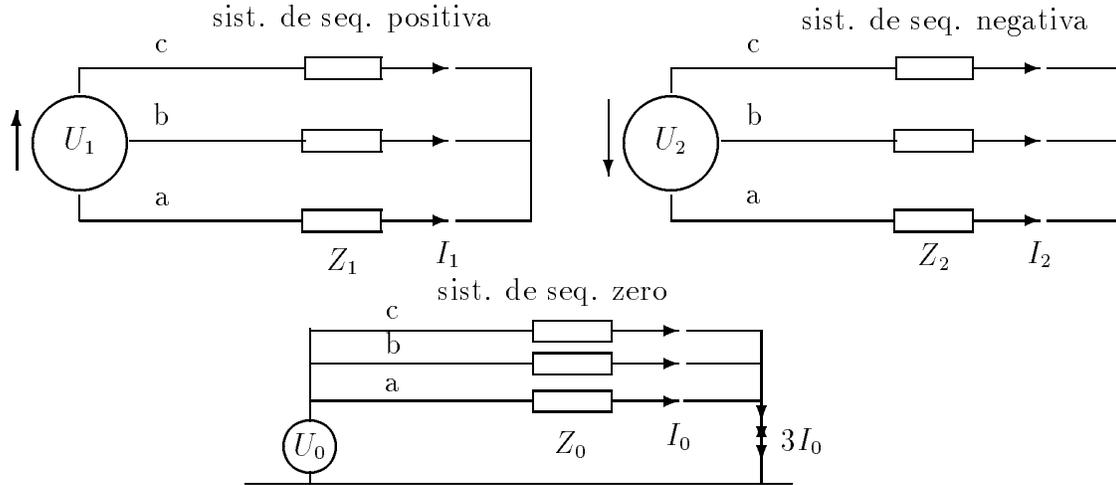


Figura 4.1: Circuitos representativos dos 3 sistemas de componentes

4.2.1 Impedância de sequência positiva (Z_1)

A impedância de sequência positiva, ou simplesmente impedância positiva Z_1 , é a impedância do sistema no caso de carga simétrica. Ela é, portanto, igual a impedância por fase dos condutores, impedância de curto-circuito dos transformadores e reatâncias, e a impedância efetiva do gerador no instante de um curto-circuito.

4.2.2 Impedância de sequência negativa (Z_2)

A impedância de sequência negativa, ou simplesmente impedância negativa Z_2 dos condutores, transformadores e reatâncias, é igual a impedância positiva, visto que a resistência que esses oferecem à passagem da corrente não varia ao se inverter

a sequência de fase. Entretanto, nos geradores, a impedância negativa é aquela que a máquina apresenta quando, estando a velocidade síncrona, lhe é ligado um sistema de tensão em oposição. Este sistema negativo, ligado ao estator, tem em relação ao motor, o dobro da velocidade relativa, ao passo que o sistema positivo apresenta uma velocidade relativa igual a zero. A impedância negativa nos transformadores tem praticamente a mesma grandeza que a impedância positiva eficaz no instante de curto-circuito. Em geradores de polos salientes, dotados de bobinas de amortecimento, o valor da impedância negativa é aproximadamente 20% superior à reatância inicial e, 50% acima, no caso da inexistência destes enrolamentos. A impedância de máquinas assíncronas é, com boa aproximação, igual a reatância de curto-circuito, ou seja, a sua reatância com velocidade nula.

4.2.3 Impedância de sequência zero (Z_0)

A impedância de sequência zero, ou simplesmente, impedância zero Z_0 , pode ser determinada por medição ou por cálculo, efetuando-se a ligação paralela das três fases do sistema trifásico, ligando-se a este sistema uma tensão alternada monofásica. Nos geradores, a impedância Z_0 é geralmente bem menor que a reatância inicial, apresentando um valor da ordem de um terço a um sexto do valor da reatância. Nos transformadores, a grandeza da impedância Z_0 depende do grupo de ligação a que o transformador pertence. Quando ligados em estrela-triângulo, Z_0 é da ordem de 0,8 a 1,0 do valor da impedância positiva Z_1 . Já no caso de ligação estrela-ziguezague Z_0 é bastante pequena, sendo da ordem de 0,1 vezes a impedância positiva Z_1 . Nos transformadores com ligação estrela-estrela, com enrolamento delta de compensação, projetados para um terço da potência nominal passante, Z_0 pode chegar a ser 2,4 vezes maior que a impedância positiva Z_1 , tendo por referência a potência nominal. Transformadores com núcleo de três colunas, com ligação estrela-estrela, sem enrolamento de compensação, tem um valor Z_0 de cinco a dez vezes superior a Z_1 . Devido ao intenso fluxo de dispersão que envolve também as paredes do tanque, origina-se um aquecimento por perdas joule. Por isto são necessárias precauções especiais em relação ao aterramento do sistema. Em transformadores com núcleo encouraçado, bem como no caso de bancos trifásicos de três transformadores monofásicos ligados em estrela-estrela, Z_0 tem valor aproximadamente igual à impedância em vazio, devido às condições particulares do circuito magnético. Por esta razão, não são próprios para aterramento de sistemas.

A impedância zero Z_0 depende, acentuadamente, do tipo de instalação (linhas aéreas ou cabos subterrâneos) e da condutibilidade elétrica do solo. A impedância que oferece um linha aérea as três correntes, iguais entre si em grandeza e fase, resulta, no caso das redes aéreas, do conjunto das três fases e do retorno pela terra. Porém, no caso dos cabos trifásicos subterrâneos, das três fases, das camadas metálicas externas (chumbo) e da terra. A reatância zero das linhas aéreas varia com secção transversal do condutor e com o tipo de terra. Na resistência ômica do sistema zero, incluem-se as resistências ômicas do condutor e do retorno pela terra.

Em redes aéreas, com condutor de retorno ou terra, parte da corrente do sistema zero, também percorre este condutor. O uso de condutores de terra de aço praticamente não reduz a reatância zero. Se, entretanto, o condutor de terra for feito de um bom material condutor, como liga de aço-alumínio ou cobre, a redução já é sensível.

A impedância Z_0 dos cabos subterrâneos difere em grau muito maior de sua impedância positiva do que nas linhas aéreas, devido aos diferentes tipos construtivos. Cabos blindados externamente têm uma reatância zero mais elevada que cabos trifásicos com três camadas blindadas e estes, por sua vez, mais elevada do que cabos singelos. A resistência ômica do sistema zero se compõe da resistência do condutor e também das camadas condutoras externas, estas últimas, geralmente dando origem a uma sensível elevação, dependendo do material usado.

4.3 Equações Básicas de Cálculo de Curto-Circuito

A análise dos diversos casos de curto-circuito será feita, tomando como exemplo o diagrama de ligação da **Figura 4.2**, com gerador, transformador e rede, como parte de um sistema completo.

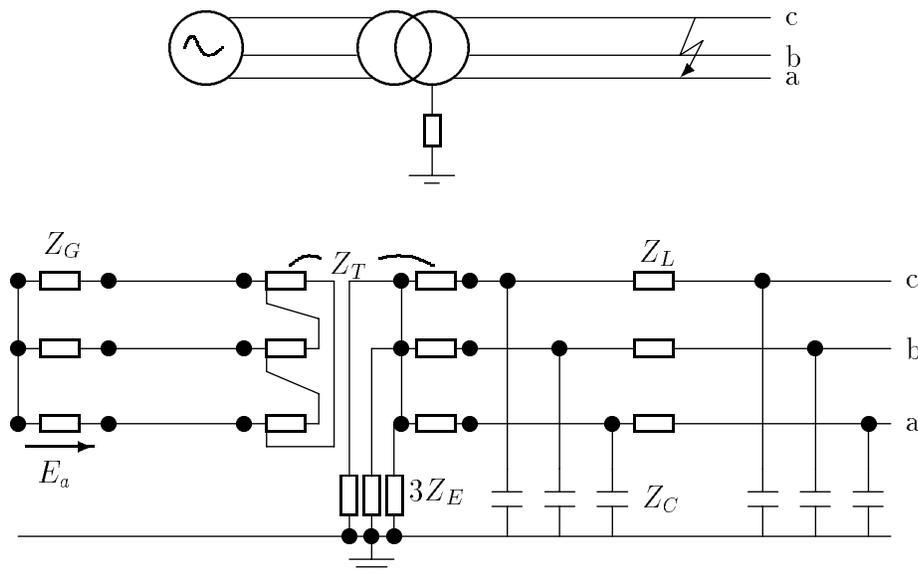


Figura 4.2: Representação e circuito equivalente de uma rede elétrica trifásica.

A rede é suposta aberta na sua extremidade. Apesar disso, as relações matemáticas da análise são válidas em qualquer caso, incluindo, portanto, também redes alimentadas.

As grandezas, indicadas no circuito equivalente, representam:

- Z_G impedância de curto-circuito do gerador por fase
- Z_T impedância de curto-circuito do transformador por fase
- Z_L impedância da linha por fase
- Z_C impedância de fuga do condutor para a terra
- Z_E impedância de aterramento do ponto neutro do sistema

A impedância Z_E de aterramento é comum às três fases, e aparecerá, portanto, no diagrama equivalente, aplicada a uma fase como o triplo do seu valor individual. As grandezas das impedâncias, representadas no esquema, são função das condições específicas de transmissão da rede, exceção feita a Z_E , cujo valor é escolhido de acordo com as condições que se exigem dessa rede perante o curto-circuito. Para $Z_E \rightarrow \infty$, teremos uma rede com neutro isolado ou rede não aterrada. Ao contrário, para $Z_E \rightarrow 0$, teremos uma rede com neutro rigidamente aterrado.

Normalmente, não é necessário levar em consideração a carga da rede (impedâncias dos consumidores e capacitâncias de serviço) nos cálculos de curto-circuito. Eventualmente, estas impedâncias podem ser introduzidas individualmente em cada sistema.

4.4 Curto-Circuito Trifásico

O curto-circuito trifásico é um caso de solicitação simétrica. As tensões no local do curto-circuito de todas as três fases são iguais a zero.

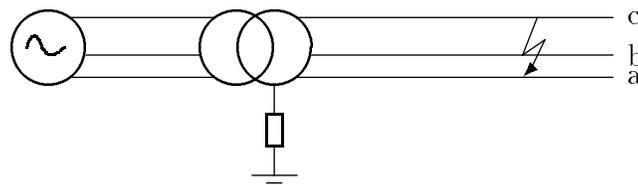


Figura 4.3: Curto-circuito trifásico.

Valem assim as relações:

$$V_a = V_b = V_c = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} 3V_1 &= V_a + a \cdot V_b + a^2 \cdot V_c = 0 \\ 3V_2 &= V_a + a^2 \cdot V_b + a \cdot V_c = 0 \\ 3V_0 &= V_a + V_b + V_c = 0 \end{aligned}$$

resulta então

$$V_1 = V_2 = V_0.$$

Das equações

$$V_1 = E_a - Z_1 \cdot I_1 = 0; \quad V_2 = -Z_2 \cdot I_2 = 0; \quad V_0 = -Z_0 \cdot I_0 = 0$$

e

$$I_a = I_1; \quad I_b = a^2 \cdot I_1; \quad I_c = a \cdot I_1$$

resulta

$$I_a = \frac{E_a}{Z_1}; \quad I_b = a^2 \cdot \frac{E_a}{Z_1}; \quad I_c = a \cdot \frac{E_a}{Z_1}.$$

Todas as três correntes de fase têm o mesmo valor absoluto. Daí resulta que a corrente do curto-circuito trifásico é:

$$I_{k(3)} = \frac{E_a}{Z_1}$$

A **Figura** 4.4 mostra o circuito de corrente monofásico que satisfaz a esta condição.

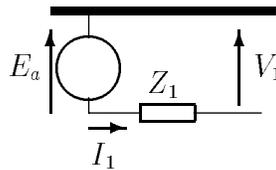


Figura 4.4: Circuito equivalente monofásico para o caso de um curto-circuito trifásico

A impedância de aterramento Z_E permanece inalterada, visto que $V_0=0$, quando ocorre o curto-circuito. Mesmo o contato do ponto de curto-circuito trifásico com a terra não altera as condições estabelecidas.

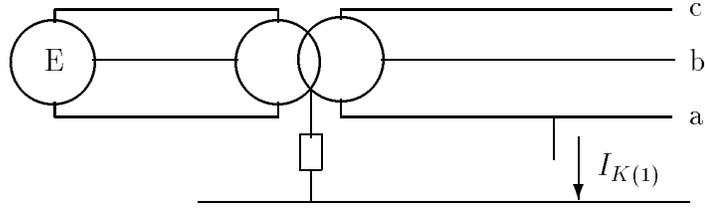


Figura 4.5: Curto-Circuito fase-terra

4.5 Curto-Circuito Monofásico à Terra

A relação entre componentes de tensão de fase e componentes de tensão de sequência é dada por:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

E a relação inversa

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Igualmente para a corrente

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

E a relação inversa

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Para um curto-circuito fase-terra, são válidas as condições:

$$V_a = 0; \quad I_b = 0; \quad I_c = 0 \quad (4.5)$$

Utilizando as relações da equação (4.5) nas equações (4.4) e (4.1), teremos:

$$3I_0 = I_a \quad 3I_1 = I_a \quad 3I_2 = I_a$$

e

$$V_0 + V_1 + V_2 = 0 \quad \text{ou} \quad V_1 = -V_0 - V_2.$$

Resulta que:

$$I_0 = I_1 = I_2 \quad \text{e} \quad V_1 = -V_0 - V_2.$$

Sabe-se que:

$$V_0 = -Z_0 \cdot I_0 \quad V_1 = E_a - Z_1 \cdot I_1 \quad V_2 = -Z_2 \cdot I_2.$$

Logo,

$$E_a = (Z_0 + Z_1 + Z_2) \cdot I_0$$

ou

$$I_0 = \frac{E_a}{Z_1 + Z_2 + Z_0} = I_1 = I_2.$$

Dessa forma, a corrente de curto-circuito fase-terra $I_{K(1)} = I_a$ será:

$$I_{K(1)} = I_a = 3 \cdot I_0 = \frac{3 \cdot E_a}{Z_1 + Z_2 + Z_0}.$$

A tensão no condutor sem defeito pode ser calculada pela equação (4.1), usando as seguintes relações:

$$V_b = V_0 + a^2 \cdot V_1 + a \cdot V_2 = -Z_0 \cdot I_0 + a^2 \cdot (E_a - Z_1 \cdot I_1) - a \cdot Z_2 \cdot I_2$$

$$V_c = V_0 + a \cdot V_1 + a^2 \cdot V_2 = -Z_0 \cdot I_0 + a \cdot (E_a - Z_1 \cdot I_1) - a^2 \cdot Z_2 \cdot I_2.$$

Como

$$I_0 = \frac{E_a}{Z_1 + Z_2 + Z_0} = I_1 = I_2.$$

Tem-se:

$$V_b = E_a \cdot \left(a^2 - \frac{Z_0 + a^2 \cdot Z_1 + a \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_0} \right)$$

$$V_c = E_a \cdot \left(a - \frac{Z_0 + a \cdot Z_1 + a^2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_0} \right)$$

$$V_0 = E_a \cdot \left(-\frac{Z_0}{Z_1 + Z_2 + Z_0} \right)$$

As condições mencionadas, $I_0 = I_1 = I_2$ e $V_1 = -V_0 - V_2$, são atendidas pelo diagrama monofásico da **Figura 4.6**

Em função das igualdades $I_0 = I_1 = I_2$, os sistemas de sequência e zero são ligados de tal modo que a corrente circula por eles no mesmo sentido do sistema de sequência positiva. O gráfico da **Figura 4.7**, permite uma análise segura das influências que as impedâncias exercem sobre a grandeza da corrente de curto-circuito monofásico. Nesse gráfico, a corrente de curto-circuito à terra é representada em função da relação Z_0 e Z_1 . Para as impedâncias positiva e negativa foi usada a relação $Z_1/Z_2=1$, que é o caso mais frequente. Como grandeza de referência, foi escolhida a corrente de curto-circuito trifásico $I_{K(3)} = E_a/Z_1$, para possibilitar uma comparação direta dos valores de

correntes que se apresentam em ambos os casos. As curvas mostram que as correntes de curto-circuito se elevam acentuadamente, quando a defasagem angular entre Z_1 e Z_0 é grande. Assim, por exemplo em um caso teórico $\gamma_1 - \gamma_0 = 180^\circ$ e $Z_1/Z_0=2$, obtém-se o valor infinito. Se $\gamma_1 - \gamma_0 > 90^\circ$, então a impedância Z_0 é capacitiva, embora na prática isto seja apenas possível em redes com neutro isolado.

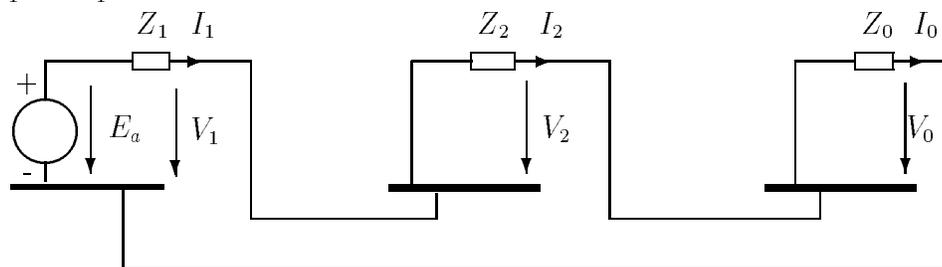


Figura 4.6: Diagrama de sequência

Nos gráficos das **Figuras 4.8 e 4.9**, são representados os valores de tensão à frequência de serviço de um condutor sem defeito contra a terra, em função da relação Z_0/Z_1 e da defasagem angular $\gamma_1 - \gamma_0$. Para $Z_0=0$, obtém-se em ambos os condutores a mesma tensão de $0,5 \cdot \sqrt{3} \cdot E_a$. Quando $Z_0 \rightarrow \infty$, as curvas tendem ao valor $\sqrt{3} \cdot E_a$, ou seja, a tensão em relação à terra dos condutores sem defeito equivale, neste caso, à tensão composta.

Tensões especialmente elevadas, aparecem quando a defasagem angular entre as impedâncias ultrapassa o valor de 90° . O caso teórico $\gamma_1 - \gamma_0 = 180^\circ$, com $Z_0/Z_1=2$, obtém-se o valor infinito conforme já mencionamos, porém, o caso $\gamma_1 - \gamma_0 > 90^\circ$, praticamente só é possível, quando a rede tem o ponto neutro da ligação estrela isolado. Se a diferença angular for negativa, então as tensões de fase se intercambiam, ou seja, o valor do condutor b se aplica em c e vice-versa.

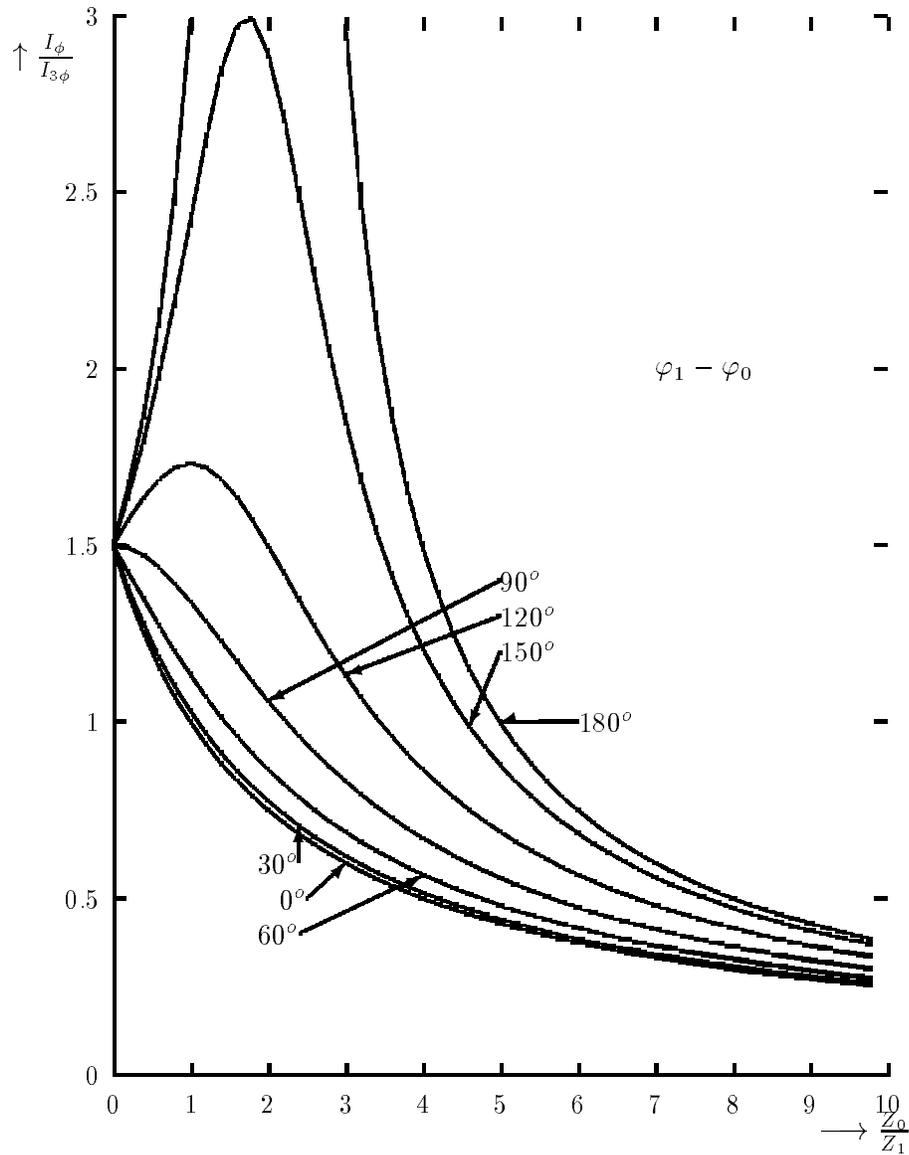


Figura 4.7: Gráfico da corrente de curto-circuito monofásico em relação à corrente de curto-circuito trifásico.

$E_a \rightarrow$ Força Eletromotriz

$Z_0 \rightarrow$ Impedância do sistema zero

$Z_1 \rightarrow$ Impedância do sistema positivo

$Z_2 \rightarrow$ Impedância do sistema negativo

$\gamma_1 - \gamma_0 \rightarrow$ Defasagem angular entre as impedâncias Z_1 e Z_0

$I_a = I_{K(1)} = \frac{3E_a}{Z_1 + Z_2 + Z_0}$, $Z_1 = Z_2$

$I_{K(3)} = \frac{E_a}{Z_1}$

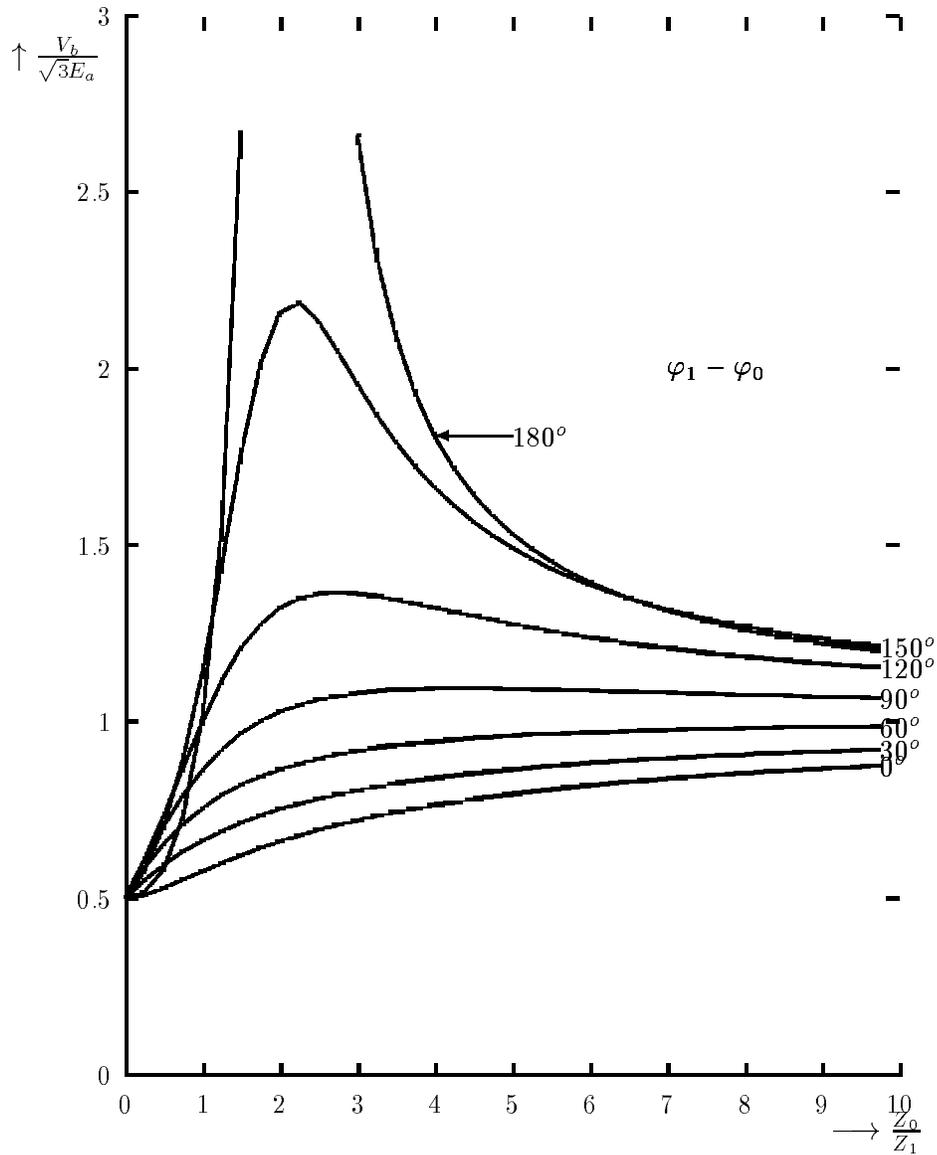


Figura 4.8: Curto-circuito monofásico à terra. Tensão à frequência de serviço do condutor b em relação à terra

$E_a \rightarrow$ Força Eletromotriz

$Z_0 \rightarrow$ Impedância do sistema zero

$Z_1 \rightarrow$ Impedância do sistema positivo

$Z_2 \rightarrow$ Impedância do sistema negativo

$\gamma_1 - \gamma_0 \rightarrow$ Defasagem angular entre as impedâncias Z_1 e Z_0

$$V_b = E_a \cdot \left(a^2 - \frac{Z_0 + a^2 \cdot Z_1 + a \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_0} \right), \quad Z_1 = Z_2$$

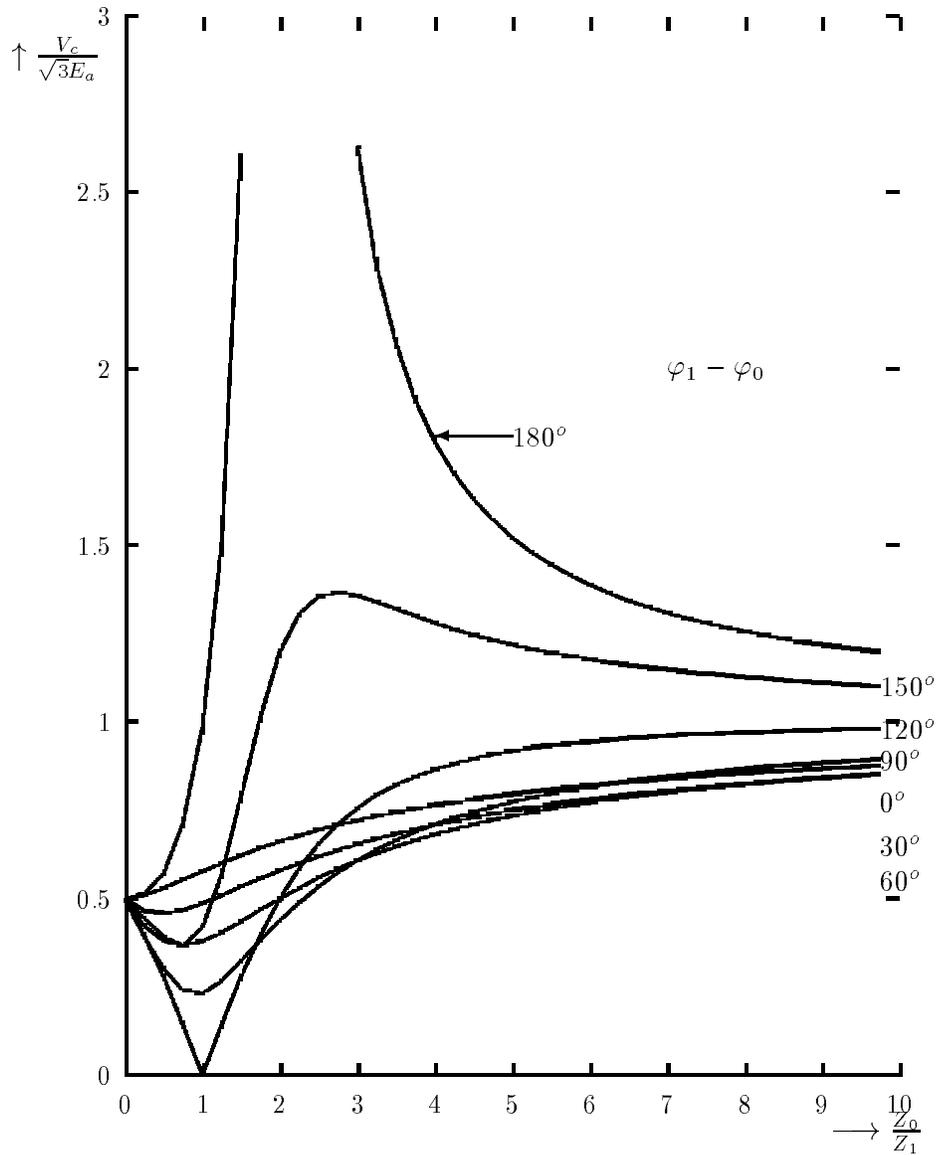


Figura 4.9: Curto-circuito monofásico à terra. Tensão à frequência de serviço do condutor c em relação à terra

$E_a \rightarrow$ Força Eletromotriz

$Z_0 \rightarrow$ Impedância do sistema zero

$Z_1 \rightarrow$ Impedância do sistema positivo

$Z_2 \rightarrow$ Impedância do sistema negativo

$\gamma_1 - \gamma_0 \rightarrow$ Defasagem angular entre as impedâncias Z_1 e Z_0

$$V_c = E_a \cdot \left(a - \frac{Z_0 + a \cdot Z_1 + a^2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_0} \right), \quad Z_1 = Z_2$$

4.6 Curto-Circuito Bifásico sem Contato com a Terra

Neste caso, valem as equações:

$$V_b = V_c; \quad I_a = 0; \quad I_b = -I_c .$$

Com isto, têm-se

$$\begin{aligned} V_c &= a \cdot V_1 + a^2 \cdot V_2 + V_0; \quad I_a = I_1 + I_2 + I_0 = 0 \\ V_b &= a^2 \cdot V_1 + a \cdot V_2 + V_0; \quad 3I_0 = I_a + I_b + I_c = 0 . \end{aligned}$$

As 2 equações V_c e V_b são subtrativas, obtendo-se:

$$V_1 = V_2$$

como

$$I_0 = -\frac{V_0}{Z_0} = 0$$

têm-se

$$V_0 = 0 \text{ e } I_1 = -I_2$$

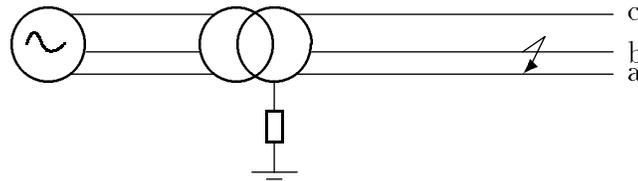


Figura 4.10: Curto-circuito bifásico sem contato com a terra

A intensidade da corrente de curto-circuito nos condutores com defeito resulta das seguintes equações: como

$$V_1 = V_2 \text{ e } I_1 = -I_2$$

tem-se

$$E_a - Z_1 \cdot I_1 = -Z_2 \cdot (-I_1)$$

e

$$E_a = Z_1 \cdot I_1 + Z_2 \cdot I_1 .$$

Disto resulta

$$I_1 = -I_2 = \frac{E_a}{Z_1 + Z_2} .$$

Por outro lado

$$I_b = a^2 \cdot I_1 + a \cdot I_2 \quad e \quad I_c = a \cdot I_1 + a^2 \cdot I_2$$

de onde

$$I_b = \frac{(a^2 - a) \cdot E_a}{Z_1 + Z_2} = \frac{-j \cdot \sqrt{3} \cdot E_a}{Z_1 + Z_2}$$

e

$$I_c = \frac{(a - a^2) \cdot E_a}{Z_1 + Z_2} = \frac{j \cdot \sqrt{3} \cdot E_a}{Z_1 + Z_2} .$$

Ambas as correntes são de mesma grandeza de modo que, no caso de curto-circuito bifásico, é válida a equação:

$$I_{k(2)} = \frac{\sqrt{3} \cdot E_a}{Z_1 + Z_2} .$$

Para o caso mais frequente ocorre, com $Z_1 = Z_2$, tem-se então:

$$I_{k(2)} = \frac{\sqrt{3} \cdot E_a}{2 \cdot Z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot I_{k(3)}$$

A tensão no condutor não afetado pode ser calculada como segue:

$$I_1 = -I_2 = \frac{E_a}{Z_1 + Z_2}$$

sendo

$$V_1 = E_a - Z_1 \cdot \frac{E_a}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot E_a$$

teremos

$$V_a = V_1 + V_2 = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot E_a .$$

No caso de $Z_1 = Z_2$, resulta que $V_a = E_a$. O circuito monofásico que atende às condições $V_1 = V_2$ e $I_1 = -I_2$ é representado na **Figura4.11**.

A impedância de aterramento Z_E não participa do curto-circuito, visto que $V_0 = 0$.

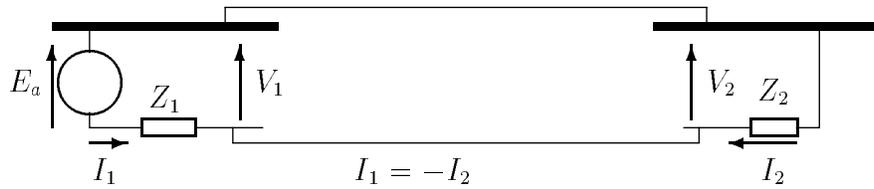


Figura 4.11: Diagrama equivalente para o cálculo de um curto-circuito bifásico sem contato com a terra

4.7 Curto-Circuito Bifásico em Contato com a Terra

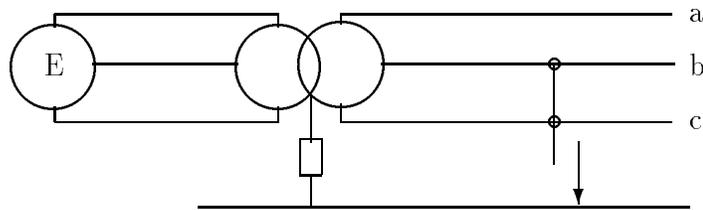


Figura 4.12: Curto-circuito bifásico à terra

Para este caso, são válidas as seguintes igualdades:

$$V_b = V_c = 0; I_a = 0$$

Sabe-se que

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$3V_0 = V_a$$

$$3V_1 = V_a$$

$$3V_2 = V_a$$

e

$$I_a = 0 = I_0 + I_1 + I_2$$

Dessa forma

$$V_0 = V_1 = V_2$$

e

$$I_1 = -I_0 - I_2$$

A corrente de curto-circuito nos condutores defeituosos pode ser calculada por meio das seguintes relações:

$$V_0 = V_1 = V_2, \quad I_0 + I_1 + I_2 = 0$$

e

$$I_0 = -V_0/Z_0, \quad I_2 = -V_2/Z_2 \quad \text{e} \quad I_1 = (E_a - V_1)/Z_1$$

logo

$$-\frac{V_1}{Z_0} + \frac{E_a - V_1}{Z_1} - \frac{V_1}{Z_2} = I_a = 0$$

Assim

$$V_1 = \frac{E_a \cdot Z_0 \cdot Z_2}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}$$

Substituindo o valor de V_1 e efetuando os produtos, têm-se:

$$I_0 = -\frac{E_a \cdot Z_2}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}$$

$$I_1 = \frac{E_a \cdot (Z_0 + Z_2)}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}$$

e

$$I_2 = -\frac{E_a \cdot Z_0}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}$$

sendo

$$I_b = I_0 + a^2 \cdot I_1 + a \cdot I_2$$

e

$$I_c = I_0 + a \cdot I_1 + a^2 \cdot I_2$$

têm-se

$$I_b = -\frac{j\sqrt{3} \cdot E_a \cdot [(1 + a^2) \cdot Z_2 + Z_0]}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}$$

e

$$I_c = \frac{j\sqrt{3} \cdot E_a \cdot [(1 + a) \cdot Z_2 + Z_0]}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}$$

A tensão entre o condutor sem defeito e a terra pode ser determinada usando as seguintes equações:

$$V_0 = V_1 = V_2$$

e

$$V_1 = \frac{E_a \cdot Z_0 \cdot Z_2}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}$$

Resultando

$$V_a = \frac{3E_a \cdot Z_0 \cdot Z_2}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}$$

Para o caso muito freqüente de $Z_1 = Z_2$, resulta ainda

$$V_a = \frac{3E_a}{2 + Z_1/Z_0}$$

As condições mencionadas

$$V_0 = V_1 = V_2$$

e

$$I_1 = -I_0 - I_2,$$

são atendidas pelo diagrama monofásico da **Figura 4.13**.

Para a determinação de I_b ou I_c por medição, devemos multiplicar os valores medidos de I_1 e I_2 por a e a^2 respectivamente, de acordo com as relações indicadas, acrescentando-lhes I_0 quando circular. Pela terra circular a corrente $3I_0$.

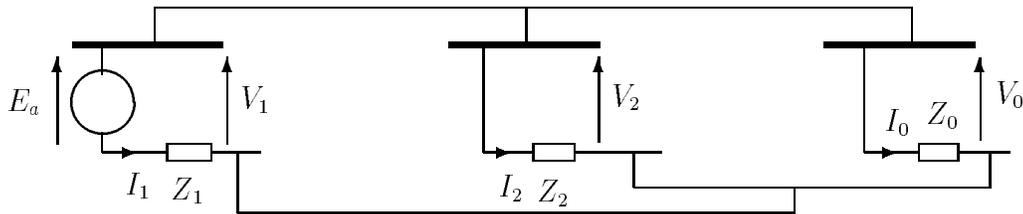


Figura 4.13: Diagrama de sequência de um curto-circuito bifásico à terra

As curvas dos gráficos das **Figuras 4.14, 4.15 e 4.16** permitem uma boa análise da corrente de curto-circuito que resulta de um defeito bifásico com a terra. Nesses gráficos são indicadas as correntes de curto-circuito que circulam pelos condutores defeituosos e pela terra, em função da relação Z_0/Z_1 , e em função do ângulo de defasagem entre as impedâncias Z_1 e Z_0 . Para a impedância positiva e negativa foi tomada como base a relação mais freqüente, que é $Z_1/Z_2 = 1$. Por outro lado, as correntes estão referidas à corrente de curto-circuito trifásico $I_{K(3)} = E_a/Z_1$, de modo que a representação permite uma comparação direta entre os valores de corrente que aparecem em ambos os casos.

Os gráficos das **Figuras 4.14 e 4.15** mostram que as grandezas das correntes de curto-circuito variam acentuadamente, quando Z_0/Z_1 é reduzido e o ângulo de defasagem entre as impedâncias Z_1 e Z_0 é grande. Do caso teórico de $\gamma_1 - \gamma_0 = 180^\circ$, com $Z_0/Z_1 = 0,5$ resulta o valor infinito, ao passo que, com $\gamma_1 - \gamma_0 = 120^\circ$ e $Z_0/Z_1 = 1$, a corrente pode ser anulada num dos condutores. Se tivermos $\gamma_1 - \gamma_0 > 90^\circ$, isto significa que uma das duas impedâncias Z_0 e Z_1 é capacitiva e a outra indutiva. Este caso, praticamente, só aparece em redes com ponto neutro isolado, pois constata-se então o efeito da

capacitância Z_C no sistema zero, enquanto nos sistemas positivo e negativo predomina o efeito indutivo. Para $Z_0 \rightarrow \infty$, as curvas tendem para o valor $0,5 \cdot \sqrt{3}$, um valor portanto, que é característico de um curto-circuito bifásico sem contato com a terra. Se $\gamma_1 - \gamma_0$ leva um valor negativo, então as correntes se intercambiam nos condutores. O valor do condutor T é válido para S e vice-versa.

No gráfico da **Figura 4.16** vem representada a grandeza da corrente de curto-circuito que flui pela terra. Esta corrente se eleva tanto mais, quanto menor o valor Z_0/Z_1 e quanto maior $\gamma_1 - \gamma_0$. O sinal da diferença angular não tem, neste caso, maior significado.

O gráfico da **Figura 4.17**, mostra a grandeza da tensão à frequência de serviço em um condutor sem defeito, em função da relação Z_0/Z_1 e da defasagem angular $\gamma_1 - \gamma_0$. O sinal dessa defasagem não tem maior importância. Do valor teórico mínimo, correspondente a Z_0 , resulta o valor zero de tensão. Quando $Z_0 \rightarrow \infty$, todas as curvas tendem para o valor $1,5 \cdot E_a$, isto é, a tensão do condutor sem defeito com relação à terra se torna igual a 86,6% da tensão composta $\sqrt{3}E_R$.

Tensões especialmente elevadas aparecem, quando $\gamma_1 - \gamma_0$ ultrapassa o valor de 90° . O caso teórico $\gamma_1 - \gamma_0 = 180^\circ$, com $Z_0/Z_1 = 0,5$, eleva o valor da tensão ao infinito. Conforme já se mencionou anteriormente, o caso de $\gamma_1 - \gamma_0 > 90^\circ$ é possível apenas em redes com neutro isolado.

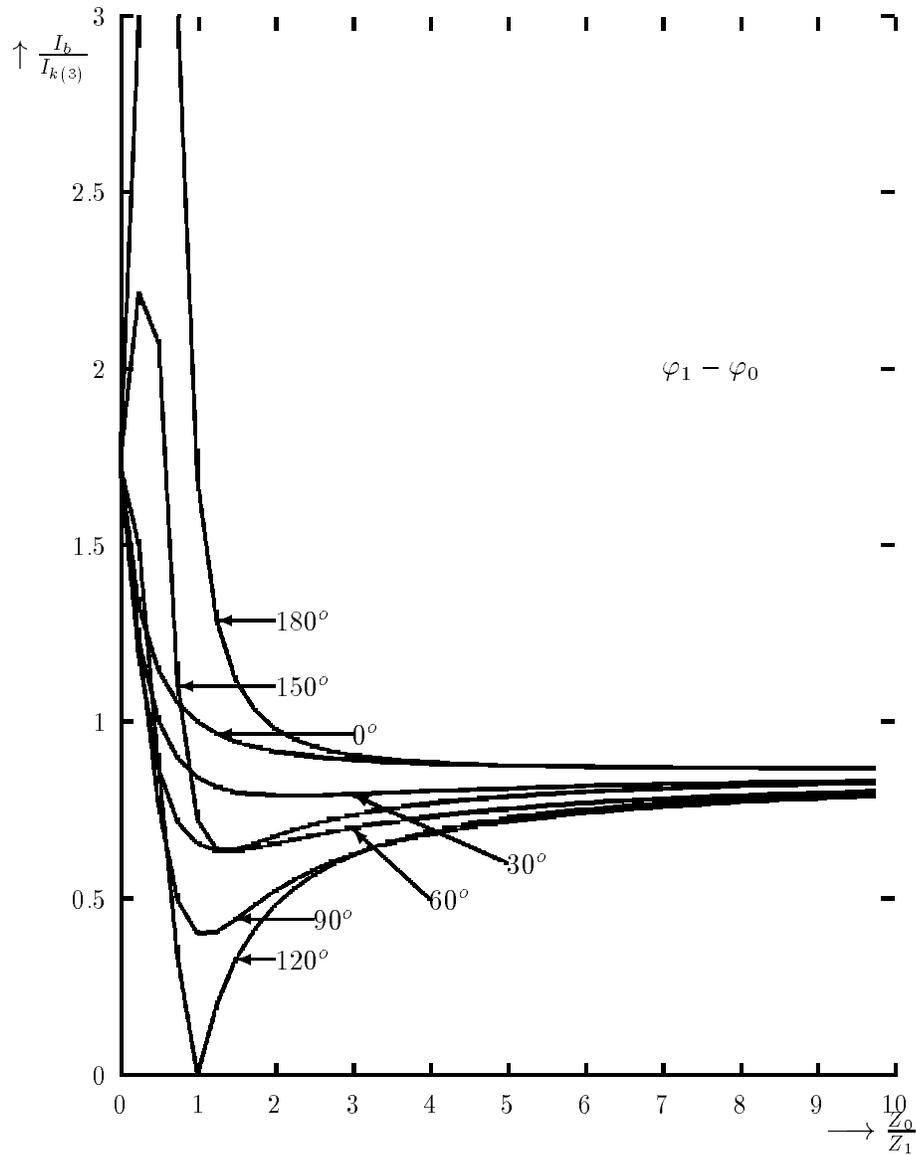


Figura 4.14: Curto-circuito bifásico em contato com a terra. Corrente de curto-circuito na fase b em comparação com a corrente de curto-circuito trifásico.

$E_a \rightarrow$ Força Eletromotriz

$Z_0 \rightarrow$ Impedância do sistema zero

$Z_1 \rightarrow$ Impedância do sistema positivo

$Z_2 \rightarrow$ Impedância do sistema negativo

$\gamma_1 - \gamma_0 \rightarrow$ Defasagem angular entre as impedâncias Z_1 e Z_0

$$I_b = -\frac{j\sqrt{3} \cdot E_a \cdot [(1+a^2) \cdot Z_2 + Z_0]}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}, \quad Z_1 = Z_2$$

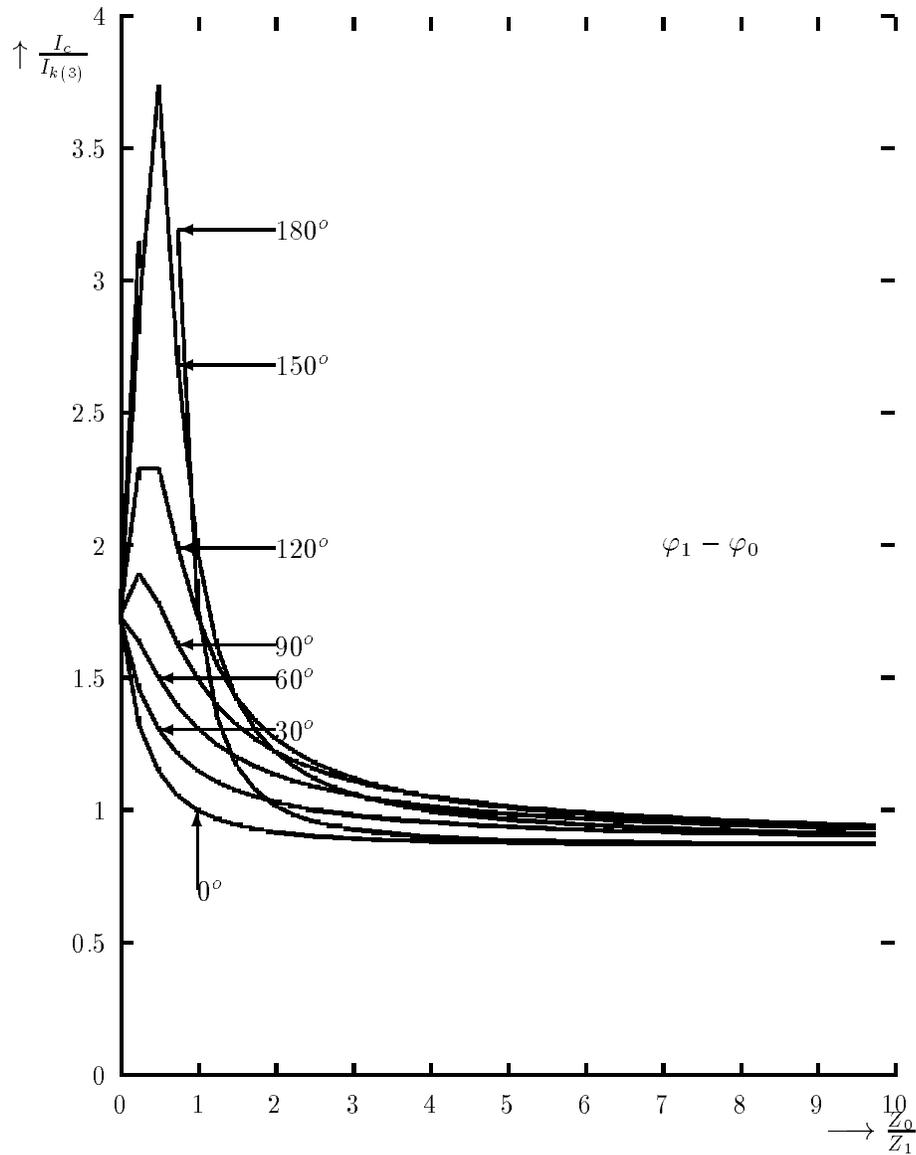


Figura 4.15: Curto-circuito bifásico em contato com a terra. Corrente de curto-circuito na fase c em comparação com a corrente de curto-circuito trifásico.

$E_a \rightarrow$ Força Eletromotriz

$Z_0 \rightarrow$ Impedância do sistema zero

$Z_1 \rightarrow$ Impedância do sistema positivo

$Z_2 \rightarrow$ Impedância do sistema negativo

$\gamma_1 - \gamma_0 \rightarrow$ Defasagem angular entre as impedâncias Z_1 e Z_0

$$I_c = \frac{j\sqrt{3} \cdot E_a \cdot [(1+a) \cdot Z_2 + Z_0]}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}, \quad Z_1 = Z_2$$

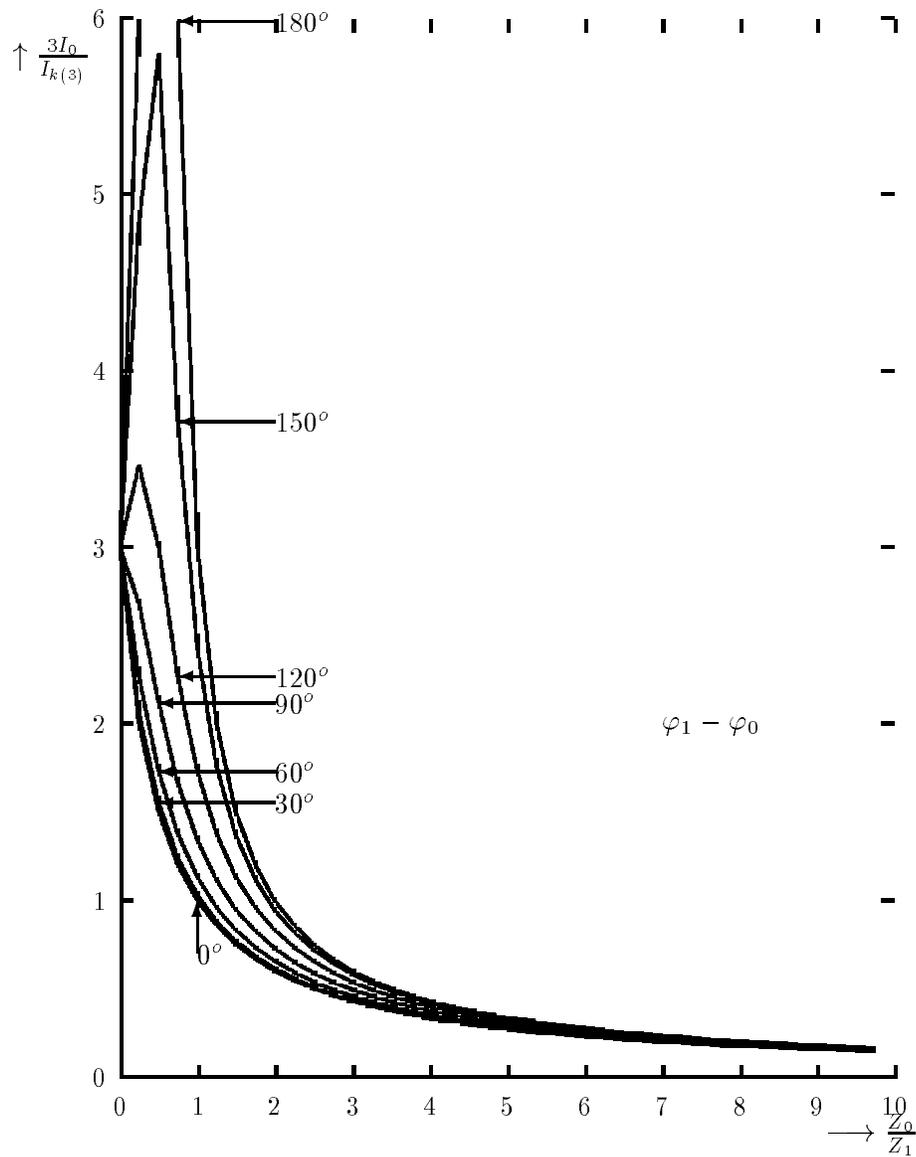


Figura 4.16: Curto-circuito bifásico em contato com a terra. Corrente de curto-circuito $3I_0$, em relação à corrente de curto-circuito trifásico.

$E_a \rightarrow$ Força Eletromotriz

$Z_0 \rightarrow$ Impedância do sistema zero

$Z_1 \rightarrow$ Impedância do sistema positivo

$Z_2 \rightarrow$ Impedância do sistema negativo

$\gamma_1 - \gamma_0 \rightarrow$ Defasagem angular entre as impedâncias Z_1 e Z_0

$$3I_0 = \frac{3 \cdot E_a \cdot Z_2}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}, \quad Z_1 = Z_2$$

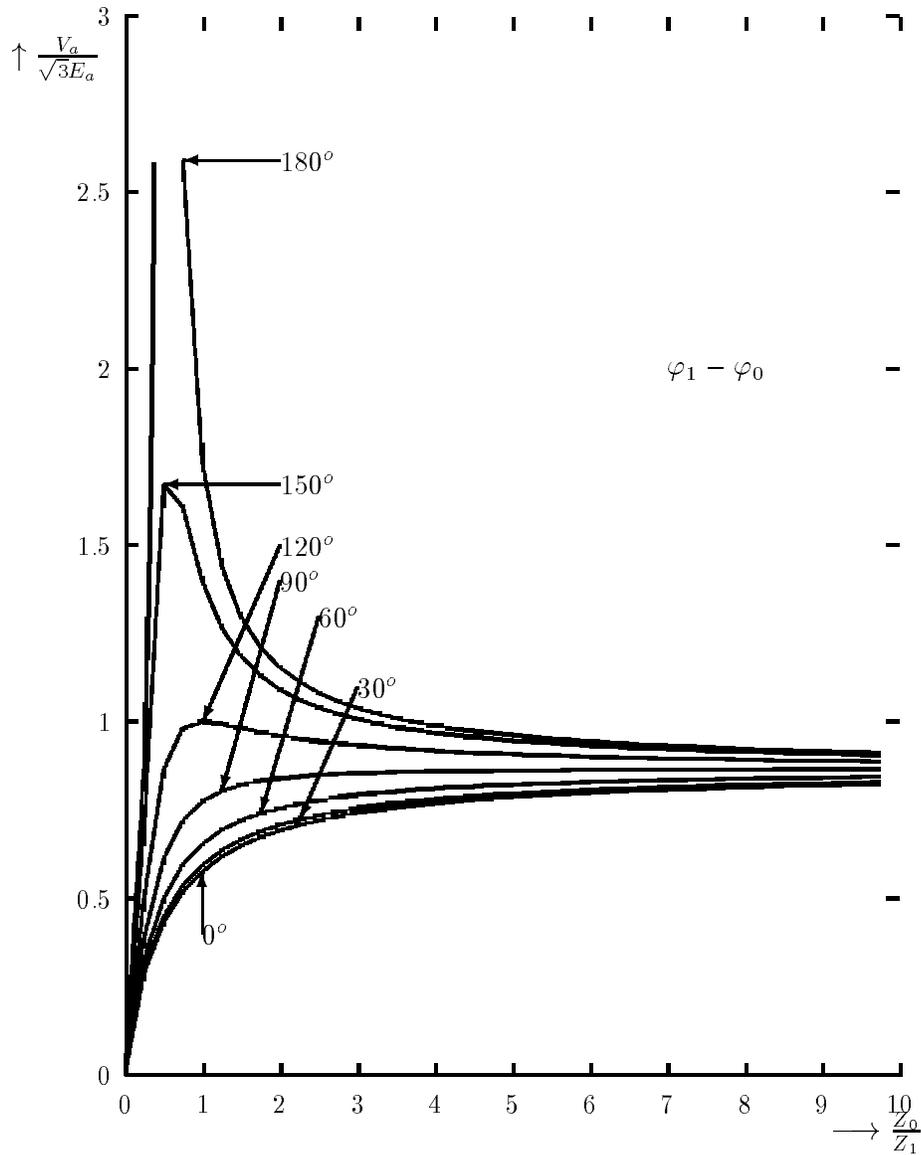


Figura 4.17: Curto-circuito bifásico em contato com a terra. Tensão máxima à frequência de serviço do condutor sem defeito contra a terra.

$E_a \rightarrow$ Força Eletromotriz

$Z_0 \rightarrow$ Impedância do sistema zero

$Z_1 \rightarrow$ Impedância do sistema positivo

$Z_2 \rightarrow$ Impedância do sistema negativo

$\gamma_1 - \gamma_0 \rightarrow$ Defasagem angular entre as impedâncias Z_1 e Z_0

$$V_a = \frac{3 \cdot E_a \cdot Z_0 \cdot Z_2}{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_0 + Z_0 \cdot Z_1}, \quad Z_1 = Z_2$$

4.8 Análise Comparativa dos Casos de Curto-Circuito

Pela comparação das equações nos casos de curto-circuitos trifásico e bifásico, conclui-se que a corrente de curto-circuito bifásico não ultrapassa a $0,5 \cdot \sqrt{3}$ vezes o valor da corrente de curto circuito trifásico, quando $Z_1 = Z_2$, condições que são encontradas na maioria dos casos. Por outro lado, as curvas dos gráficos demonstram que as correntes de curto-circuito que aparecem num curto-circuito bifásico com contato com a terra e num curto-circuito monofásico à terra podem, dependendo das condições, serem mais elevadas do que num curto-circuito trifásico, e por outro lado, podem aparecer sensíveis elevações de tensão no condutor sem defeito. Essas condições especiais devem agora ser analisadas com mais profundidade.

4.8.1 Redes com Neutro Isolado

Como já foi demonstrado, nos dois casos de defeitos mencionados, valores extremamente elevados de corrente e de tensão aparecem somente quando a defasagem angular entre as impedâncias Z_1 e Z_0 é grande e a relação Z_0/Z_1 é de pequeno valor. Grandes defasagens angulares entre impedâncias são apenas possíveis em redes de neutro isolado, excluindo-se dessas considerações o caso de um aterramento capacitivo do ponto neutro. Para se obter em tais redes um pequeno valor de Z_0/Z_1 , a corrente de curto-circuito trifásico, no local de defeito, não pode ser muito mais elevada do que a corrente de carga que circula pelos condutores que formam a rede. Este caso é, porém, praticamente impossível. Em geral, deve-se admitir um valor Z_0/Z_1 pelo menos igual a 5, frequentemente ainda com valores bem mais elevados.

Como as correntes nos casos de curto-circuito bifásicos com contato com a terra e nos curto-circuito monofásicos à terra são menores do que as existentes no curto-circuito trifásico a partir de valores de $Z_0/Z_1 = 5$, estes dois casos deixam de merecer maior atenção, quando se trata de determinar os máximos valores de corrente de curto-circuito. Assim, em redes com neutro isolado, o máximo valor de corrente de curto-circuito aparece no curto-circuito trifásico.

4.8.2 Redes com Ponto Neutro do Sistema Aterrado Indutivamente

Quando o ponto neutro do sistema não está isolado, mas ligado à terra através de uma reatância e, tendo-se ajustado esta reatância indutiva, dada por $3Z_E + Z_{oT}$, exatamente para o valor da capacitância da rede Z_C , obtemos uma impedância do

sistema zero praticamente igual a infinito, fluindo pela terra uma corrente residual de valor bastante pequeno. A corrente de curto-circuito num curto-circuito bifásico com contato com a terra assume os valores do curto-circuito bifásico sem contato com a terra, enquanto a de curto-circuito monofásico se reduz praticamente a zero. Portanto, também neste caso, os valores mais elevados da corrente de curto-circuito aparecem no caso de um defeito trifásico.

Se não houver um ajuste exato entre a indutância de terra e a capacitância da rede, podemos distinguir dois casos:

1. A indutância $3Z_E + Z_{oT}$ é maior que a capacitância Z_C da rede em relação à terra (sub-compensação);
2. A indutância $3Z_E + Z_{oT}$ é menor que a capacitância Z_C da rede em relação à terra (sobre-compensação).

No caso 1, a impedância do sistema zero será aumentada pela ação da indutância da terra que fica em paralelo com a capacitância da rede, situação em que a impedância zero mantém a sua característica capacitiva. A corrente de curto-circuito que aparece em ambos os casos de defeito em análise será, conseqüentemente, ainda menor do que em redes com ponto neutro da estrela isolado. No caso 2, a impedância do sistema zero apenas será aumentada, quando a indutância $3Z_E + Z_{oT}$ não é menor que 50% da reatância capacitiva dos condutores em relação à terra. Sob tais condições, a corrente de curto-circuito que aparece nos dois casos também se manterá menor do que em redes com ponto neutro da estrela isolado, e conseqüentemente com valor mais baixo que as correntes de curto-circuito trifásico. Se, ao contrário, o valor de $3Z_E + Z_{oT}$ é menor que 50% da reatância capacitiva da rede, então a impedância do sistema zero será reduzida. A impedância zero adquire, entretanto, neste caso uma característica indutiva e a defasagem angular das impedâncias $\gamma_1 - \gamma_0$ varia numa faixa de 0° a 90° . Assim, não ocorrem em redes com ponto neutro aterrado indutivamente os valores excessivamente elevados de tensão e de corrente, próprios de defasagens angulares superiores a 90° . Reduzindo-se a impedância zero, pode-se obter uma relação Z_0/Z_1 menor do que 5. Conseqüentemente, a corrente de curto-circuito nestes casos pode ser também maior do que a corrente de curto-circuito trifásico. Uma comparação dos gráficos apresentados mostra que, dentro do intervalo angular de 0° a 90° , num curto-circuito bifásico em contato com a terra, pode-se atingir valores de corrente de curto-circuito pouco mais elevados do que quando o curto-circuito é monofásico à terra.

4.8.3 Redes com Ponto Neutro do Sistema Rigidamente Aterrado

Reduzindo-se a impedância de terra Z_E ao valor zero, atingiremos a condição de rede rigidamente aterrada. No sistema zero, as reatâncias capacitivas Z_C entre

os condutores e terra são assim praticamente curto-circuitadas, pois as impedâncias zero Z_{oT} e Z_{oL} são bem menores do que Z_C , neste caso, é frequente uma relação de Z_0/Z_1 reduzida a até 0,5, onde simultaneamente a defasagem angular entre as impedâncias Z_1 e Z_0 varia na faixa entre 0° e 90° .

Não ocorrem, portanto, neste caso, os valores extremamente elevados de tensão e de corrente, próprios dos casos de defasagem angular superior a 90° . Entretanto, em se tratando de um curto-circuito monofásico à terra, podendo atingir até 50%, quando o curto-circuito é bifásico em contato com a terra.

As tensões à frequência de serviço que são atingidas na fase sem defeito poderão se elevar, no caso mais crítico, a um valor 1,1 vezes a tensão composta. Segundo certas normas técnicas (VDE), uma rede de alta-tensão não está eficientemente aterrada quando em caso de defeito e à frequência de serviço, a tensão em relação à terra, no condutor sem defeito é maior que 80% da máxima tensão de serviço, e assim o nível de isolamento utilizado no sistema não pode ser do tipo reduzido. Portanto, se for determinado o uso de isolamento reduzido, deve-se atentar para que não seja ultrapassado o valor de $Z_0/Z_1 = 5$ ou 3 a 4 para uma defasagem angular das impedâncias até 30%.

Contrariando a prática Alemã de efetuar um aterramento rígido do ponto estrela apenas em sistemas de extra-alta-tensão (EAT), e a de usar em alta e média-tensão indutâncias de aterramento, encontra-se frequentemente em outros países, sistemas cujo ponto neutro da estrela é aterrado através de resistores. Este resistor é, então, dimensionado de tal maneira que a corrente de curto-circuito à terra não se torne sensivelmente mais elevada do que a corrente nominal.

No Brasil, a prática mais frequente é a de efetuar em sistemas de alta e extra-alta-tensão, um aterramento rígido do ponto estrela e de usar nos sistemas de média-tensão um resistor de aterramento. Uma análise comparativa dos diversos casos de curto-circuito demonstra que, em redes com neutro isolado e em redes com compensação plena, a corrente máxima de curto-circuito ocorre sempre em redes com defeitos trifásicos. Em redes rigidamente aterradas ou ligadas à terra através de indutâncias de reduzido valor, os valores mais elevados de corrente de curto-circuito se apresentam quando de um defeito monofásico ou bifásico em contato com a terra.

4.9 A Variação da Corrente de Curto-Circuito em Função do Tempo

Nas expressões deduzidas anteriormente, para o cálculo das correntes de curto-circuito, são determinados sempre os valores eficazes de corrente alternada. Genericamente, podemos assim escrever:

$$I_k = \frac{E_a}{\sum Z_{1,2,0}}$$

onde E_a é a força eletromotriz e $Z_{1,2,0}$ as impedâncias positiva, negativa e zero de toda a rede de curto-circuito. Nesta impedâncias estão, portanto, incluídas tanto as impedâncias dos geradores quanto as da rede.

Das impedâncias que intervêm num curto-circuito, a do gerador ocupa uma posição particular. Isto porque, durante um curto-circuito, o campo de excitação é enfraquecido num grau maior ou menor, devido a reação do induzido, e a tensão nos terminais do gerador sofre uma queda proporcional. Se considerarmos constante a f.e.m. existente antes do aparecimento do curto-circuito, então podemos admitir a redução nos terminais também como uma consequência da elevação da impedância do gerador. Quando esta impedância se eleva, a corrente de curto-circuito se reduz, num grau tanto maior quanto mais próximo do gerador ocorre o curto-circuito. Como, exemplo, na **Figura 4.18** são representadas curvas de variação na fase R da corrente de curto-circuito, no caso de uma alternador trifásico em plena excitação, que sofre um curto-circuito nos seus próprios terminais.

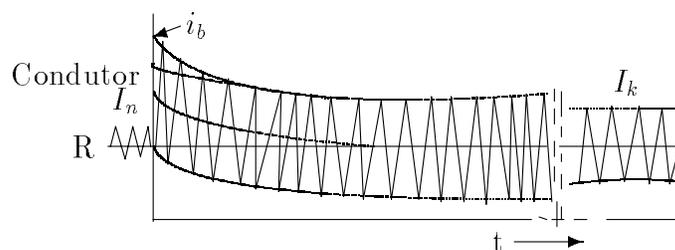


Figura 4.18: Componentes de corrente contínua e alternada no início de curto-circuito

A corrente inicialmente se eleva a um valor de pico, representado pelo impulso de corrente de curto-circuito I_b , o qual se reduz, primeiro acentuadamente, depois lentamente, até atingir o valor de I_k , que representa a corrente permanente de curto-circuito. Esse processo de amortecimento se desenvolve assimetricamente em relação ao eixo horizontal de referência durante um curto intervalo de tempo.

Se o curto-circuito ocorre no instante da passagem da tensão por zero, a corrente sofrerá um defasamento angular de praticamente 90° , devido às características de uma indutância pura que o circuito apresenta em curto-circuito, pois nestas condições, a única componente ativa é a reatância de dispersão do gerador. A corrente de curto-circuito deve assim saltar instantaneamente para o seu valor máximo quando $t=0$. Entretanto, devido às características indutivas da impedância do gerador, esse valor não pode ser imediatamente atingido, tendo que se iniciar praticamente com valor zero no tempo $t=0$. A compensação necessária é conseguida pela componente de corrente contínua, cujo valor

inicial corresponde ao valor máximo da corrente alternada no instante $t=0$, desaparecendo depois de alguns períodos.

A corrente de curto-circuito se compõe, portanto, de duas componentes, ou seja, a componente de corrente alternada que varia simetricamente em relação ao eixo horizontal de referência, e a componente de corrente contínua, que vem representada em um dos lados deste mesmo eixo. Efetuando-se a soma dos valores de corrente contínua e alternada, presentes em cada instante, obtém-se a real variação da corrente de curto-circuito. Por hipótese, o início da curva tem valor zero, atingindo, meio período depois, o seu valor máximo, que equivale a $8ms$ com $f=60Hz$, instante a partir do qual a corrente amortece em função das constantes de tempo correspondente às componentes de corrente contínua e alternada, até atingir um valor estacionário constante.

No acompanhamento do processo de variação da corrente de curto-circuito, a análise se concentrou até aqui em apenas um condutor, e ainda assim naquele em que a tensão esteja passando pela origem no instante do curto-circuito.

4.10 Grandezas Características do Processo de Amortecimento

4.10.1 Reatâncias do gerador

A variação da corrente de curto-circuito analisada anteriormente demonstra que, para se determinar com exatidão os valores instantâneos correspondentes aos diferentes instantes, é necessário conhecer três reatâncias diferentes do gerador, quais sejam:

- a reatância subtransitória X_d''
- a reatância transitória X_d'
- a reatância síncrona X_d

Tanto a reatância transitória quanto a subtransitória são referidas ao correspondente valor de corrente do gerador, no instante de tempo $t=0$.

A reatância subtransitória X_d'' compreende a reatância de dispersão dos enrolamentos do estator e do rotor do gerador, estando incluídos na dispersão do rotor as influências do enrolamento de amortecimento e das partes maciças do rotor. A reatância subtransitória também é designada por reatância inicial. O valor relativo da reatância subtransitória é, nos turbogeradores, da ordem de 12%. Nas máquinas de pólos salientes e com enrolamentos de amortecimentos, é de 18%.

A reatância transitória X_d' engloba a reatância de dispersão do enrolamento do estator e de excitação do gerador. Geralmente o seu valor é mais elevado do

que a reatância subtransitória. Se, porém, o rotor tem pólos e carcaça laminados e não tem enrolamentos de amortecimento, então o valor de ambas é praticamente o mesmo. A reatância transitória é às vezes conhecida por reatância total de dispersão. O valor relativo da reatância transitória, em turbogeradores, é da ordem de 18% e nas máquinas de pólos salientes com enrolamento de amortecimento atinge 27%. Em ambos os casos, portanto, o seu valor é aproximadamente igual a 1,5 vezes o valor da reatância subtransitória.

A reatância síncrona X_d engloba a reatância total do enrolamento do rotor do gerador (reatância de dispersão do estator + reatância da reação do induzido). O seu valor relativo equivale ao valor recíproco da relação de curto-circuito em vazio, sendo em média igual a 160% nos turbogeradores e igual a 100% nas máquinas de pólos salientes.

Todas as reatâncias mencionadas pertencem ao conceito de reatância positiva, tratando-se unicamente de diferentes valores desse, particulares ao gerador e necessários para a determinação dos valores instantâneos de curto-circuito.

O subíndice “d” indica que as reatâncias são referidas a uma posição do rotor, na qual o eixo do enrolamento do rotor e do estator coincidem. Esse eixo é designado por eixo direto. Além destas reatâncias, o gerador também possui reatâncias nos eixos transversais, as quais, entretanto, praticamente não têm maior importância para o cálculo das condições de curto-circuito.

4.10.2 As constantes de tempo

As reatâncias do gerador determinam, junto com as impedâncias de rede, no trecho compreendido entre o gerador e o ponto de curto-circuito, os valores iniciais e finais do processo de amortecimento. Seu valor é função das reatâncias do gerador e da rede, de acordo com a expressão:

$$T_d'' = \frac{X_d'' + X_N}{X_d' + X_N} \cdot T_{d0}''$$

onde T_{d0}'' é a constante de tempo subtransitória do gerador em vazio. O valor de T_{d0}'' é da ordem de 50ms e não pode ser ultrapassado por T_d' porque $X_d' > X_d''$. No caso de curto-circuito nos terminais do gerador, ou seja, $X_N = 0$, T_d'' decresce cerca de 33ms. Portanto, T_d'' varia relativamente pouco e todo o fenômeno subtransitório fica limitado a 3 ou 4 semiperíodos. O tipo de curto-circuito (mono, bi ou trifásico) tem pouca influência sobre a constante de tempo subtransitória.

A constante de tempo T_d' do fenômeno transitório é função das propriedades amortecedoras do circuito de excitação. seu valor sofre a influência do tipo de curto-circuito, de modo que os valores são diferentes nos casos de defeitos (tri, bi ou monofásico). Como sendo:

1. Num curto-circuito trifásico, a constante de tempo T_d' é função das reatâncias do

gerador e da rede e é dada pela expressão seguinte:

$$T'_{d(3)} = \frac{X'_d + X_N}{X_d + X_N} \cdot T'_{d0}$$

onde T'_{d0} é a constante de tempo transitória do gerador em vazio, sendo o seu valor de 5 a 12s. Os valores menores são encontrados nas máquinas de pólos salientes e os maiores em turbogeradores.

2. No caso de um curto-circuito bifásico, a determinação da constante de tempo $T'_{d(2)}$ precisa-se levar em consideração tanto a influência da impedância positiva quanto a da negativa, de acordo com as considerações feitas anteriormente. Daí resulta a expressão:

$$T'_{d(2)} \approx \frac{X'_d + X_2 + 2Z_N}{X_d + X_2 + 2Z_N} \cdot T'_{d0}$$

na qual X_2 representa a reatância negativa do gerador.

3. No caso de um curto-circuito monofásico, além de se levar em consideração a impedância positiva e a negativa, é necessário incluir também a impedância zero. Vale assim a expressão:

$$T'_{d(1)} \approx \frac{X'_d + X_2 + 2Z_N + Z_0}{X_d + X_2 + 2Z_N + Z_0} \cdot T'_{d0}$$

A impedância zero provoca um aumento da constante de tempo $T'_{d(1)}$ do curto-circuito monofásico. Esse aumento será tanto maior quanto maior for a impedância zero em relação à impedância positiva.

A constante de tempo da componente de corrente contínua, T_g , é definida pelas características amortecedoras do circuito de corrente do estator, isto é, pela relação entre a reatância e a resistência ôhmica do enrolamento do estator e do circuito externo do curto-circuito. O seu valor é praticamente o mesmo nos diferentes casos de defeito, e pode calcular-se pela equação:

$$T_g = \frac{X''_d + X_N}{\omega (R_a + R_N)}$$

na qual R_a é a resistência ôhmica do enrolamento do rotor do gerador e R_N a resistência ôhmica da rede.

4.10.3 Cálculo dos valores instantâneos das correntes de curto-circuito

A variação da corrente de curto-circuito em função do tempo é definida pela seguinte equação:

$$i_k(t) = \sqrt{2} \left[\begin{aligned} &(I_k'' - I_k') \cdot e^{-t/T_d''} \cdot \text{sen}(\omega t - \alpha) + (I_k' - I_k) \cdot e^{-t/T_d'} \cdot \text{sen}(\omega t - \alpha) + \\ &+ I_k \cdot \text{sen}(\omega t - \alpha) + I_k'' \cdot e^{-t/T_g} \cdot \text{sen} \alpha \end{aligned} \right]$$

Nesta equação, o primeiro termo corresponde à parcela subtransitória da corrente de curto-circuito; o segundo, à parte transitória; o terceiro, à parte em regime permanente, e à quarta, à parte da componente de corrente contínua. O valor de $i_k(t)$ representa o valor instantâneo da corrente de curto-circuito num instante t e com um ângulo de fase de corrente α , no instante inicial do curto-circuito. Se a situação for tal que predomine a reatância indutiva no circuito em curto-circuito, então $\alpha = 90^\circ$ e a equação é simplificada como segue:

$$i_k(t) = \sqrt{2} \left[\begin{aligned} &(I_k'' - I_k') \cdot e^{-t/T_d''} \cdot \cos \omega t + (I_k' - I_k) \cdot e^{-t/T_d'} \cdot \cos \omega t + \\ &+ I_k \cdot \cos \omega t + I_k'' \cdot e^{-t/T_g} \end{aligned} \right]$$

Capítulo 5

MÉTODOS MATRICIAIS PARA A SOLUÇÃO DE FALTAS TRANSVERSAIS E DEFEITOS LONGITUDINAIS[2, 10]

5.1 Introdução

O método de análise de defeitos que desenvolvemos anteriormente se adapta bem ao uso de calculadoras portáteis. No entanto, na análise de defeitos em grandes sistemas é preciso um método mais poderoso e que seja mais propício à programação em computador digital. Esta necessidade decorre do fato de que é praticamente impossível obter-se a impedância de Thévenin vista do ponto de defeito manualmente, quando se trata de sistemas de elevado número de barras e conexões. Além disso, o engenheiro de sistemas, ao realizar um estudo de curto-circuito de uma rede, precisará conhecer os níveis em diversos pontos, e também a contribuição à corrente de defeito, de várias linhas e geradores do sistema. Estas são as razões pelas quais hoje em dia se procede um estudo de curto-circuito quase que invariavelmente auxiliados por um computador digital.

Note que isto não quer dizer que não há necessidade de o engenheiro conhecer o método restrito a sistemas de dimensões reduzidas. Pelo contrário, o conhecimento de métodos práticos de cálculo é fundamental para facilitar a análise de uma listagem de saída de computador. Com rápidos cálculos manuais, pode o engenheiro verificar a coerência dos resultados e assim antever a possibilidade de ter havido erro nos dados de entrada.

A par disso, as matrizes de rede permitem obter um equivalente do sistema visto por qualquer barra. Assim, de posse, por exemplo, da matriz \mathbf{Z}_{BARRA} de um sistema calculada em computador, pode o engenheiro obter um equivalente da porção do sistema de interesse para a determinação de medidas corretivas e realizar um pré-dimensionamento

manual dos dispositivos. Desta forma evita-se um processo iterativo, as vezes demorado, com a economia de tempo de máquina, pois seriam necessários os processamentos de vários casos até obter-se o resultado desejado.

O objetivo aqui é fornecer a metodologia de aplicação da matriz \mathbf{Z}_{BARRA} ao cálculo de curto-circuitos simétricos e assimétricos em grandes sistemas.

5.2 Equacionamento em Grandezas de Fase

Inicialmente, desenvolveremos um equacionamento bastante geral e que pode ser aplicado até mesmo a sistemas que possuam desbalanços intrínsecos tais como linhas de transmissão não-transpostas. Posteriormente, faremos a transformação de componentes simétricos para entrarmos nas equações dos sistemas balanceados.

A **Figura 5.1** apresenta uma rede trifásica qualquer, submetida a um defeito genérico. A falta é representada por uma matriz de impedâncias de falta cujos elementos serão escolhidos para bem representar o tipo de defeito a ser analisado.

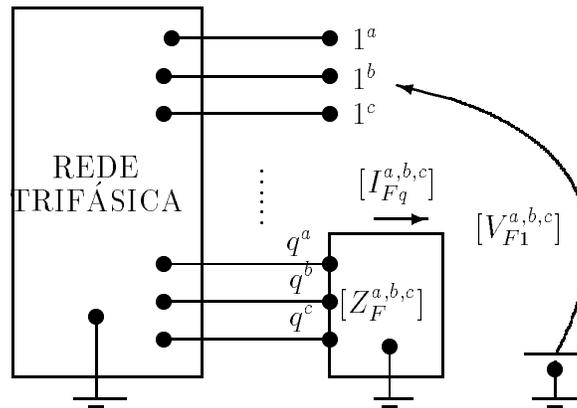


Figura 5.1: Rede trifásica submetida a um defeito genérico na barra $q^{a,b,c}$.

Para equacionar o problema, admitiremos que todas as cargas são representáveis por impedâncias e que, portanto, a rede é linear. A aplicação do teorema de superposição, conforme ilustrado, para esse caso, na **Figura 5.2**, permite decompor o problema de tal forma que as tensões e correntes em toda a rede, durante a falta, são a soma das condições pré-falta (quando se faz $\mathbf{I}_q^{a,b,c} = 0$) com as condições decorrentes da injeção de uma corrente $\mathbf{I}_q^{a,b,c}$ na barra $q^{a,b,c}$, com os demais geradores da rede desativados.

Esta última consideração significa que os possíveis geradores de tensão curto-circuitados, e a excitação da rede será dada, nessa condição, apenas pelo gerador de corrente representativo da falta.

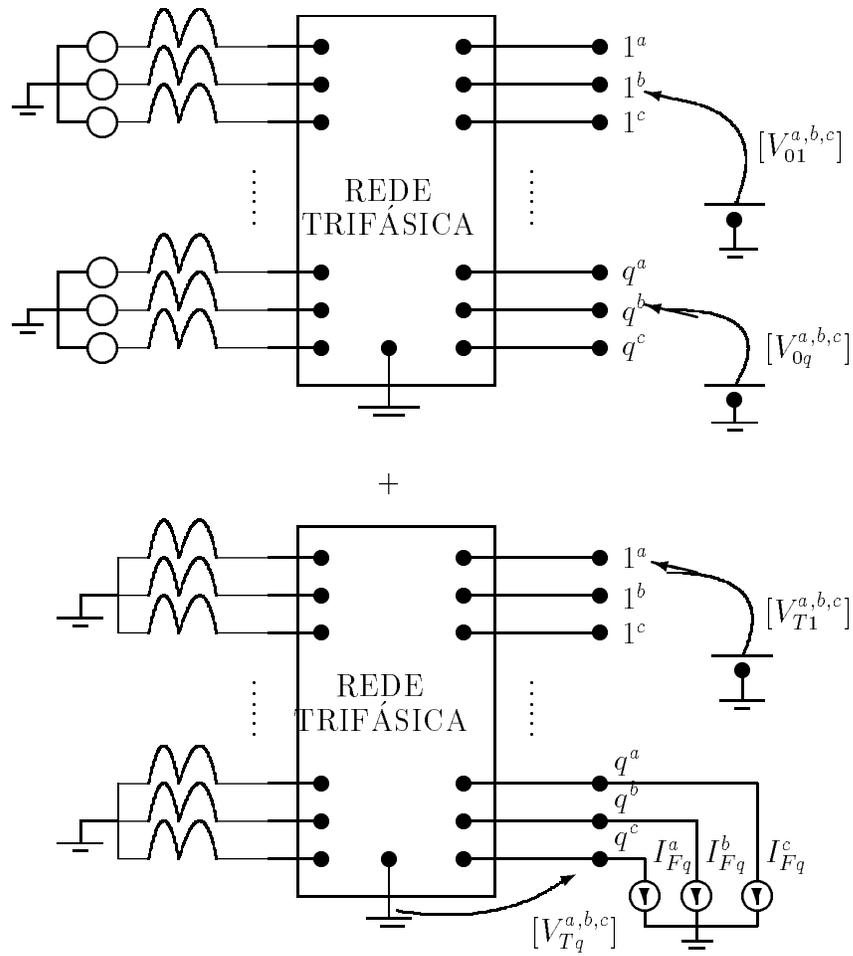


Figura 5.2: Equivalente da **Figura 1** após a aplicação do teorema da superposição.

$$[V_0^{a,b,c}] = \text{vetor de tensões trifásicas pré-falta} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{01}^a \\ V_{01}^b \\ V_{01}^c \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} V_{0n}^a \\ V_{0n}^b \\ V_{0n}^c \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[V_F^{a,b,c}] = \text{vetor das tensões durante a falta} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{F1}^a \\ V_{F1}^b \\ V_{F1}^c \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} V_{Fn}^a \\ V_{Fn}^b \\ V_{Fn}^c \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[V_T^{a,b,c}] = \text{vetor de variação de tensão provocada pela falta} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{T1}^a \\ V_{T1}^b \\ V_{T1}^c \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} V_{Tn}^a \\ V_{Tn}^b \\ V_{Tn}^c \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[I_F^{a,b,c}] = \text{vetor corrente de falta} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} I_{Fq}^a \\ I_{Fq}^b \\ I_{Fq}^c \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[Z_{BARRA}^{a,b,c}] = \text{Matriz de impedâncias nodais trifásica} = \begin{bmatrix} [Z_{11}^{a,b,c}] & \cdots & [Z_{1n}^{a,b,c}] \\ \vdots & & \vdots \\ [Z_{q1}^{a,b,c}] & \cdots & [Z_{qn}^{a,b,c}] \\ \vdots & & \vdots \\ [Z_{n1}^{a,b,c}] & \cdots & [Z_{nn}^{a,b,c}] \end{bmatrix}.$$

Equacionando a partir das Figuras 1 e 2, temos:

$$[V_F^{a,b,c}] = [V_0^{a,b,c}] + [V_T^{a,b,c}]. \quad (5.1)$$

Mas:

$$[V_T^{a,b,c}] = -[Z_{BARRA}^{a,b,c}] \cdot [I_F^{a,b,c}]. \quad (5.2)$$

Substituindo em (5.1), temos

$$[V_F^{a,b,c}] = [V_0^{a,b,c}] - [Z_{BARRA}^{a,b,c}] \cdot [I_F^{a,b,c}]. \quad (5.3)$$

Como o vetor $[I_F^{a,b,c}]$ é não nulo apenas para a barra genérica $q^{a,b,c}$, na qual estamos admitindo aplicada a falta, a equação (5.3) pode ser reescrita como:

$$[V_F^{a,b,c}] = [V_0^{a,b,c}] - \begin{bmatrix} [Z_{1q}^{a,b,c}] \\ [Z_{2q}^{a,b,c}] \\ \vdots \\ [Z_{qq}^{a,b,c}] \\ \vdots \\ [Z_{nq}^{a,b,c}] \end{bmatrix} \cdot [I_{Fq}^{a,b,c}]. \quad (5.4)$$

Na barra de falta temos a relação:

$$[V_{Fq}^{a,b,c}] = [Z_F^{a,b,c}] \cdot [I_{Fq}^{a,b,c}]. \quad (5.5)$$

Substituindo esta última relação na linha q da equação (5.4), temos que:

$$[Z_F^{a,b,c}] \cdot [I_{Fq}^{a,b,c}] = [V_{0q}^{a,b,c}] - [Z_{qq}^{a,b,c}] \cdot [I_{Fq}^{a,b,c}] \quad (5.6)$$

a qual permite obtermos o vetor corrente de falta

$$[I_{Fq}^{a,b,c}] = [[Z_F^{a,b,c}] + [Z_{qq}^{a,b,c}]]^{-1} \cdot [V_{0q}^{a,b,c}]. \quad (5.7)$$

Em alguns casos de defeito que envolvem fases abertas, por exemplo a fase \underline{a} em um curto dupla fase entre \underline{b} e \underline{c} , a matriz de impedância de falta não é definida, pois um ou mais elementos teriam valor infinito. Neste caso, contornamos o problema utilizando a matriz de admitâncias de falta $[Y_F^{a,b,c}]$. Dentro desta hipótese, a equação (5.5) é modificada para:

$$[I_{Fq}] = [Y_F^{a,b,c}] \cdot [V_{Fq}^{a,b,c}]. \quad (5.8)$$

A substituição na linha q da equação (5.4) fornece:

$$[V_{Fq}^{a,b,c}] = [V_{0q}^{a,b,c}] - [Z_{qq}^{a,b,c}] \cdot [Y_F^{a,b,c}] \cdot [V_{Fq}^{a,b,c}] \quad (5.9)$$

que implica

$$[V_{Fq}^{a,b,c}] = [I] + [Z_{qq}^{a,b,c}] \cdot [Y_F^{a,b,c}]^{-1} \cdot [V_{0q}^{a,b,c}]. \quad (5.10)$$

Lembrando a equação (5.8) resulta:

$$[I_{Fq}^{a,b,c}] = [Y_F^{a,b,c}] \cdot [I] + [Z_{qq}^{a,b,c}] \cdot [Y_F^{a,b,c}]^{-1} \cdot [V_{0q}^{a,b,c}]. \quad (5.11)$$

Para as tensões na rede durante a falta, temos em um caso e outro:

$$[V_{Fi}^{a,b,c}] = [V_{0i}^{a,b,c}] - [Z_{iq}^{a,b,c}] \cdot [I_{Fq}^{a,b,c}] \quad (5.12)$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq q$. O vetor corrente de falta deverá ter sido obtido previamente pela equação (5.7) ou (5.11), dependendo se estar trabalhando com a matriz impedâncias de falta ou de admitâncias de falta.

A tensão na barra $q^{a,b,c}$, em falta, deve ser calculada pela equação (5.5) ou (5.10), dependendo da matriz de falta que se estiver utilizando.

O cálculo das distribuições de correntes pela rede pode ser feito como segue:

- Em termos de matrizes primitivas trifásicas a equação de desempenho fica:

$$[i_F^{a,b,c}] = [y^{a,b,c}] \cdot [V_F^{a,b,c}] \quad (5.13)$$

$$[i_F^{a,b,c}] = \text{vetor das correntes nos elementos da rede} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Fij}^a \\ i_{Fij}^b \\ i_{Fij}^c \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} i_{Fkl}^a \\ i_{Fkl}^b \\ i_{Fkl}^c \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

ij, kl = ligações genéricas da rede.

$[V_F^{a,b,c}]$ = Vetor das tensões nos elementos da rede.

$[y^{a,b,c}]$ = Matriz de admitâncias primitiva da rede.

Explicitamente:

$$[y^{a,b,c}] = \begin{bmatrix} [y_{ij,ij}^{a,b,c}] & \cdots & [y_{ij,kl}^{a,b,c}] \\ \vdots & & \\ [y_{kl,ij}^{a,b,c}] & \cdots & [y_{kl,kl}^{a,b,c}] \end{bmatrix}$$

e uma submatriz qualquer é da forma:

$$\begin{bmatrix} y_{ij,kl}^{aa} & y_{ij,kl}^{ab} & y_{ij,kl}^{ac} \\ y_{ij,kl}^{ba} & y_{ij,kl}^{bb} & y_{ij,kl}^{bc} \\ y_{ij,kl}^{ca} & y_{ij,kl}^{cb} & y_{ij,kl}^{cc} \end{bmatrix}$$

A corrente em uma ligação genérica da rede rs , com auxílio da equação (5.13), pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} i_{rs}^a \\ i_{rs}^b \\ i_{rs}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [y_{rs,ij}^{a,b,c}] & \cdots & [y_{rs,rs}^{a,b,c}] & \cdots & [y_{rs,kl}^{a,b,c}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [V_{ij}^{a,b,c}] \\ \vdots \\ [V_{rs}^{a,b,c}] \\ \vdots \\ [V_{kl}^{a,b,c}] \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Compactamente teremos:

$$[i_{rs}^{a,b,c}] = \sum [y_{rs,\rho\sigma}^{a,b,c}] \cdot [V_{\rho\sigma}^{a,b,c}] \quad (5.15)$$

com ρ, σ abrangendo as extremidades de todas as ligações da rede mutuamente acopladas com rs , incluindo a própria rs .

Como só conhecemos as tensões nas barra, é conveniente colocar a equação (5.15) em função de termos conhecidos.

Lembrando que:

$$[V_{\rho\sigma}^{a,b,c}] = [V_{\rho}^{a,b,c} - V_{\sigma}^{a,b,c}] \quad (5.16)$$

obtemos:

$$[i_{rs}^{a,b,c}] = \sum [y_{rs,\rho\sigma}^{a,b,c}] \cdot [V_{\rho}^{a,b,c} - V_{\sigma}^{a,b,c}] \quad (5.17)$$

5.3 Equacionamento em Termos de Componentes Simétricos

As equações até aqui deduzidas são completamente gerais e podem ser aplicadas mesmo a sistemas desbalanceados. Quando se trata com redes balanceadas, a transformação em componentes simétricos é vantajosa, pois diagonaliza as matrizes da rede, tornando as redes sequenciais desacopladas.

Supondo então que a rede em análise é balanceada, podemos reescrever a equação (5.3) em termos da matriz $[A]$, matriz de transformação de componentes simétricos .

$$[A] \cdot [V_F^{0,1,2}] = [A] \cdot [V_0^{0,1,2}] - [Z_{BARRA}^{a,b,c}] \cdot [A] \cdot [I_F^{0,1,2}]. \quad (5.18)$$

Pré-multiplicando ambos os membros da equação (5.18) por $[A]^{-1}$, teremos

$$[V_F^{0,1,2}] = [V_0^{0,1,2}] - [A]^{-1} \cdot [Z_{BARRA}] \cdot [A] \cdot [I_F^{0,1,2}]. \quad (5.19)$$

Da equação (5.19) temos que:

$$[Z_{BARRA}^{0,1,2}] = [A]^{-1} \cdot [Z_{BARRA}^{a,b,c}] \cdot [A]. \quad (5.20)$$

A matriz da equação (5.20) é composta de submatrizes diagonais, pois estamos supondo o sistema balanceado. Explicitamente, uma matriz genérica de $[Z_{BARRA}^{0,1,2}]$ é escrita como:

$$[Z_{ij}^{0,1,2}] = \begin{bmatrix} Z_{ij}^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{ij}^1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{ij}^2 \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Na barra de falta teremos:

$$[V_{Fq}^{a,b,c}] = [A] \cdot [V_{Fq}^{0,1,2}] = [Z_F^{a,b,c}] \cdot [I_{Fq}^{a,b,c}] = [Z_F^{a,b,c}] \cdot [A] \cdot [I_{Fq}^{0,1,2}]. \quad (5.22)$$

Pré-multiplicando por $[A]^{-1}$ ambos os membros temos:

$$[V_F^{0,1,2}] = [A]^{-1} \cdot [Z_F^{a,b,c}] \cdot [A] \cdot [I_{Fq}^{0,1,2}]. \quad (5.23)$$

A matriz de falta em componentes simétricos é:

$$[Z_F^{0,1,2}] = [A]^{-1} \cdot [Z_F^{a,b,c}] \cdot [A] \quad (5.24)$$

De modo inteiramente análogo ao que fizemos com as equações escritas em grandezas de fase, podemos prosseguir e obter o valor da corrente de falta e das tensões durante a falta em toda a rede, incluindo os casos em que a matriz de impedâncias de falta é não definida e onde, portanto, precisamos usar a matriz de admitâncias de falta, cujas equações são:

$$[I_{Fq}^{0,1,2}] = \left[[Z_F^{0,1,2}] + [Z_{qq}^{0,1,2}] \right]^{-1} \cdot [V_{0q}^{0,1,2}]. \quad (5.25)$$

No caso da utilização de admitâncias de falta, o conjunto de equações será:

$$\begin{cases} [V_{Fq}^{0,1,2}] = \left[[I] + [Z_{qq}^{0,1,2}] \cdot [Y_F^{0,1,2}] \right]^{-1} \cdot [V_{0q}^{0,1,2}] \\ [I_{Fq}^{0,1,2}] = [Y_F^{0,1,2}] \cdot \left[[I] + [Z_{qq}^{0,1,2}] \cdot [Y_F^{0,1,2}] \right]^{-1} \cdot [V_{0q}^{0,1,2}] \end{cases} \quad (5.26)$$

Para as tensões nas barras da rede, exceto a barra $q^{0,1,2}$ que está submetida à falta, teremos:

$$[V_{Fi}^{0,1,2}] = [V_{0i}^{0,1,2}] - [Z_{iq}^{0,1,2}] \cdot [I_{Fq}^{0,1,2}] \quad (5.27)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq q$.

Para as correntes na rede temos:

$$[i_{rs}^{0,1,2}] = \sum [y_{rs,\rho\sigma}^{0,1,2}] \cdot [V_{F\rho}^{0,1,2} - V_{F\sigma}^{0,1,2}] \quad (5.28)$$

com ρ e σ abrangendo as extremidades de todas as ligações mutuamente acopladas com rs , e incluindo a própria ligação rs . Ou seja, os elementos $[y_{rs,\rho\sigma}^{0,1,2}]$ são os elementos não nulos da linha rs da matriz admitâncias primitiva.

5.4 Obtenção das Equações em Casos Particulares

Aqui desenvolveremos as fórmulas gerais apresentadas, em alguns casos particulares, para justificar, com auxílio da álgebra matricial, as fórmulas já obtidas com o auxílio do teorema de Thévenin.

5.4.1 Defeito trifásico envolvendo a terra

A **Figura 5.3** ilustra o tipo de defeito em questão.

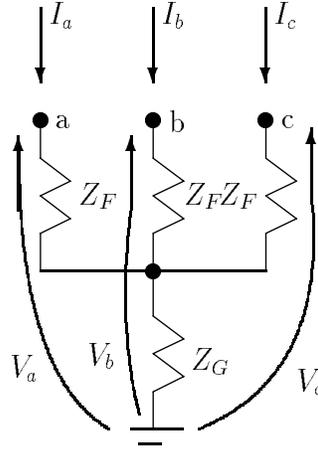


Figura 5.3: Defeito trifásico simétrico à terra.

Para obtermos a matriz de falta, observemos que:

$$\begin{cases} V_a = Z_F \cdot I_a + Z_G \cdot (I_a + I_b + I_c) \\ V_b = Z_F \cdot I_b + Z_G \cdot (I_a + I_b + I_c) \\ V_c = Z_F \cdot I_c + Z_G \cdot (I_a + I_b + I_c) \end{cases} \quad (5.29)$$

Matricialmente exprimimos:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_F + Z_G) & Z_G & Z_G \\ Z_G & (Z_F + Z_G) & Z_G \\ Z_G & Z_G & (Z_F + Z_G) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Em termos de componentes simétricos temos:

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (Z_F + Z_G) & Z_G & Z_G \\ Z_G & (Z_F + Z_G) & Z_G \\ Z_G & Z_G & (Z_F + Z_G) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Operando resulta finalmente:

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_F + 3Z_G) & 0 & 0 \\ 0 & Z_F & 0 \\ 0 & 0 & Z_F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Da equação (5.32), a matriz de falta é:

$$[Z_F^{0,1,2}] = \begin{bmatrix} (Z_F + 3Z_G) & 0 & 0 \\ 0 & Z_F & 0 \\ 0 & 0 & Z_F \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Supondo os geradores da rede como fontes de tensão simétricas e equilibradas, como a própria rede é suposta balanceada, resultará que o vetor de tensões pré-falta conterá tensões de fase de igual módulo e defasagem de 120° entre si. Assim:

$$[V_{0q}^{a,b,c}] = \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \cdot [V_{0q}^a]. \quad (5.34)$$

Aplicando a transformação de componentes simétricos, temos que:

$$[V_{0q}^{0,1,2}] = [A]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \cdot [V_{0q}^a] = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{0q}^a \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Aplicando a equação (5.25), resulta:

$$[I_{Fq}^{0,1,2}] = \begin{bmatrix} I_{Fq}^0 \\ I_{Fq}^1 \\ I_{Fq}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_F + 3Z_G + Z_{qq}^0) & 0 & 0 \\ 0 & (Z_F + Z_{qq}^1) & 0 \\ 0 & 0 & (Z_F + Z_{qq}^2) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ V_{0q}^a \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Ou ainda:

$$\begin{bmatrix} I_{Fq}^0 \\ I_{Fq}^1 \\ I_{Fq}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V_{0q}^a}{(Z_F + Z_{qq}^1)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Notamos que, conforme se poderia esperar, pois a falta é trifásica simétrica e as excitações simétricas equilibradas, só temos corrente sequência positiva e o seu valor é dado pelo quociente da tensão de sequência positiva pré-falta na barra q, pela soma da impedância de falta, de fase, com a impedância de entrada da barra q na sequência positiva.

Este é exatamente o resultado obtido com a aplicação do teorema de Thévenin, bastando reconhecer que:

$$\begin{cases} V_{th} = V_{0q}^a \\ Z_{th}^1 = Z_{qq}^1 \end{cases} . \quad (5.38)$$

As tensões nas demais barras da rede são dadas por:

$$V_{Fi}^1 = V_{oi}^1 - Z_{iq}^1 \cdot I_{Fq}^1 \quad (i = 1, 2, \dots, n \text{ e } i \neq q) . \quad (5.39)$$

As correntes nas ligações da rede de sequência positiva, que não contém impedâncias mútuas, são dadas por:

$$i_{rs}^1 = \frac{V_{Fr}^1 - V_{Fs}^1}{z_{rs}} = \frac{(V_{0r}^1 - V_{0s}^1) - \frac{(Z_{rq} - Z_{sq}) \cdot V_{0q}^a}{(Z_F + Z_{qq}^1)}}{z_{rs}} . \quad (5.40)$$

A equação (5.40) se justifica a partir da equação (5.28), pois em uma rede sem mútuas a matriz de admitâncias primitiva é diagonal e portanto as próprias são diferentes de zero. Assim, na equação (5.28) $\rho\sigma = rs$ e $y_{rs,rs} = 1/z_{rs}$, onde z_{rs} é a impedância da ligação rs .

5.4.2 Defeito trifásico equilibrado não envolvendo a Terra

A **Figura 5.4** ilustra o defeito trifásico simétrico, não envolvendo a terra.

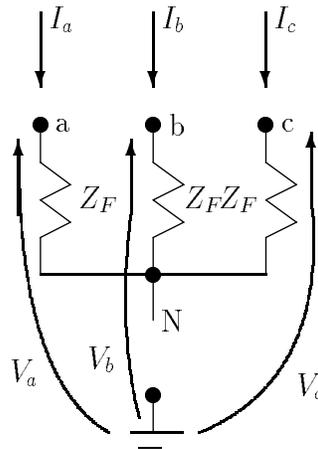


Figura 5.4: Defeito trifásico simétrico sem envolver a terra.

Nesse caso, a matriz impedância de falta é não definida. Trabalharemos com a matriz de admitância de falta. Para isso, observemos na **Figura 5.4** a presença do nó N, cuja corrente impressa é zero. Isto nos sugere a obtenção da matriz $[Y_{BARRA}]$ indefinida da rede constituída pelos nós a, b, c e N, e eliminação de N por redução de Kron. Temos, pelo algoritmo da formação de $[Y_{BARRA}]$ para redes sem mútuas:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_n = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_F & 0 & 0 & -Y_F \\ 0 & Y_F & 0 & -Y_F \\ 0 & 0 & Y_F & -Y_F \\ -Y_F & -Y_F & -Y_F & 3Y_F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_N \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

onde $Y_F = 1/Z_F$.

Por redução de Kron obtemos:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \frac{Y_F}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Assim, a matriz admitâncias de falta $[Y_F^{a,b,c}]$ fica:

$$[Y_F^{a,b,c}] = \frac{Y_F}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Transformando para componentes simétricos obtemos:

$$[Y_F^{0,1,2}] = [A]^{-1} \cdot [Y_F^{a,b,c}] \cdot [A] = \frac{Y_F}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_F & 0 \\ 0 & 0 & Y_F \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Como no caso anterior, as excitações simétricas e equilibradas, teremos apenas tensões pré-falta de sequência positiva. Utilizando a equação (5.26), temos que:

$$[I_{Fq}^{0,1,2}] = [Y_F^{0,1,2}] \cdot \left[[I] + [Z_{qq}^{0,1,2}] \cdot [Y_F^{0,1,2}] \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ V_{0q}^a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$[I_{Fq}^{0,1,2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_F & 0 \\ 0 & 0 & Y_F \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{qq}^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{qq}^1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{qq}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_F & 0 \\ 0 & 0 & Y_F \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ V_{0q}^a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$[I_{Fq}^{0,1,2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_F & 0 \\ 0 & 0 & Y_F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + Z_{qq}^1 \cdot Y_F) & 0 \\ 0 & 0 & (1 + Z_{qq}^2 \cdot Y_F) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ V_q^a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$[I_{Fq}^{0,1,2}] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V_q}{(Z_F + Z_{qq}^1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

que é um resultado idêntico ao caso anterior.

5.4.3 Falta dupla-fase

A **Figura 5.5** ilustra as grandezas envolvidas na determinação da matriz de falta. Aqui também temos uma impedância de falta infinita, e portanto devemos utilizar a matriz de admitâncias de falta.

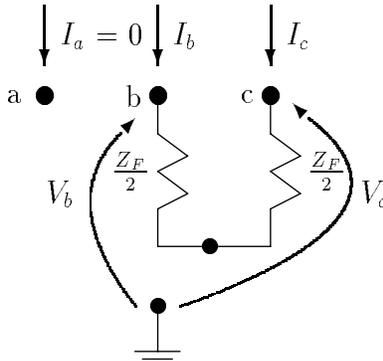


Figura 5.5: Obtenção da matriz de falta para defeito dupla-fase.

Da **Figura 5.5**, podemos equacionar:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_F & -Y_F \\ 0 & -Y_F & Y_F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Daí:

$$[Y_F^{a,b,c}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot Y_F \quad (5.50)$$

$$[Y_F^{0,1,2}] = [A]^{-1} \cdot [Y_F^{a,b,c}] \cdot [A] = Y_F \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Aplicando novamente a equação (5.26), temos:

$$[I_{F_q}^{0,1,2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_F & -Y_F \\ 0 & -Y_F & Y_F \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{qq}^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{qq}^1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{qq}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_F & -Y_F \\ 0 & -Y_F & Y_F \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ V_{0q}^a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$[I_{F_q}^{0,1,2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_F & -Y_F \\ 0 & -Y_F & Y_F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + Z_{qq}^1 \cdot Y_F) & -Z_{qq}^1 \cdot Y_F \\ 0 & -Z_{qq}^2 \cdot Y_F & (1 + Z_{qq}^2 \cdot Y_F) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ V_{0q}^a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$[I_{F_q}^{0,1,2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_F & -Y_F \\ 0 & -Y_F & Y_F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+Z_{qq}^2 \cdot Y_F)}{DET} & \frac{Z_{qq}^1 \cdot Y_F}{DET} \\ 0 & \frac{Z_{qq}^2 \cdot Y_F}{DET} & \frac{(1+Z_{qq}^1 \cdot Y_F)}{DET} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ V_{0q}^a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$[I_{F_q}^{0,1,2}] = \frac{1}{DET} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_F & -Y_F \\ 0 & -Y_F & Y_F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ V_{0q}^a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

onde

$$DET = [1 + Y_F \cdot (Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2)] \quad (5.56)$$

$$\begin{bmatrix} I_{F_q}^0 \\ I_{F_q}^1 \\ I_{F_q}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{V_{0q}^a}{(Z_F + Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2)} \quad (5.57)$$

que é um resultado já obtido pelo uso do teorema de Thévenin.

A aplicação da primeira das equações (5.26), fornece:

$$[V_{F_q}^{0,1,2}] = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{qq}^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{qq}^1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{qq}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_F & -Y_F \\ 0 & -Y_F & Y_F \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ V_{0q}^a \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Desenvolvendo temos:

$$\begin{bmatrix} V_{Fq}^0 \\ V_{Fq}^1 \\ V_{Fq}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (Z_{qq}^2 + Z_F) \\ Z_{qq}^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{V_{oq}^a}{(Z_F + Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2)}. \quad (5.59)$$

Para as tensões nas demais barras, a equação (5.27) fornece:

$$\begin{bmatrix} V_{Fi}^{0,1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{oi}^{0,1,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{iq}^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{iq}^1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{iq}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{V_{oq}^a}{(Z_F + Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2)} \quad (5.60)$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} V_{Fi}^0 \\ V_{Fi}^1 \\ V_{Fi}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{oi}^1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ Z_{iq}^1 \\ -Z_{iq}^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{V_{oq}^a}{(Z_F + Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2)} \quad (5.61)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq q$.

Para a distribuição de correntes na rede temos:

$$\begin{bmatrix} i_{rs}^{0,1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{rs,rs}^0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{rs,rs}^1 & 0 \\ 0 & 0 & y_{rs,rs}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{Fr}^0 - V_{Fs}^0 \\ V_{Fr}^1 - V_{Fs}^1 \\ V_{Fr}^2 - V_{Fs}^2 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

pois estamos admitindo que não há acoplamentos mútuos nas redes de sequência positiva e negativa.

Finalmente, reunindo todos os resultados já obtidos, temos:

$$\begin{bmatrix} i_{rs}^0 \\ i_{rs}^1 \\ i_{rs}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(V_{Fr}^1 - V_{Fs}^1)}{z_{rs}^1} \\ \frac{(V_{Fr}^2 - V_{Fs}^2)}{z_{rs}^2} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

onde z_{rs}^1 e z_{rs}^2 são as impedâncias próprias da ligação rs nas sequências positiva e negativa, respectivamente. É claro que na maioria dos casos (exceto nas máquinas rotativas) teremos $z_{rs}^1 = z_{rs}^2 = z_{rs}$.

5.4.4 Curto fase-terra

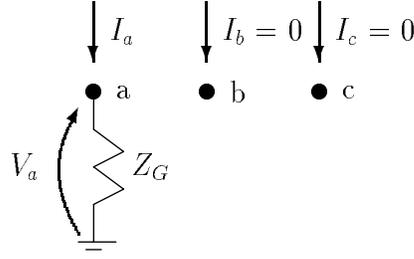


Figura 5.6: Defeito fase-terra através de impedância.

A **Figura 5.6** refere-se ao caso em análise. Podemos notar que novamente há impossibilidade da utilização da matriz de impedâncias de falta.

Por inspeção escrevemos:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Logo, a admitância de falta fica:

$$[Y_F^{a,b,c}] = \begin{bmatrix} Y_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

A transformação em componentes simétricos fornece:

$$[Y_F^{0,1,2}] = [A]^{-1} \cdot [Y_F^{a,b,c}] \cdot [A] = \frac{Y_G}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

Aplicando a segunda equação de (5.26) resulta:

$$[I_{Fq}^{0,1,2}] = \frac{Y_G}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{qq}^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{qq}^1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{qq}^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{Y_G}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot [V_{0q}^{0,1,2}] \quad (5.67)$$

$$[I_{Fq}^{0,1,2}] = \frac{Y_G}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1 + Y_G \cdot Z_{qq}^0/3) & Z_{qq}^0 \cdot Y_G/3 & Z_{qq}^0 \cdot Y_G/3 \\ Z_{qq}^1 \cdot Y_G/3 & (1 + Y_G \cdot Z_{qq}^1/3) & Z_{qq}^1 \cdot Y_G/3 \\ Z_{qq}^2 \cdot Y_G/3 & Z_{qq}^2 \cdot Y_G/3 & (1 + Y_G \cdot Z_{qq}^2/3) \end{bmatrix}^{-1} \cdot [V_{0q}^{0,1,2}]. \quad (5.68)$$

Para simplificar o desenvolvimento façamos:

$$\left. \begin{aligned} Z_{qq}^0 \cdot Y_G/3 &= r \\ Z_{qq}^1 \cdot Y_G/3 &= s \\ Z_{qq}^2 \cdot Y_G/3 &= t \end{aligned} \right\}. \quad (5.69)$$

A matriz a ser invertida fica da forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} (1+r) & r & r \\ s & (1+s) & s \\ t & t & (1+t) \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

A inversa de $[M]$ fica:

$$[M]^{-1} = \frac{1}{DET} \cdot \begin{bmatrix} (1+s+t) & -r & -r \\ -s & (1+r+t) & -s \\ -t & -t & (1+r+s) \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

onde: .

$$DET = (1+r+s+t). \quad (5.72)$$

Logo:

$$[I_F^{0,1,2}] = \frac{Y_G}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{DET} \cdot \begin{bmatrix} (1+s+t) & -r & -r \\ -s & (1+r+t) & -s \\ -t & -t & (1+r+s) \end{bmatrix} \cdot [V_{0q}^{0,1,2}]. \quad (5.73)$$

Efetuando o produto matricial:

$$[I_{Fq}^{0,1,2}] = \frac{Y_G}{3 \cdot DET} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot [V_{0q}^{0,1,2}]. \quad (5.74)$$

Lembrando que:

$$[V_{0q}^{0,1,2}] = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{0q}^a \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ temos que:}$$

$$\begin{bmatrix} I_{Fq}^0 \\ I_{Fq}^1 \\ I_{Fq}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{V_{0q}^a}{(Z_{qq}^0 + Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2 + 3Z_G)}. \quad (5.75)$$

A tensão na barra em falta fica, a partir da primeira equação de (5.26), como:

$$[V_{Fq}^{0,1,2}] = \frac{1}{DET} \cdot \begin{bmatrix} (1+s+t) & -r & -r \\ -s & (1+r+t) & -s \\ -t & -t & (1+r+s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ V_{0q}^a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

$$[V_{Fq}^{0,1,2}] = \frac{V_{0q}^a}{DET} \cdot \begin{bmatrix} -r \\ (1+r+t) \\ -t \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

Substituindo DET , r e t pelos seus valores, vem:

$$[V_{Fq}^{0,1,2}] = \frac{V_{0q}^{0,1,2}}{(Z_{qq}^0 + Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2 + 3Z_G)} \cdot \begin{bmatrix} -Z_{qq}^0 \\ (Z_{qq}^0 + Z_{qq}^2 + 3Z_G) \\ -Z_{qq}^2 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

As tensões nas demais barras podem ser obtidas pela equação (5.27):

$$[V_{Fi}^{0,1,2}] = [V_{0i}^{0,1,2}] - \begin{bmatrix} Z_{iq}^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{iq}^1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{iq}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{V_{0q}^a}{(Z_{qq}^0 + Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2 + 3Z_G)}. \quad (5.79)$$

Desenvolvendo, vem:

$$\begin{bmatrix} V_{Fi}^0 \\ V_{Fi}^1 \\ V_{Fi}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-Z_{iq} \cdot V_{0q}^a}{(Z_{qq}^0 + Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2 + 3Z_G)} \\ \frac{V_{0i}^1 - Z_{iq}^1 \cdot V_{0q}^a}{(Z_{qq}^0 + Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2 + 3Z_G)} \\ \frac{-Z_{iq}^2 \cdot V_{0q}^a}{(Z_{qq}^0 + Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2 + 3Z_G)} \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq q$.

A distribuição de correntes pelas redes sequenciais pode ser obtida por aplicação da equação (5.81)

$$\begin{bmatrix} i_{rs}^0 \\ i_{rs}^1 \\ i_{rs}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum [y_{rs,\rho\sigma}^0] \cdot [V_{F\rho} - V_{F\sigma}] \\ (V_{Fr}^1 - V_{Fs}^1) / z_{rs}^1 \\ (V_{Fr}^2 - V_{Fs}^2) / z_{rs}^2 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

onde se levou em conta que não há acoplamentos mútuos nas sequências positiva e negativa, e que a matriz $[y_{rs,\rho\sigma}^{0,1,2}]$ é diagonal em cada submatriz que a constitui.

A vantagem da análise matricial é que as fórmulas já se encontram em forma adequada para a aplicação em computador, e os resultados possíveis abrangem o perfil de tensão e a distribuição de correntes por toda a rede.

5.5 Hipóteses Simplificadoras

O equacionamento desenvolvido até agora é, como já mencionamos, bastante geral e permite levar em conta a corrente pré-falta. Na prática, no entanto, é comum a adoção de hipóteses simplificadoras em estudos de planejamento, onde não se justifica grande refinamento no cálculo de defeitos, já que a própria carga é uma variável não-determinística. Tais hipóteses resumem-se em:

- Desprezam-se todas as conexões shunt da rede, inclusive a carga.
- Admite-se a tensão de todos os geradores constantes em módulo e fase e igual a 1p.u..

Dentro destas hipóteses, o modelo de sequência positiva da rede fica ilustrado na **Figura 5.7**, onde as f.e.m. dos geradores foram substituídas por uma única matriz, e uma nova referência fictícia, criada apenas para os cálculos de defeito.

A matriz $[Z_{BARRA}]$ da rede fornece as impedâncias de entrada de qualquer barra em relação à referência, bem como as necessárias transferências.

As redes de sequência negativa e zero são totalmente passivas e serão representadas por suas matrizes de impedância nodal de sequência.

A **Figura 5.8** ilustra o caso de um defeito sólido entre uma fase e terra na barra q, com a corrente calculada pela expressão:

$$I_F^0 = I_F^1 = I_F^2 = \frac{1,0}{(Z_{qq}^0 + Z_{qq}^1 + Z_{qq}^2)}.$$

Fórmulas simplificadas para as tensões em toda a rede durante a falta, para a corrente de falta e para as distribuições de corrente, são imediatamente obtidas das fórmulas gerais.

5.6 Defeitos Longitudinais

5.6.1 Condição de Circuito Aberto

As condições que mais interessam de circuito aberto são: abertura de uma fase e abertura de duas fases. A abertura das três fases é de pouca importância prática.

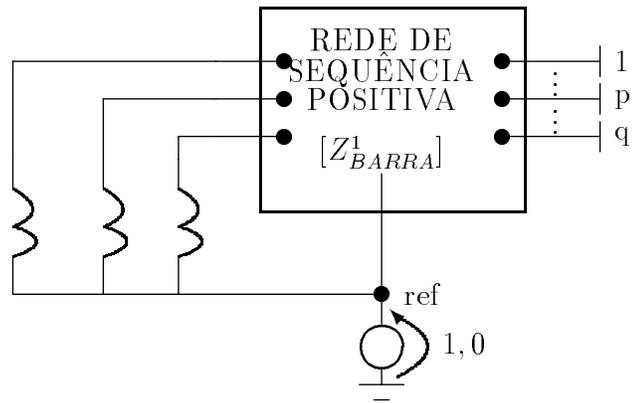


Figura 5.7: Rede de sequência positiva simplificada.

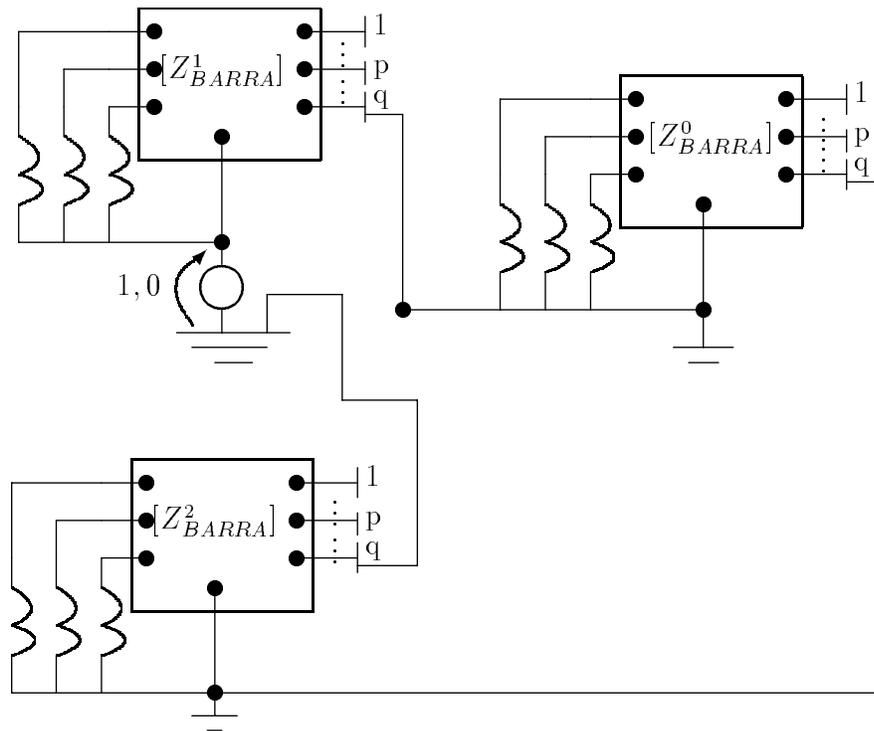


Figura 5.8: Defeito fase a terra sólido.

A análise dessas condições é feita utilizando componentes simétricos de maneira similar a empregada para as condições de curto-circuito, que é fazendo as restrições na tensão e corrente produzida pela falta, no ponto de falta.

5.6.2 Abertura de uma fase

É conveniente considerar a abertura da fase a do circuito dado, como mostra a **Figura 5.9**. As posições P e Q significam o local que ocorreu a abertura da fase.

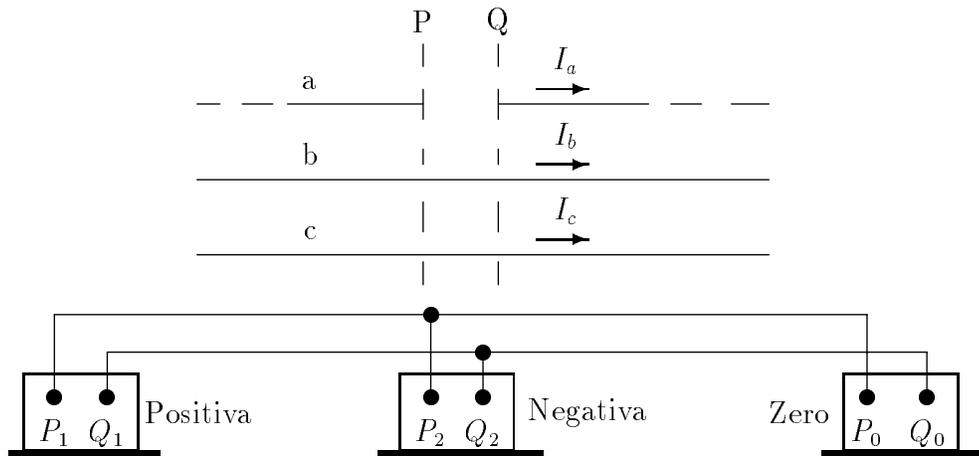


Figura 5.9: Abertura de uma fase.

Escrevendo as restrições de tensão e corrente no local da falta, temos as seguintes equações:

$$\left. \begin{aligned} (V_a)_{PQ} &= (V_a)_P - (V_a)_Q \neq 0 \\ (V_b)_{PQ} &= (V_b)_P - (V_b)_Q = 0 \\ (V_c)_{PQ} &= (V_c)_P - (V_c)_Q = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.82)$$

$$\left. \begin{aligned} I_a &= 0 \\ I_b &\neq 0 \\ I_c &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.83)$$

Os símbolos $(V_a)_{PQ}$, $(V_b)_{PQ}$ e $(V_c)_{PQ}$, representam as quedas de tensão ao longo das fases dos condutores de P a Q.

As componentes de sequência das quedas de tensão são dadas por

$$\left. \begin{aligned} (V_1)_{PQ} &= \frac{1}{3} [(V_a)_{PQ} + a(V_b)_{PQ} + a^2(V_c)_{PQ}] = \frac{1}{3} (V_a)_{PQ} \\ (V_2)_{PQ} &= \frac{1}{3} [(V_a)_{PQ} + a^2(V_b)_{PQ} + a(V_c)_{PQ}] = \frac{1}{3} (V_a)_{PQ} \\ (V_0)_{PQ} &= \frac{1}{3} [(V_a)_{PQ} + (V_b)_{PQ} + (V_c)_{PQ}] = \frac{1}{3} (V_a)_{PQ} \end{aligned} \right\} \quad (5.84)$$

sendo $(V_b)_{PQ}$ e $(V_c)_{PQ}$ iguais a zero. As quedas de tensão entre P e Q de componentes de sequência positiva, negativa e zero são iguais.

Considerando as componentes de fase de corrente, com $I_a = 0$, temos que

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3} (I_a + aI_b + a^2I_c) = \frac{1}{3} (aI_b + a^2I_c) \\ I_2 &= \frac{1}{3} (I_a + a^2I_b + aI_c) = \frac{1}{3} (a^2I_b + aI_c) \\ I_0 &= \frac{1}{3} (I_a + I_b + I_c) = \frac{1}{3} (I_b + I_c) \end{aligned} \right\} \quad (5.85)$$

assim,

$$I_1 + I_2 + I_0 = 0 \quad (5.86)$$

devido $1 + a + a^2 = 0$. Por isso

$$I_2 + I_0 = -I_1 \quad (5.87)$$

As restrições impostas pela falta, como expressas pelas equações (5.84) e (5.87), são vistas para serem satisfeitas pela interconexão dos circuitos de sequência mostrados na **Figura 5.9**. Nota-se que, em cada circuito de sequência, a abertura do circuito nos pontos corresponde as posições P e Q, isto é, os pontos P_1 e Q_1 , P_2 e Q_2 e P_0 e Q_0 .

Consideremos Z_1 , Z_2 e Z_0 as impedâncias de sequência positiva, negativa e zero medidas entre P_1 e Q_1 , P_2 e Q_2 e P_0 e Q_0 respectivamente, na **Figura 5.9**. Assim, o circuito de sequência positiva visto dos pontos P_1 e Q_1 , equivale a uma tensão de sequência positiva em série com a impedância Z_1 , sendo a tensão dada (teorema de Thevénin) por $Z_1 \cdot I_{1pf}$, onde I_{1pf} é o valor da corrente pré-falta de sequência positiva na fase a do circuito.

A partir da **Figura 5.9**, as correntes de sequência no circuito na condição de falta são dadas por

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{Z_1 \cdot I_{1pf}}{Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_0}{Z_2 + Z_0}} \\ I_2 &= -\frac{Z_0 \cdot I_1}{Z_2 + Z_0} \\ I_0 &= -\frac{Z_2 \cdot I_1}{Z_2 + Z_0} \end{aligned} \right\} \quad (5.88)$$

a partir daí, as correntes nas fases do circuito podem ser calculadas por

$$\left. \begin{aligned} I_a &= 0 \\ I_b &= \left[\frac{(a^2-1)Z_2+(a^2-a)Z_0}{Z_1Z_2+Z_2Z_0+Z_0Z_1} \right] \cdot Z_1 I_{1pf} \\ I_c &= \left[\frac{(a-1)Z_2+(a-a^2)Z_0}{Z_1Z_2+Z_2Z_0+Z_0Z_1} \right] \cdot Z_1 I_{1pf} \end{aligned} \right\} \quad (5.89)$$

Nota-se que as correntes de seqüência e as correntes de fase são zero, se a condição pré-falta de corrente no circuito for zero.

5.6.3 Abertura de duas fases

Para este caso é conveniente assumir a abertura das fase b e c, como mostra a **Figura 5.10**.

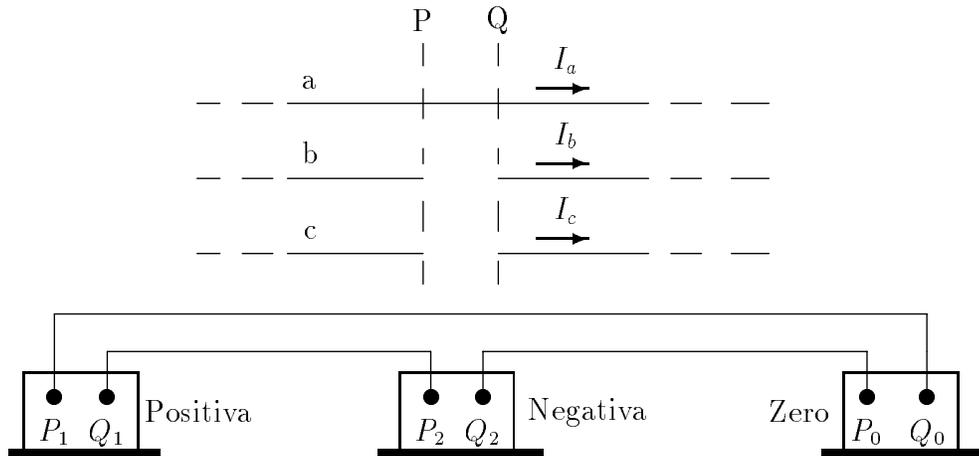


Figura 5.10: Abertura de duas fases.

Procedendo como no caso anterior, as restrições de tensão e corrente no ponto de falta são:

$$\left. \begin{aligned} (V_a)_{PQ} &= (V_a)_P - (V_a)_Q = 0 \\ (V_b)_{PQ} &= (V_b)_P - (V_b)_Q \neq 0 \\ (V_c)_{PQ} &= (V_c)_P - (V_c)_Q \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

$$\left. \begin{aligned} I_a &\neq 0 \\ I_b &= 0 \\ I_c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.91)$$

As componentes de seqüência de queda de tensão são dadas por

$$\left. \begin{aligned} (V_1)_{PQ} &= \frac{1}{3} [(V_a)_{PQ} + a(V_b)_{PQ} + a^2(V_c)_{PQ}] = \frac{1}{3} [a(V_b)_{PQ} + a^2(V_c)_{PQ}] \\ (V_2)_{PQ} &= \frac{1}{3} [(V_a)_{PQ} + a^2(V_b)_{PQ} + a(V_c)_{PQ}] = \frac{1}{3} [a^2(V_b)_{PQ} + a(V_c)_{PQ}] \\ (V_0)_{PQ} &= \frac{1}{3} [(V_a)_{PQ} + (V_b)_{PQ} + (V_c)_{PQ}] = \frac{1}{3} [(V_b)_{PQ} + (V_c)_{PQ}] \end{aligned} \right\} \quad (5.92)$$

destas equações conclui-se que

$$(V_1)_{PQ} + (V_2)_{PQ} + (V_0)_{PQ} = 0. \quad (5.93)$$

Da mesma forma verifica-se que as correntes de sequência são dadas por

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{3} (I_a + aI_b + a^2I_c) = \frac{1}{3}I_a \\ I_2 &= \frac{1}{3} (I_a + a^2I_b + aI_c) = \frac{1}{3}I_a \\ I_0 &= \frac{1}{3} (I_a + I_b + I_c) = \frac{1}{3}I_a \end{aligned} \right\} \quad (5.94)$$

Pode-se verificar que as correntes de sequência são iguais.

As restrições impostas pela falta expressas pelas equações 5.93 e 5.94 são satisfeita pela interconexão dos circuitos de sequência como mostra a **Figura 5.10**.

Procedendo como no caso anterior, a partir da **Figura 5.10**, as correntes de sequência no circuito de falta são dadas por

$$I_1 = I_2 = I_0 = \frac{Z_1 I_{1pf}}{Z_1 + Z_2 + Z_0}. \quad (5.95)$$

A partir dessas correntes, as correntes nas fases são calculadas por

$$\left. \begin{aligned} I_a &= \frac{3Z_1 I_{1pf}}{Z_1 + Z_2 + Z_0} \\ I_b &= 0 \\ I_c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.96)$$

Nota-se também, que as correntes de sequência e as correntes de fase são nulas se a condição de corrente pré-falta é também nula.

Capítulo 6

ANÁLISE DE CONTINGÊNCIAS[2]

6.1 Introdução

Durante o desenvolvimento dos estudos de planejamento, há necessidade de analisar a operação do sistema em regime de contingência, visto que nenhuma rede elétrica irá operar sempre em condição normal. Há necessidade de verificar se os critérios de desempenho continuam respeitados, e em caso contrário uma cuidadosa análise técnico-econômica deverá ser feita para se decidir ou não pelo comissionamento de reforços que eliminem os pontos críticos definidos pela análise de contingências.

As perturbações no sistema podem ser divididas, dentro de uma visão macroscópica, em três grandes categorias quanto à sua duração:

- **Transitórios eletromagnéticos**

Originados por raios, surtos de manobra, sendo seu período de influência governado pelas constantes de tempo das linhas de transmissão e equipamentos associados. Sua duração é da ordem de microssegundos a ciclos.

- **Transitórios eletromecânicos**

São transitórios, via de regra que se seguem aos eletromagnéticos (um curto-circuito devido a uma sobretensão, por exemplo) e sua duração é tal que ambas as dinâmicas, elétrica e mecânica, do sistema são excitadas. A sua duração é associada às constantes de tempo eletromecânicas das máquinas síncronas, e o período de simulação usualmente considerado abrange de 1 a 5 segundos para estabilidade transitória.

- **Perturbações de regime permanente**

É o caso em que a perda de uma linha ou equipamento se faz por um período de tempo suficiente para que o sistema alcance uma nova condição de regime.

Nesse capítulo, nos ocuparemos das técnicas analíticas referentes a este tipo de perturbação.

Em se tratando de grandes redes, o número de contingências a ser analisado para dar uma idéia global do comportamento do sistema é tão elevado que torna impraticável o uso dos programas normais do fluxo de carga nessa análise, devido ao tempo de computador que seria necessário.

Técnicas aproximadas de cálculo foram desenvolvidas com vistas a possibilitar o processamento de um grande número de casos de contingência, em um tempo equivalente ao processamento do caso base empregando o algoritmo de Newton-Raphson completo com todos os seus recursos.

O objetivo desse tópico é enfocar os métodos mais utilizados pela engenharia de sistemas e proporcionar a base necessária para que o usuário possa discernir qual o método apropriado a cada situação.

Iniciaremos a análise com o método mais simples, e por isso mesmo mais rápido e utilizado hoje em dia, embora tenha aplicação restrita ao problema de verificação de sobrecargas.

6.2 Fluxo de Potência em Corrente Contínua (FPDC)

Nesse método de cálculo, modelam-se apenas os fluxos ativos, ignorando-se o fluxo de reativos e desprezando-se todas as condutâncias. O resultado é que se obtém um modelo linear da rede, apropriado para o estudo rápido de contingências simples e múltiplas.

O modelamento é facilmente obtido como se segue:

$$P_i = R_e \left(\dot{V}_i^* \sum_{j=1}^N Y_{ij} \cdot \dot{V}_j \right) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (6.1)$$

Antes de desenvolver a expressão acima para uma forma mais conveniente, façamos a seguinte hipótese:

- As tensões em todas as barras serão assumidas como constantes e iguais a 1,0p.u. Essa hipótese é razoável em vista da hipótese anterior, dita no início, muito mais drástica e que se resume em desprezar os fluxos de reativos e todas as condutâncias da rede.

As incógnitas do problema serão as fases das tensões, e como uma delas deverá ser sempre especificada como referência, podemos deletar uma das equações (equação

de P_s), que é a que corresponde à barra adotada como referência. Note-se que como todas as conexões para a terra são desprezadas, a matriz $[Y_{BARRA}]$ da rede é indefinida, pois a soma dos elementos de qualquer dessas linhas é nula. A adoção de uma referência na rede (abandonando-se a referência usual, que é a terra) permitirá proceder à inversão da $[Z_{BARRA}]$ que, como veremos a seguir, é um ponto básico na obtenção da solução.

Isto posto, temos

$$Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} = jB_{ij} \quad (6.2)$$

$$\text{com } \begin{cases} B_{ij} = -x_{ij}/z_{ij}^2 \\ G_{ij} = r_{ij}/z_{ij}^2 \\ z_{ij}^2 = r_{ij}^2 + x_{ij}^2 = \text{imp. lig. } i - j \end{cases}$$

$$P_i = R_e \left\{ \sum_{j=1}^N e^{-j\delta_i} \cdot e^{+j\delta_j} \cdot (jB_{ij}) \right\} \quad (6.3)$$

Desenvolvendo a equação (6.3) temos:

$$P_i = \sum_{j=1}^N B_{ij} \cdot \text{sen}(\delta_i - \delta_j) \quad (i = 1, 2, \dots, N \text{ e } i \neq s) \quad (6.4)$$

Supondo as diferenças angulares pequenas o suficiente para permitir a aproximação

$$\text{sen}(\delta_i - \delta_j) \cong \delta_i - \delta_j \quad (6.5)$$

obtemos o modelo linear da rede:

$$P_i = \sum_{j=1}^N B_{ij} \cdot (\delta_i - \delta_j). \quad (6.6)$$

A equação (6.6) pode ser rearranjada e colocada na forma

$$P_i = - \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij} \cdot \delta_j + \delta_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N B_{ij} - \sum_{j=i+1}^N B_{ij} \cdot \delta_j \quad (6.7)$$

Lembrando que, com as conexões para a terra desprezadas, teremos

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N B_{ij} = -B_{ii},$$

podemos escrever a equação (6.7) em forma matricial como

$$[P] = -[B_{BARRA}] \cdot [\delta] \quad (\text{sistema de ordem } N-1) \quad (6.8)$$

onde $[B_{BARRA}]$ = matriz $[B_{BARRA}]$ definida com as partes reais das admitâncias desprezadas, conexões para a terra desprezadas e referência na barra swing ($\delta_s = 0$).

Para um dado despacho de geração, se houver uma contingência representada pela perda de uma ou mais ligações, tanto a matriz $[B_{BARRA}]$ quanto o vetor $[\delta]$ alterar-se-ão em relação aos seus valores do caso base, quais sejam: $[B_{BARRA}]^0$ e $[\delta]^0$, obtidos por solução da equação (6.8) para um dado $[P]^0$.

Considerando-se variações $[\Delta Y]$ e $[\Delta \delta]$ em torno dos valores base, teremos

$$[P]^0 = - \left[[B_{BARRA}]^0 + [\Delta B] \right] \cdot \left[[\delta]^0 + [\Delta \delta] \right]. \quad (6.9)$$

Desenvolvendo, vem:

$$[P]^0 = - [B_{BARRA}] \cdot [\delta]^0 - [B_{BARRA}]^0 \cdot [\Delta \delta] - [\Delta B] \cdot [\delta]^0 - [\Delta B] \cdot [\Delta \delta]. \quad (6.10)$$

Abandonando o termo $[\Delta B] \cdot [\Delta \delta]$ e lembrando que $[P]^0 = - [B_{BARRA}]^0 \cdot [\delta]^0$, resulta:

$$[\Delta \delta] = - \left[B_{BARRA}^0 \right]^{-1} \cdot [\Delta B] \cdot [\delta]^0. \quad (6.11)$$

Com as mesmas hipótese feitas até aqui, pode-se mostrar facilmente que o fluxo em uma ligação ij qualquer é dado por:

$$P_{ij} = + B_{ij} \cdot (\delta_i - \delta_j). \quad (6.12)$$

Caso ocorra uma variação em relação ao valor do caso base, teremos:

$$P_{ij} + \Delta P_{ij} = B_{ij} \cdot \left(\delta_i^0 + \Delta \delta_i - \delta_j^0 - \Delta \delta_j \right) \quad (6.13)$$

da qual obtemos:

$$\Delta P_{ij} = B_{ij} \cdot (\Delta \delta_i - \Delta \delta_j). \quad (6.14)$$

Os valores de $\Delta\delta$ são obtidos pelo cálculo da equação (6.11), sendo a variação de fluxo em qualquer ligação de interesse prontamente obtida com auxílio da equação (6.14).

Note-se que a inversa da $[B_{BARRA}]$, que definiremos com $[X_{BARRA}]$, só precisa ser computada uma vez, sendo que essa montagem pode ser feita diretamente por meio do algoritmo usual ou pela triangularização da $[B_{BARRA}]$, considerando a esparsidade, montagem da tabela de fatores e resolução de (N-1) sistemas lineares por substituição de trás para frente, um para cada coluna da matriz inversa.

6.3 Contingências Simples

Suponhamos uma perda da linha de transmissão rs. Vamos analisar seu efeito sobre o fluxo das linhas restantes. A matriz $[\Delta B]$ nesse caso é constituída praticamente só por elementos nulos, excetuando-se.

$$\begin{cases} \Delta B_{rr} = B_{rs} \\ \Delta B_{ss} = B_{rs} \\ \Delta B_{rs} = \Delta Y_{sr} = -B_{rs} \end{cases} . \quad (6.15)$$

Substituindo-se em (6.11), obtemos:

$$[\Delta\delta]^{rs} = -[X_{BARRA}]^0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & B_{rs} & -B_{rs} & \vdots \\ \vdots & -B_{rs} & B_{rs} & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot [\delta]^0 \quad (6.16)$$

ou ainda:

$$[\Delta\delta]^{rs} = -[X_{BARRA}]^0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_1 \\ 0 \\ \vdots \\ K_2 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

com

$$\begin{cases} K_1 = +B_{rs} \cdot \delta_r^0 - B_{rs} \cdot \delta_s^0 \\ K_2 = -B_{rs} \cdot \delta_r^0 + B_{rs} \cdot \delta_s^0 \end{cases} \quad (6.18)$$

A equação (6.17) pode ser ainda colocada em forma mais conveniente para aplicação do teorema da superposição, que poderia ser utilizado como alternativa simplificada ao método da compensação que analisaremos a seguir.

$$[\Delta\delta]^{rs} = -[X_{BARRA}]^0 \cdot \left([\delta_r^0 \cdot \Delta B_r] + \delta_s^0 \cdot [\Delta B_s] \right) \quad (6.19)$$

onde:

$[\Delta B_r]$ = r-ésima coluna da matriz $[\Delta B]$

$[\Delta B_s]$ = s-ésima coluna da matriz $[\Delta B]$

Com o vetor $[\Delta\delta]^{rs}$ é possível obter o fluxo em qualquer ligação ij através de:

$$P_{ij}^{rs} = P_{ij}^0 + B_{ij} \cdot (\Delta\delta_i^{rs} - \Delta\delta_j^{rs}). \quad (6.20)$$

O método descrito, facilmente programável, tem o inconveniente de distorcer os resultados de maneira até certo ponto sensível em alguns casos particulares. Isto se deve ao fato de que o termo desprezado ($[\Delta B] \cdot [\Delta\delta]$) não representa um diferencial de segunda ordem, pois os elementos da matriz de variação das admitâncias ($[\Delta B]$) não constituem diferenciais. Assim sendo, desenvolveremos um método de ataque ao problema de avaliação de fluxo em contingências mais poderoso que o exposto, e que vem sendo utilizado com sucesso em programas de cálculo de confiabilidade baseados em simulação pelos métodos de Monte Carlo.

6.4 Cálculo de Fluxo de Potência para a Rede Modificada Devido a Contingências Múltiplas - Método da Compensação

A aplicação prática do método extremamente simplificado do item anterior conduz a resultados tão mais discrepantes quanto maior o número de linhas envolvidas na contingência em que se pretende averiguar o efeito (contingência múltipla). É para este caso mais geral que está voltada a metodologia de cálculo que se descreve a seguir.

Em estudos de confiabilidade, com simulações do comportamento do sistema no tempo por métodos tipo Monte Carlo, impõe-se o processamento de milhares de fluxo de potência DC, procurando-se averiguar as consequências de perdas de componentes da rede (contingência) e a efetividade de medidas corretivas tipo redespacho de

geração/corte de carga. Armazenando-se, no início da simulação, a tabela de fatores para a matriz $[B_{BARRA}]$, bem como os valores de ângulos para as condições nominais de funcionamento, podem-se calcular os fluxos resultantes em uma rede modificada sem ter que calcular uma nova tabela de fatores para a matriz de admitâncias correspondente, e portanto com um mínimo de recursos computacionais. O objetivo aqui é o de desenvolver um equacionamento que permita o cálculo descrito, lembrando-se que de posse da tabela de fatores, o cálculo dos ângulos para um vetor qualquer de injeções nodais é imediato (basta alterar o vetor de injeções de acordo com as operações de triangularização da matriz).

Assim, imagine-se que a solução do caso base foi calculada permitindo escrever:

$$-[B_{ARRA}]^0 \cdot [\delta^0] = [P^0] \quad (6.21)$$

com $[\delta^0]$ já calculado e $[P^0]$ o vetor de cargas e despachos para condições nominais. Quer-se calcular os valores dos componentes de $[\delta']$, vetor das defasagens angulares para a rede operando com as mesmas injeções nodais, porém afetado pela saída de serviço de um ou mais componentes.

Nessas condições pode-se escrever:

$$-[B_{BARRA}]' \cdot [\delta'] = [P^0] \quad (6.22)$$

onde a linha em superescrito indica valores modificados face à consideração de contingências. Suponhamos que NF linhas ou transformadores se encontram fora de serviço e consideremos:

$[H_j] \triangleq$ matriz quadrada de ordem (N-1) com todos os elementos nulos exceto nas posições:

$$\begin{cases} H_{\rho,\rho} = H_{\sigma,\sigma} = 1 \\ H_{\rho,\sigma} = H_{\sigma,\rho} = -1 \end{cases}$$

onde ρ e σ seriam os extremos da linha j.

Pode-se então escrever que:

$$[B_{BARRA}]' = \left[[B_{BARRA}]^0 - \sum_{j=1}^{NF} b_j \cdot [H_j] \right]. \quad (6.23)$$

Levando a equação (6.23) em (6.22), resulta:

$$-[B_{BARRA}]^0 \cdot [\delta'] + \sum_{j=1}^{NF} b_j \cdot [H_j] \cdot [\delta'] = [P^0]. \quad (6.24)$$

Nas duas últimas equações o termo b_j representa a admitância da ligação j dentro das hipóteses do “Fluxo de carga em corrente contínua”, isto é, desprezada a condutância

da ligação. Pré-multiplicando ambos os membros da equação (6.24) por $[X_{BARRA}] \triangleq [B_{BARRA}]^{-1}$ e rearranjando, vem:

$$[\delta'] = -[X_{BARRA}]^0 \cdot [P^0] + [X_{BARRA}]^0 \sum_{j=1}^{NF} b_j \cdot [H_j] \cdot [\delta']. \quad (6.25)$$

Porém o primeiro produto do segundo membro da equação (6.25) vale $[\delta^0]$, implicando:

$$[\delta'] = [\delta^0] + \sum_{j=1}^{NF} b_j \cdot [X_{BARRA}] \cdot [H_j] \cdot [\delta']. \quad (6.26)$$

Examinemos o produto $[H_j] \cdot [\delta']$, que de forma explícita fornece:

$$\begin{bmatrix} & & \rho & & \sigma & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & 1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & -1 & \cdots & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta'_p \\ \vdots \\ \delta'_\sigma \\ \vdots \\ \delta'_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta\delta'_j \\ \vdots \\ -\Delta\delta'_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

onde $\Delta\delta'_j \triangleq \delta'_\rho - \delta'_\sigma$ é a diferença angular entre os extremos da ligação j.

Multiplicando a equação (6.27) por $b_j \cdot [X_{BARRA}]^0$, resulta:

$$b_j \cdot [X_{BARRA}]^0 \cdot [H_j] \cdot [\delta'] = b_j \cdot \begin{bmatrix} [X_1^t] \cdot [\Delta\delta'_j] \\ [X_2^t] \cdot [\Delta\delta'_j] \\ \vdots \\ [X_{N-1}^t] \cdot [\Delta\delta'_j] \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

onde:

$[X_i^t]$ =transposta da i-ésima coluna de $[X_{BARRA}]^0$, que é idêntica à i-ésima linha devido à simetria da matriz.

$$[\Delta\delta'_j] \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta\delta'_j \\ \vdots \\ -\Delta\delta'_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \dots\rho - \acute{e}sima\ linha \\ \dots\sigma - \acute{e}sima\ linha \end{array} .$$

Assim:

$$b_j \cdot [X_{BARRA}]^0 \cdot [H_j] \cdot [\delta'] = b_j \cdot \begin{bmatrix} (X_{1\rho}^0 - X_{1\sigma}^0) \cdot \Delta\delta'_j \\ \vdots \\ (X_{\rho\rho}^0 - X_{\rho\sigma}^0) \cdot \Delta\delta'_j \\ \vdots \\ (X_{\sigma\rho}^0 - X_{\sigma\sigma}^0) \cdot \Delta\delta'_j \\ \vdots \\ (X_{(N-1)\rho}^0 - X_{(N-1)\sigma}^0) \cdot \Delta\delta'_j \end{bmatrix} . \quad (6.29)$$

Definindo:

$$[X_{\Delta j}^0] \triangleq \begin{bmatrix} (X_{1\rho} - X_{1\sigma}) \\ \vdots \\ (X_{(N-1)\rho} - X_{(N-1)\sigma}) \end{bmatrix}$$

e voltando na equação (6.26), reescrevemos:

$$[\delta'] = [\delta^0] + \sum_{j=1}^{NF} b_j \cdot [X_{\Delta j}^0] \cdot \Delta\delta'_j . \quad (6.30)$$

Para obter a diferença angular entre os extremos de uma linha qualquer l, entre as barras i e k, subtraímos as linhas i e k da equação (6.30), obtendo:

$$[\Delta\delta'_l] = [\Delta\delta_l^0] + \sum_{j=1}^{NF} b_j \cdot [(X_{i\rho}^0 + X_{k\sigma}^0) - (X_{i\sigma}^0 + X_{k\rho}^0)] \cdot \Delta\delta'_j \triangleq \delta'_i - \delta'_k . \quad (6.31)$$

Definindo:

$$A_{l,j} \triangleq b_j \cdot [(X_{i\rho}^0 + X_{k\sigma}^0) - (X_{i\sigma}^0 + X_{k\rho}^0)]$$

podemos escrever dois tipos de equações:

- Linhas fora de serviço

$$\Delta\delta'_k = \Delta\delta_k^0 + \sum_{j=1}^{NF} A_{k,j} \cdot \Delta\delta'_j \quad (k = 1, 2, \dots, NF). \quad (6.32)$$

- Linhas em operação

$$\Delta\delta'_l = \Delta\delta_l^0 + \sum_{j=1}^{NF} A_{l,j} \cdot \Delta\delta'_j \quad (l = 1, 2, \dots, NS) \quad (6.33)$$

onde NS é o número de linhas e transformadores considerados em operação.

Notemos que o sistema de equações (6.32), nas linhas incógnitas $\Delta\delta'_k$ ($k=1,2, \dots, NF$), é um sistema de ordem $(NF \times NF)$, portanto muito menor que a ordem da matriz representando o sistema completo. Resolvendo esse sistema de equações, de modo rápido e com pequena ocupação de memória (face às dimensões reduzidas da matriz dos coeficientes, até o método de Cramer pode ser utilizado), tem-se acesso aos valores de $\Delta\delta'_k$ para as linhas supostas em contingência. Estes valores, se substituídos na equação (6.33), permitiriam calcular diferenças angulares entre os extremos de todas as ligações da rede, o que entretanto não é feito na prática, por exigir o cálculo de todos os $A_{l,j}$, fato que por sua vez exigiria o conhecimento de toda a matriz $[X_{BARRA}]^0$. Computacionalmente, os severos requisitos de memória necessários ao armazenamento da matriz de reatâncias impõe um outro tipo de solução, que passamos a descrever. Admitindo então os $\Delta\delta'_k$ conhecidos para as ligações supostas em contingências, reescreveremos a equação (6.24) como:

$$[B_{BARRA}]^0 \cdot [\delta'] = \left[[P^0] + \sum_{j=1}^{NF} b_j \cdot [H_j] \cdot [\delta'] \right]. \quad (6.34)$$

Lembrando a equação (6.27) e a definição de $[\Delta\delta'_j]$, resulta:

$$[B_{BARRA}]^0 \cdot [\delta'] = \left[[P^0] + \sum_{j=1}^{NF} b_j \cdot [\delta_j] \right] \quad (6.35)$$

onde os vetores $[\Delta\delta'_j]$ são conhecidos para todos os $j=1,2,\dots,NF$.

Então podemos calcular:

$$[P'] \triangleq [P^0] + \sum_{j=1}^{NF} b_j \cdot [\Delta\delta_j]. \quad (6.36)$$

Resolvendo em seguida:

$$[B_{BARRA}]^{\nabla} \cdot [\delta'] = [\bar{P}] \quad (6.37)$$

onde:

$[B_{BARRA}]^{\nabla}$ = matriz de susceptâncias nodais da rede íntegra ($[B_{BARRA}]^0$), triangularizada e armazenada em forma compacta.

$[\bar{P}]$ = vetor $[P']$ modificado pelas operações de triangularização. Note-se, então, que só se torna necessário armazenar a tabela de fatores da matriz $[B_{BARRA}]^0$ relativa à rede inicial. Os elementos $A_{k,j}$ podem ser calculados a partir das colunas da matriz $[X_{BARRA}]^0$ relativas as barras que são extremidades de alguma linha que saiu de serviço.

Como esse número é pequeno, compensa, computacionalmente, obter a cada vez as colunas necessárias do que manter na memória toda a matriz $[X_{BARRA}]^0$, que é completamente cheia no caso de redes conexas.

6.5 Análise de Contingências pelo Método da Matriz de Impedâncias Nodais

O método de análise de contingências que vamos abordar agora, utiliza a matriz $[Z_{BARRA}]$ do sistema e é mais poderoso e flexível que o anterior, podendo ser aplicado a uma grande variedade de problemas, diferentemente do método do Fluxo de Carga em Corrente Contínua que tem aplicação específica na determinação de sobrecargas em ligações (linhas ou transformadores) quando de contingências simples ou múltiplas no sistema.

Nesse item objetivamos enfocar os principais problemas que podem ser atacados com o uso do método da matriz $[Z_{BARRA}]$.

O primeiro conceito importante a ser introduzido é o de redução de redes quando representadas pela matriz $[Z_{BARRA}]$. A condição para que uma barra possa ser eliminada é que a corrente injetada seja nula. No caso da matriz $[Y_{BARRA}]$, a eliminação de qualquer barra é feita com o auxílio da redução de Kron, que implica muitas operações aritméticas. Caso tenhamos a rede representada pela matriz $[Z_{BARRA}]$ e desejarmos eliminar m barras em que as correntes injetadas são nulas, basta promover a deleção das linhas e colunas correspondente a cada uma das barras, sem nenhuma operação aritmética adicional.

A prova é bastante simples e pode ser feita como se segue.

Seja a matriz $[Z_{BARRA}]$ de uma rede qualquer ordenada e particionada de forma que uma das submatrizes seja exatamente aquela correspondente às barras que se quer eliminar.

Então:

$$\begin{bmatrix} [V_R] \\ \cdots \\ [V_N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Z_{RR}] & \vdots & [Z_{RN}] \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ [Z_{NR}] & \vdots & [Z_{NN}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [I_R] \\ \cdots \\ [I_N] \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

Onde o índice R é a parte da rede que deve permanecer, e o índice N a parte que contém as barras que devemos eliminar.

Lembrando que $[I_N] = [0]$, a equação (6.38) resulta em:

$$\begin{cases} [V_R] = [Z_{RR}] \cdot [I_R] \\ [V_N] = [Z_{NR}] \cdot [I_R] \end{cases}. \quad (6.39)$$

A segunda das equações (6.39) pode ser descartada, pois as tensões nas barras eliminadas não são de interesse, e a primeira equação mostra que as tensões e correntes da rede restante estão relacionadas entre si apenas pela submatriz constituída pelas linhas e colunas correspondentes às barras não eliminadas da matriz original, o que completa a prova.

Na análise de contingências pela matriz $[Z_{BARRA}]$ é de interesse calcular apenas as variações de fluxo nas linhas, motivadas pela redistribuição de correntes devida à perda de alguma conexão ou mesmo o fechamento de alguma linha de transmissão, sendo portanto admissível representar a rede na forma mais simples possível. Inicialmente a matriz $[Z_{BARRA}]$ para análise de contingências continha todas as cargas, simuladas através de impedâncias constantes, bem como todas as demais conexões da rede para a terra.

Brown* utiliza um método extremo de simplificação, que consiste em representar a rede apenas pelas suas conexões série e colocar uma impedância arbitrária $(1, 0 + j1, 0)$ para a terra, em alguma barra também arbitrária. Essa conexão é necessária para permitir a montagem da matriz, pois conforme já vimos, a matriz $[Z_{BARRA}]$ só é definida para redes que contenham a referência.

Adotaremos uma representação intermediária entre os dois pontos de vista, qual seja:

As cargas não serão consideradas (exceto as de impedância constante propriamente ditas), pois a experiência demonstrou que os resultados ganharam em precisão com a não representação da carga. A conexão com a terra será suprida pelas capacitâncias de linhas, reatores e capacitores em derivação e admitâncias correspondentes aos transformadores fora da derivação nominal.

A máxima eficiência na computação é obtida fazendo-se pleno uso da técnica de eliminação que decrevermos.

Um engenheiro de planejamento ou operação conhece o sistema que tem em mãos a ponto de identificar, a priori, quais os pontos críticos, bem como as linhas que têm a tendência de se sobrecarregar primeiro devido às contingências nas linhas críticas. Assim, o usuário pode especificar como dado de entrada as barras do sistema que devem

ser mantidas, pois estão associadas ou a linhas críticas ou a linhas limitantes (aquelas que se sobrecarregam em primeiro lugar), ou ainda podem ser barras de geração susceptíveis de ter o despacho alterado.

Definida a área a ser retida, o algoritmo de formação da matriz $[Z_{BARRA}]$ é acionado. Para reduzir ao máximo os requisitos de memória e as operações aritméticas, a formação é iniciada em ponto remoto à área em questão.

Assim que uma determinada barra pertencente ao conjunto das que serão eliminadas tiver todas as ligações computadas, é imediatamente eliminada pela remoção da linha e coluna da matriz $[Z_{BARRA}]$ a ela associadas.

Com isso, a formação da matriz processa-se com uma ocupação mínima de memória, mantendo-se por grande parte do tempo a ordem da matriz mais ou menos constante, pois simultaneamente são adicionadas e deletadas linhas e colunas.

Essa é a principal razão do sucesso do método, pois se fosse necessária a matriz do sistema completo, as restrições de memória o tornariam impraticável, pois a matriz $[Z_{BARRA}]$ contrariamente à sua inversa $[Y_{BARRA}]$, não é uma matriz esparsa.

A análise que se segue foi subdividida de conformidade com cada tipo de problema que pode ser atacado pelo método, sendo que em qualquer caso está implícita a técnica de eliminação que acabamos de abordar, na formação da matriz $[Z_{BARRA}]$ reduzida.

6.5.1 Análise de sobrecargas

Quando ocorre uma contingência no sistema envolvendo a abertura permanente de uma ou mais linhas de transmissão, o sistema transmissor desfalcado pode apresentar problemas de sobrecarga em algum componente. O método que desenvolveremos permite uma previsão das possíveis linhas sobrecarregadas, quando de contingências simples ou múltipla, com um mínimo de tempo de computador. A técnica pode também ser aplicada para verificar a redistribuição de fluxo na rede devido ao fechamento de uma LT, pois o algoritmo de modificação da matriz $[Z_{BARRA}]$ para a remoção de uma ligação é exatamente o mesmo que para o caso de uma adição.

Contingências simples

Suponhamos o caso de verificar o impacto no sistema da abertura de uma LT qualquer.

Para tanto, da matriz reduzida do sistema, extrai-se uma pequena parte relativa apenas às barras terminais da LT em contingência e daquelas em que se quer verificar a variação de fluxos. A matriz extraída é mostrada na Figura a seguir, sendo

a extração citada equivalente a uma redução suplementar da rede limitada às barras de interesse para a contingência em análise.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & a & b & c & d & \cdots & r & s & t & u \\
 a & & & & & & & & & \\
 b & & & & & & & & & \\
 c & & & & & & & & & \\
 d & & & & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & & & & \\
 r & & & & & & & & & \\
 s & & & & & & & & & \\
 t & & & & & & & & & \\
 u & & & & & & & & &
 \end{array}
 \left[Z_{BARRA} \right]$$

A essência do método consiste em simular uma injeção de corrente conveniente em uma das barras terminais da LT que sofrerá a contingência, de modo que o fluxo nessa ligação, antes da abertura, seja exatamente igual ao do caso base de fluxo de carga. Uma corrente injetada permite satisfazer exatamente uma restrição, e a rigor a barra escolhida para essa injeção poderia ser qualquer. Por conveniência adotaremos sempre um dos terminais da ligação removida para a injeção de corrente.

Para o cálculo da corrente a ser injetada, consideramos a equação:

$$[\dot{V}] = [Z_{BARRA}] \cdot [\dot{I}] \quad (6.40)$$

onde

$$[\dot{V}] = \begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \\ \vdots \\ \dot{V}_n \end{bmatrix} \quad e \quad [\dot{I}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dot{I}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} .$$

A ligação que seria aberta é a LT entre as barras p e q.

Da equação (6.40) vem

$$[\dot{V}] = \begin{bmatrix} Z_{1p} \\ Z_{2p} \\ \vdots \\ Z_{pp} \\ Z_{np} \end{bmatrix} \cdot \dot{I}_p . \quad (6.41)$$

O fluxo pré-falta na ligação pq é dado por:

$$\dot{I}_{pq}^0 = \frac{\dot{V}_p^0 - \dot{V}_q^0}{z_{pq}} \quad (6.42)$$

onde o índice ⁰ indica o caso base de fluxo de carga e z_{pq} é a impedância da linha pq.

Da equação (6.41), tem-se:

$$\dot{I}_{pq} = \frac{(Z_{pp} - Z_{qp})}{z_{pq}} \cdot \dot{I}_p \quad (6.43)$$

Igualando \dot{I}_{pq} obtido na equação (6.43) com \dot{I}_{pq}^0 dado pela equação (6.42), resulta o valor adequado de \dot{I}_p

$$\dot{I}_p = \frac{(\dot{V}_p^0 - \dot{V}_q^0)}{(Z_{pp} - Z_{qp})} \quad (6.44)$$

Calculando o valor de \dot{I}_p , a equação (6.41) permite calcular o fluxo em uma linha qualquer rs através de

$$\dot{I}_{rs} = \frac{(Z_{rp} - Z_{sp})}{z_{rs}} \cdot \dot{I}_p \quad (6.45)$$

Para simular a contingência, modifica-se a matriz da equação (6.40) levando-se em conta a remoção da LT pq. Isso é feito usando o algoritmo para adição de uma linha entre as barras p e q, adicionando-se uma LT com o negativo da impedância da linha em contingência.

Obtém-se:

$$[\dot{V}'] = [Z'_{BARRA}] \cdot [\dot{I}] \quad (6.46)$$

onde o índice ' indica valores pós-abertura e o vetor $[\dot{I}]$ não mudou e é o mesmo da equação (6.40).

Para o fluxo em uma LT qualquer rs, após a contingência, obtemos

$$\dot{I}'_{rs} = \frac{(Z'_{rp} - Z'_{sp})}{z_{rs}} \cdot \dot{I}_p \quad (6.47)$$

A variação de fluxo devida à contingência é

$$\Delta \dot{I}_{rs} = \dot{I}'_{rs} - \dot{I}_{rs} = (Z'_{rp} - Z_{rp} + Z_{sp} - Z'_{sp}) \cdot \frac{\dot{I}_p}{z_{rs}} \quad (6.48)$$

O fluxo estimado, pós contingência, da linha rs, levando em conta o fluxo pré-falta, fica sendo:

$$\dot{I}_{rst} = \dot{I}_{rs} + \Delta \dot{I}_{rs} . \quad (6.49)$$

A relação (6.49) pode ser colocada só em função das tensões do caso base e dos elementos da matriz $[Z_{BARRA}]$ e impedância da conexão através de:

$$\dot{I}_{rst} = \frac{(Z'_{rp} - Z_{rp} + Z_{sp} - Z'_{sp})}{z_{rs}} \cdot \frac{(\dot{V}_p^0 - \dot{V}_q^0)}{(Z_{pp} - Z_{qp})} + \frac{(\dot{V}_r^0 - \dot{V}_s^0)}{z_{rs}} \quad (6.50)$$

usando a equação (6.44) e (6.48) na equação (6.49).

Todas as deduções feitas colocam as incógnitas em função das tensões do caso base, pois são estes os valores disponíveis do sistema.

Contingências múltiplas

Analisaremos agora o efeito, no sistema, da abertura de mais de uma linha simultaneamente.

Suponhamos que e linhas estejam fora de serviço. Para simular as condições pré-distúrbio precisamos agora de e correntes injetadas, pois, como sabemos, cada corrente permite satisfazer apenas uma restrição. Novamente, aqui escolheremos uma das barras terminais de cada LT para a aplicação de correntes.

Sejam a, b, c, \dots, e essas barras.

As corrente I_a, I_b, \dots, I_e devem ser calculadas de forma que o fluxo pré-falta na LT's $a\bar{a}, b\bar{b}, \dots, e\bar{e}$ iguale o valor do caso base.

Consideremos a equação (6.51) a seguir, onde a matriz $[Z_{BARRA}]$ representa uma extração conveniente da matriz reduzida da rede, contendo as barras $a, \bar{a}, b, \bar{b}, \dots, e, \bar{e}$ já definidas e $r, s, p, q, etc.$, que representam os terminais de LT's nas quais queremos verificar o acréscimo de fluxo.

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_{\bar{a}} \\ \vdots \\ \dot{V}_e \\ \dot{V}_{\bar{e}} \\ \dot{V}_r \\ \dot{V}_s \\ \vdots \end{bmatrix} = [Z_{BARRA}] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ 0 \\ \dot{I}_b \\ 0 \\ \vdots \\ \dot{I}_e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.51)$$

A equação (6.51) representa em forma compacta, o sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{V}_a = Z_{aa} \cdot \dot{I}_a + Z_{ab} \cdot \dot{I}_b + \dots + Z_{ae} \cdot \dot{I}_e \\ \dot{V}_{\bar{a}} = Z_{\bar{a}a} \cdot \dot{I}_a + Z_{\bar{a}b} \cdot \dot{I}_b + \dots + Z_{\bar{a}e} \cdot \dot{I}_e \\ \vdots \\ \dot{V}_e = Z_{ea} \cdot \dot{I}_a + Z_{eb} \cdot \dot{I}_b + \dots + Z_{ee} \cdot \dot{I}_e \\ \dot{V}_{\bar{e}} = Z_{\bar{e}a} \cdot \dot{I}_a + Z_{\bar{e}b} \cdot \dot{I}_b + \dots + Z_{\bar{e}e} \cdot \dot{I}_e \\ \vdots \\ \dot{V}_r = Z_{ra} \cdot \dot{I}_a + Z_{rb} \cdot \dot{I}_b + \dots + Z_{re} \cdot \dot{I}_e \\ \dot{V}_s = Z_{sa} \cdot \dot{I}_a + Z_{sb} \cdot \dot{I}_b + \dots + Z_{se} \cdot \dot{I}_e \\ \vdots \end{cases}. \quad (6.52)$$

Para que o fluxo nas linhas de transmissão seja o mesmo que o do caso base, basta que tenhamos a mesma diferença de potencial aplicada em cada LT em questão, ou seja:

$$(\dot{V}_a^0 - \dot{V}_{\bar{a}}^0), (\dot{V}_b^0 - \dot{V}_{\bar{b}}^0), \dots, (\dot{V}_e^0 - \dot{V}_{\bar{e}}^0).$$

Da equação (6.52) podemos extrair, por subtração conveniente de linhas, um sistema de equações que permita determinar as correntes injetadas, desde que façamos também $\dot{V}_a = \dot{V}_a^0$, $\dot{V}_{\bar{a}} = \dot{V}_{\bar{a}}^0$, ..., $\dot{V}_e = \dot{V}_e^0$ e $\dot{V}_{\bar{e}} = \dot{V}_{\bar{e}}^0$.

$$\begin{cases} (Z_{aa} - Z_{\bar{a}a}) \cdot \dot{I}_a + (Z_{ab} - Z_{\bar{a}b}) \cdot \dot{I}_b + \dots + (Z_{ae} - Z_{\bar{a}e}) \cdot \dot{I}_e = (\dot{V}_a^0 - \dot{V}_{\bar{a}}^0) \\ (Z_{ba} - Z_{\bar{b}a}) \cdot \dot{I}_a + (Z_{bb} - Z_{\bar{b}b}) \cdot \dot{I}_b + \dots + (Z_{be} - Z_{\bar{b}e}) \cdot \dot{I}_e = (\dot{V}_b^0 - \dot{V}_{\bar{b}}^0) \\ \vdots \\ (Z_{ea} - Z_{\bar{e}a}) \cdot \dot{I}_a + (Z_{eb} - Z_{\bar{e}b}) \cdot \dot{I}_b + \dots + (Z_{ee} - Z_{\bar{e}e}) \cdot \dot{I}_e = (\dot{V}_e^0 - \dot{V}_{\bar{e}}^0) \end{cases}. \quad (6.53)$$

Em forma matricial temos:

$$\begin{array}{c}
a - \bar{a} \\
b - \bar{b} \\
\vdots \\
e - \bar{e}
\end{array}
\begin{array}{c}
a \quad b \quad \dots \quad e \\
\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \bar{Z}_{BARRA} \\ \\ \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \vdots \\ \dot{I}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{V}_a^0 - \dot{V}_{\bar{a}}^0) \\ (\dot{V}_b^0 - \dot{V}_{\bar{b}}^0) \\ \vdots \\ (\dot{V}_e^0 - \dot{V}_{\bar{e}}^0) \end{bmatrix}
\end{array}
\quad (6.54)$$

A matriz $[Z_{BARRA}]$ representa a matriz modificada pelas subtrações de linhas, como indicado na equação (6.53).

A equação matricial (6.54) é suficiente para a determinação das correntes injetadas, e assim:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \vdots \\ \dot{I}_e \end{bmatrix} = [Z_{BARRA}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (\dot{V}_a^0 - \dot{V}_{\bar{a}}^0) \\ (\dot{V}_b^0 - \dot{V}_{\bar{b}}^0) \\ \vdots \\ (\dot{V}_e^0 - \dot{V}_{\bar{e}}^0) \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

Obtido o vetor das correntes injetadas, a matriz $[Z_{BARRA}]$ da equação (6.51) é modificado de modo a levar em conta a remoção das linhas em contingência. Seja a matriz obtida após a remoção das LT's, $[Z'_{BARRA}]$.

Podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}'_a \\ \dot{V}'_{\bar{a}} \\ \vdots \\ \dot{V}'_r \\ \dot{V}'_s \\ \dot{V}'_p \\ \dot{V}'_q \\ \vdots \end{bmatrix} = [Z'_{BARRA}] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ 0 \\ \dot{I}_b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.56)$$

O fluxo em uma linha de transmissão qualquer rs é dado por

$$\dot{I}'_{rs} = \frac{\dot{V}'_r - \dot{V}'_s}{z_{rs}} = \frac{[(Z'_{ra} - Z'_{sa}) \cdot \dot{I}_a + (Z'_{rb} - Z'_{sb}) \cdot \dot{I}_b + \dots + (Z'_{re} - Z'_{se}) \cdot \dot{I}_e]}{z_{rs}}. \quad (6.57)$$

Lembrando que o fluxo anterior à remoção das linhas em contingência devido à mesma injeção de correntes é dado por fórmula anterior à equação (6.57), bastando omitir o índice ', podemos de imediato calcular o fluxo na linha rs devido à contingência múltipla.

$$\dot{I}'_{rst} = \dot{I}_{rs}^0 + \Delta \dot{I}_{rs} = \dot{I}_{rs}^0 + (\dot{I}'_{rs} - \dot{I}_{rs}).$$

Ou substituindo valores, vem:

$$\dot{I}_{rst} = \frac{(\dot{V}_r^0 - \dot{V}_s^0)}{z_{rs}} + \frac{[(Z'_{ra} - Z_{ra} + Z_{sa} - Z'_{sa}) \cdot \dot{I}_a + \dots + (Z'_{re} - Z_{re} + Z_{se} - Z'_{se}) \cdot \dot{I}_e]}{z_{rs}}. \quad (6.58)$$

Na equação (6.58), os valores de $\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dots, \dot{I}_e$ são obtidos na equação (6.55), e o leitor deve ter em mente que estas correntes são funções apenas da rede e das tensões de barras do caso base.

Capítulo 7

ESTABILIDADE EM SISTEMAS DE POTÊNCIA[12]

7.1 Introdução

Quando os geradores de corrente alternada funcionavam acionados por máquinas a vapor, um dos problemas causados era as oscilações. a variação periódica no torque aplicado aos geradores causava variações na velocidade. A variação periódica resultante na tensão e frequência, era transmitida aos motores conectados ao sistema. As oscilações dos motores causadas pela variação da tensão e frequência, algumas vezes produziam a perda do sincronismo quando a frequência natural de oscilação coincidia com a frequência de oscilação das máquinas de acionamento dos geradores. Os enrolamento de amortecedores, foram inicialmente utilizados a fim de minimizar esses efeitos pela ação das perdas resultantes das correntes induzidas nos enrolamentos de amortecimento, devido ao movimento relativo entre o rotor e o campo girante produzido pela corrente de armadura. O uso de turbinas reduziu o problema das oscilações, embora mantenha-se presente quando o acionamento é feito por motor diesel. A manutenção do sincronismo entre várias partes de um sistema de potência torna-se significativamente difícil. No entanto os sistemas e as interligações entre os sistemas continuam a crescer.

7.2 O Problema da Estabilidade

A estabilidade em sistemas de potência pode ser definida como a propriedade do sistema permanecer com as máquinas em sincronismo após responder a um distúrbio a partir de uma condição normal de operação e retornar a essa condição normal de operação. Os estudos de estabilidade são normalmente classificados em três tipos: transitório, dinâmico e estudo de estabilidade

em regime permanente.

Atualmente, os estudos de estabilidade transitória constituem a maior aproximação dos estudos do comportamento eletromecânico dinâmico dos sistemas de potência. Os estudos de estabilidade transitória são feitos no sentido de determinar se um sistema permanecer em sincronismo após um grande distúrbio, tal como uma falta no sistema de transmissão, súbita mudança na carga, perda numa unidade de geração, ou um chaveamento de uma linha. Tais estudos iniciaram-se aos 60 anos atrás ou mais, até então confinado a consideração do problema dinâmico não mais que duas máquinas. Atualmente, os sistemas de potência são enormes, fortemente interconectados com centenas de máquinas as quais podem interagir dinamicamente através de suas linhas de transmissão de extra-alta-tensão e ultra-alta-tensão. A essas máquinas tem-se associado os sistemas de excitação e os controladores de velocidade os quais, não em todos os casos, devem ser modelados no sentido de refletir a correta resposta dinâmica do sistema de potência a certos distúrbios do sistema.

O estudo de estabilidade dinâmica e estabilidade em regime permanente é menos amplo e envolve uma ou poucas máquinas com mudanças lentas e graduais na condição de operação. Entretanto, o estudo de estabilidade dinâmica e em regime permanente, define a estabilidade do ponto de operação do sistema em regime permanente. A diferença de estabilidade em regime permanente e estabilidade dinâmica é basicamente artificial, sendo os problemas de estabilidade de mesma natureza. Eles diferem somente no grau de detalhes usado no modelo das máquinas. Em estudo de estabilidade dinâmica, o sistema de excitação e o controle de velocidade das máquinas são representados juntamente com o modelo da máquina síncrona o qual fornece a variação do enlace de fluxo no entreferro da máquina. No problema de estabilidade em regime permanente, é usado um modelo simples de gerador o qual é tratado como uma fonte de tensão constante. A técnica de solução do problema de estabilidade dinâmica e estabilidade em regime permanente é no sentido de examinar a estabilidade do sistema para uma variação incremental em torno de um ponto de equilíbrio. A equação diferencial não linear e a equação algébrica do sistema, pode ser trocada por um conjunto de equações lineares que é resolvido pelos métodos de análise linear a fim de determinar se a máquina ou as máquinas permanecem em sincronismo a partir de uma pequena mudança do seu ponto de operação.

Os estudos de estabilidade transitória são mais levados em consideração devido sua maior importância na prática. Tais estudos envolvem grandes distúrbios, os quais não permitem o processo de linearização, As equações algébricas lineares e as equações diferenciais não lineares são resolvidas por métodos diretos ou por métodos iterativos. O problema de estabilidade transitória pode ser subdividido em: problema de estabilidade de primeira oscilação e problema de estabilidade de multi-oscilação. A estabilidade de primeira oscilação é baseada num modelo simples de gerador sem a representação do sistema de controle. Usualmente o período de tempo de estudo é o primeiro segundo após uma falta do sistema. Se as máquinas do sistema são de tal forma a permanecerem em sincronismo, o sistema é dito para ser estável. O problema de estabilidade de multi-oscilação se estende sobre um longo período de estudo e deve ser considerado os efeitos dos controles dos geradores os quais afetam o desempenho da máquina durante o período de tempo em estudo. Modelos de máquinas mais sofisticados, devem ser representados no

sentido de refletir, da melhor forma possível, o comportamento da mesma.

Em todo estudo de estabilidade, o objetivo é determinar se ou não os rotores das máquinas perturbadas retornam a velocidade constante de operação. Isto quer dizer que o rotor deve se afastar o mínimo possível da velocidade síncrona. Para facilitar os cálculos, três considerações fundamentais são feitas em todos os estudos de estabilidade:

1. Apenas a tensão e corrente da frequência síncrona é considerada nos enrolamentos do estator. Conseqüentemente, a corrente DC e os componentes harmônicos são desprezados.
2. As componentes simétricas são usadas na representação de faltas assimétricas.
3. A tensão interna dos geradores são consideradas constantes para variação na velocidade da máquina.

Estas considerações permitem o uso de álgebra fasorial para o circuito de transmissão, e a solução, pelas técnicas de fluxo de carga usando os parâmetros de 60 Hz. Assim, também, os circuitos de sequência negativa e sequência zero podem ser incorporados ao circuito de sequência positiva no ponto de falta.

7.3 Dinâmica do Rotor e a Equação de Oscilação

A equação de movimento do rotor de uma máquina síncrona é baseada em um princípio elementar de dinâmica, o qual estabelece que o torque de aceleração é igual ao produto do momento de inércia do rotor multiplicado pela aceleração angular. No sistema MKS de unidades, essa equação é escrita para um gerador síncrono na forma

$$J \cdot \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = T_a = T_m - T_e \quad N \cdot m \quad (7.1)$$

Onde:

J → Momento de inércia total da massa rotativa em Kg.m^2

θ_m → Deslocamento angular do rotor com relação a um eixo estacionário (eixo de referência), em radianos mecânicos

t → Tempo em segundos

T_m → Torque mecânico, em $N \cdot m$

T_e → Torque eletromagnético líquido, em $N \cdot m$

T_a → Torque de aceleração, em $N \cdot m$

Em condições normais de operação, T_m e T_e , são iguais e com isso o torque de aceleração é nulo. Neste caso não há aceleração ou desaceleração das massas do rotor sendo a velocidade resultante constante e igual a velocidade síncrona. As massas rotativas

do rotor do gerador e a máquina de acionamento são ditas estarem em sincronismo com as outras máquinas operando na velocidade síncrona do sistema de potência.

O ângulo θ_m é medido com respeito a um eixo estacionário no estator e é a medida absoluta do ângulo do rotor. Ele cresce com o tempo e a velocidade síncrona. Assim, é de interesse a posição angular do rotor com relação a um eixo de referência que gire na velocidade síncrona. Dessa forma, definiremos

$$\theta_m = \omega_{sm} \cdot t + \delta_m \quad (7.2)$$

onde:

ω_{sm} → velocidade síncrona da máquina em radianos por segundo

δ_m → deslocamento angular do rotor, em radianos mecânicos.

Derivando a equação(7.2) com relação ao tempo teremos

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_{sm} + \frac{d\delta_m}{dt} \quad (7.3)$$

e

$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} = \frac{d^2\delta_m}{dt^2} \quad (7.4)$$

A equação (7.3) mostra que a velocidade do rotor $\frac{d\theta_m}{dt}$ é constante e igual a velocidade síncrona somente quando $\frac{d\delta_m}{dt} = 0$. A equação (7.4) representa a aceleração do rotor.

Substituindo a equação (7.4) na equação (7.1), obtemos

$$J \cdot \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = T_a = T_m - T_e \quad N \cdot m \quad (7.5)$$

É conveniente introduzir para fins de notação

$$\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt} \quad (7.6)$$

para a velocidade angular do rotor.

Multiplicando a equação (7.5) por ω_m , tem-se

$$J \cdot \omega_m \cdot \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = \omega_m \cdot T_a = \omega_m \cdot T_m - \omega_m \cdot T_e \quad W$$

ou

$$J \cdot \omega_m \cdot \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = P_a = P_m - P_e \quad (7.7)$$

Supondo que a potência é igual ao produto da velocidade angular multiplicada pelo torque.

Na equação (7.7) P_m é a potência mecânica no eixo da máquina, P_e é a potência elétrica fornecida pelo entre-ferro e P_a a potência de aceleração. O coeficiente $J_m \cdot \omega_m$ é o momento angular do rotor. Na velocidade síncrona ω_{sm} , ele é denominado por constante de inércia da máquina e é simbolizado por M . Assim, da equação (7.7)

$$M \cdot \frac{d^2 \delta_m}{dt^2} = P_a = P_m - P_e \quad W \quad (7.8)$$

Utilizamos M na equação (7.8), mas esse coeficiente não é constante devido ω_m não ser igual a velocidade síncrona em todas as condições de operação. No entanto, na prática ω_m não difere significativamente da velocidade síncrona quando a máquina é estável.

Nos dados de máquinas para estudo de estabilidade, outra constante relacionada a inércia é a chamada constante H e é definida por

$$H = \frac{\text{Energia cinética em Megajoules na } \omega_{sm}}{\text{Potência em MVA}}$$

ou

$$H = \frac{\frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_{sm}^2}{S_{máq}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot M \cdot \omega_{sm}}{S_{máq}} \quad MJ/MVA \quad (7.9)$$

Onde:

$S_{máq}$ → é a potência trifásica da máquina em MVA. Da equação (7.9), teremos,

$$M = \frac{2H}{\omega_{sm}} \cdot S_{máq} \quad MJ/rad \quad (7.10)$$

Substituindo M na equação (7.8), teremos

$$\frac{2H}{\omega_{sm}} \cdot \frac{d^2 \delta_m}{dt^2} = \frac{P_a}{S_{máq}} = \frac{P_m - P_e}{S_{máq}} \quad (7.11)$$

Observe que δ_m é expresso em radianos mecânico no numerador da equação (7.11) enquanto ω_{sm} é expresso em radianos por segundo no denominador. Assim, podemos escrever a equação na forma

$$\frac{2H}{\omega_s} \cdot \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_a = P_m - P_e \quad p.u \quad (7.12)$$

Para um sistema com uma frequência de f Hertz, a equação (7.12), torna-se

$$\frac{H}{\pi f} \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_a = P_m - P_e \quad p.u \quad (7.13)$$

Quando δ está em graus elétricos

$$\frac{H}{180 \cdot f} \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_a = P_m - P_e \quad p.u \quad (7.14)$$

A equação (7.12) é chamada de equação de oscilação da máquina, que é a equação fundamental que governa a dinâmica rotacional das máquinas síncronas nos estudos de estabilidade. Verifica-se que a equação diferencial de segunda ordem pode ser escrita como sendo duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{2H}{\omega_s} \cdot \frac{d\omega}{dt} = P_m - P_e \quad p.u \quad (7.15)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_s \quad (7.16)$$

7.4 Considerações Adicionais da Equação de Oscilação

A potência base usada na equação (7.11) (MVA), é a própria potência base da máquina para definir H. Em um estudo de estabilidade de sistema de potência com várias máquinas síncronas, apenas uma potência base é comum ao sistema. Assim, o segundo membro da equação de oscilação de cada máquina deve ser expresso em p.u. na base comum, sendo que H no primeiro membro, deve ser consistente com a base do sistema. Isto deve ser feito convertendo a constante H de cada máquina na própria potência, a um valor determinado pela base do sistema. Na equação (7.11), multiplicando cada lado pela relação ($S_{máq}/S_{sistema}$), obteremos

$$H_{sistema} = H_{máq} \cdot \frac{S_{máq}}{S_{sistema}} \quad (7.17)$$

Nos estudos de sistemas de potência a base usual é de 100MVA.

A constante de inércia M raramente é usada, sendo mais comum a equação de oscilação com H. Isto é devido o valor de M variar bastante com o tamanho e o tipo da máquina, muito embora H varie mas numa faixa menor. Os fabricantes de máquinas usam também o símbolo WR^2 para especificar as partes rotativas de uma unidade de geração (incluindo a máquina motriz), que é o peso multiplicado pelo raio de giração em pés. $WR^2/32,2$ é o momento de inércia da máquina em slug-pés quadrado.

Exemplo 1.

Desenvolver uma expressão para calcular a constante H de um gerador de uma usina nuclear com potência de 1.333 MVA, 1.800rpm com $WR^2=5.820.000 \text{ lb-pés}^2$.

A energia cinética de rotação em lb.ft na velocidade síncrona é

$$KE = \frac{1}{2} \cdot \frac{WR^2}{32,2} \cdot \left(\frac{2\pi(rpm)}{60} \right)^2 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$KE = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

Onde

$$I \rightarrow \text{Momento de inércia, } I = \frac{WR^2}{32,2}$$

Temos que $1 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 746/550 \text{ J}$. Convertendo $\text{ft} \cdot \text{lb}$ em Megajoules e dividindo pela potência da máquina em Megavoltampere, obtêm-se

$$H = \frac{\left(\frac{746}{550} \times 10^{-6} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{WR^2}{32,2} \cdot \left[\frac{2\pi(rpm)}{60} \right]^2}{S_{máq}}$$

Onde simplificando torna-se

$$H = \frac{2,31 \times 10^{-7} \cdot WR^2 (rpm)^2}{S_{máq}}$$

Substituindo os dados da máquina

$$H = \frac{2,31 \times 10^{-10} \times (5,82 \times 10^6) \times (1.800)^2}{1.333}$$

Convertendo H na base do sistema de 100MVA, teremos

$$H = 3,27 \times \frac{1.333}{100} = 43,56 \text{ MJ/MVA}$$

Em estudo de estabilidade de um grande sistema com várias máquinas, é necessário a minimização das equações de oscilações a serem resolvidas. Isto, pode ser feito se a falta na linha de transmissão do sistema for de tal forma que os rotores das máquinas de uma mesma usina ou planta oscilem juntamente. Em tal caso, as máquinas que funcionam dessa forma podem ser combinadas em uma máquina equivalente como se seus rotores fossem mecanicamente acoplados e apenas uma única equação de oscilação utilizada. As máquinas que atendem esses pré-requisitos são chamadas de máquinas **coerentes**.

Considere um sistema com dois geradores conectados a uma mesma barra a qual está eletricamente distante do distúrbio. As equações de oscilação na base do sistema são:

$$\frac{2H_1}{\omega_s} \cdot \frac{d^2\delta_1}{dt^2} = P_{m1} - P_{e1} \quad p \cdot u \quad (7.18)$$

$$\frac{2H_2}{\omega_s} \cdot \frac{d^2\delta_2}{dt^2} = P_{m2} - P_{e2} \quad p \cdot u \quad (7.19)$$

Somando essas duas equações e denominando δ_1 e δ_2 por δ , considerando que os dois rotores oscilem juntamente, teremos

$$\frac{2H}{\omega_s} \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e \quad p \cdot u \quad (7.20)$$

Onde:

$H = H_1 + H_2$, $P_m = P_{m1} + P_{m2}$ e $P_e = P_{e1} + P_{e2}$. Essa única equação que é da forma da equação (7.12), pode ser resolvida para representar a dinâmica da planta.

Exemplo 2.

Dois unidades geradoras que operam em paralelo, têm as seguintes características:

Unidade 1: 500 MVA, $f_{p1}=0,85$, 20kV, 3.500 rpm, $H_1 = 4,8 \text{ MJ/MVA}$

Unidade 2: 1.333 MVA, $f_{p2} = 0,9$, 22kV, 1.800 rpm, $H_2 = 3,27 \text{ MJ/MVA}$

Calcule a constante equivalente H para as duas unidades na base de 100MVA.

Solução:

A energia cinética de rotação das duas máquinas é:

$$KE = 4,8 \times 500 + 3,27 \times 1.333 = 6759 \text{ MJ}$$

A constante H para a máquina equivalente na base de 100MVA é:

$$H = 6.759/100 = 67,59 \text{ MJ/MVA}$$

Este valor pode ser usado em uma equação de oscilação, sabendo-se que as máquinas oscilam juntamente, pelo fato dos ângulos dos rotores estarem em passo a cada instante de tempo.

Para duas máquinas não coerentes de um sistema, as equações de oscilação são idênticas as equações (7.18) e (7.19). Dividindo cada equação por suas respectivas constantes H_1 e H_2 , e subtraindo os resultados, obtemos

$$\frac{d^2\delta_1}{dt^2} - \frac{d^2\delta_2}{dt^2} = \frac{\omega_s}{2} \cdot \left(\frac{P_{m1} - P_{e1}}{H_1} - \frac{P_{m2} - P_{e2}}{H_2} \right) \quad (7.21)$$

Multiplicando os dois lados por $H_1 \cdot H_2 / (H_1 + H_2)$ e fazendo algumas manipulações algébricas, determinamos que

$$\frac{2}{\omega_s} \cdot \left(\frac{H_1 \cdot H_2}{H_1 + H_2} \right) \cdot \frac{d^2(\delta_1 - \delta_2)}{dt^2} = \frac{P_{m1} \cdot H_2 - P_{m2} \cdot H_1}{H_1 + H_2} - \frac{P_{e1} \cdot H_2 - P_{e2} \cdot H_1}{H_1 + H_2} \quad (7.22)$$

E pode ser escrita mais simplificativamente na forma básica da equação de oscilação (7.12), como segue:

$$\frac{2}{\omega_s} \cdot H_{12} \cdot \frac{d^2\delta_{12}}{dt^2} = P_{m12} - P_{e12} \quad (7.23)$$

Sendo o ângulo $\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2$ e, a constante de inércia equivalente e as potências de entrada e saída são definidas por:

$$H_{12} = \frac{H_1 \cdot H_2}{H_1 + H_2} \quad (7.24)$$

$$P_{m12} = \frac{P_{m1} \cdot H_2 - P_{m2} \cdot H_1}{H_1 + H_2} \quad (7.25)$$

$$P_{e12} = \frac{P_{e1} \cdot H_2 - P_{e2} \cdot H_1}{H_1 + H_2} \quad (7.26)$$

Uma aplicação dessas equações é feita em um sistema com duas máquinas, sendo um gerador e um motor síncrono, conectados por uma linha de transmissão puramente reativa. Se ocorrer uma mudança na saída do gerador ela é absorvida pelo motor. Assim, podemos escrever

$$P_{m1} = -P_{m2} = P_m \quad (7.27)$$

$$P_{e1} = -P_{e2} = P_e$$

Nessas condições, $P_{m12} = P_m$, $P_{e12} = P_e$ e a equação (7.22) se reduz a

$$\frac{2H_{12}}{\omega_s} \cdot \frac{d^2\delta_{12}}{dt^2} = P_m - P_e.$$

Que é a forma da equação (7.12) aplicada para uma única máquina.

A equação (7.22) demonstra que a estabilidade de uma máquina de um sistema, está associada ao comportamento dinâmico das outras máquinas do sistema.

7.5 A Equação do Ângulo de Potência

Na equação de oscilação para o gerador, a potência de entrada da máquina motriz P_m será considerada constante. Sendo constante P_m , a potência P_e determinará se o rotor acelera, desacelera ou permanece na velocidade síncrona. Quando $P_e = P_m$, a máquina funciona em regime permanente na velocidade síncrona. Quando afasta-se desse valor, a velocidade do rotor afasta-se da velocidade síncrona. As mudanças em P_e são determinadas pelas condições nos circuitos de transmissão e distribuição ou nas cargas supridas pelo gerador. Os distúrbios nos sistemas causados por mudanças de cargas, faltas nos circuitos ou aberturas de disjuntores, podem causar mudanças na potência P_e , conseqüentemente transitórios eletromagnético. Uma consideração fundamental, é que a tensão no gerador é suposta constante de forma que a mudança em P_e é determinada pela equação de fluxo de carga aplicada ao circuito e pelo modelo escolhido para representar o comportamento elétrico da máquina. Cada máquina é representada, para o estudo de estabilidade transitória, por sua tensão interna E' em série com sua reatância transitória X'_d como mostra a **Figura 7.1** em que V_t é a tensão terminal. Este modelo corresponde a representação da máquina em regime permanente, em que a reatância síncrona X_d está em série com a tensão interna E .

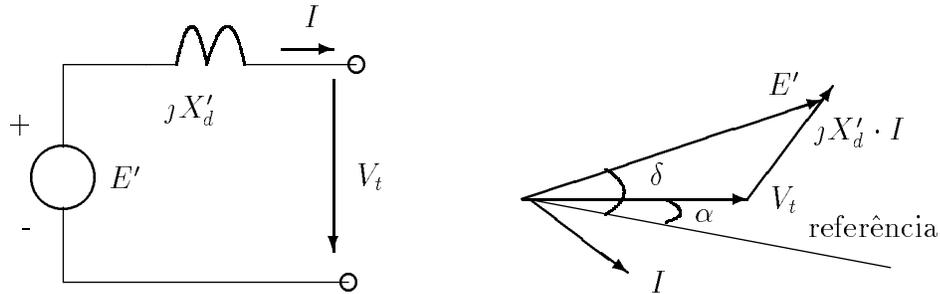


Figura 7.1: Circuito equivalente da máquina síncrona em regime transitório e diagrama fasorial

A **Figura 7.2** representa esquematicamente um gerador fornecendo potência, através de um sistema de transmissão, a barra terminal 2. O retângulo representa os componentes passivos tais como transformadores, linhas de transmissão, capacitores reatores etc., e incluindo a reatância transitória do gerador. A tensão E'_1 , representa a tensão interna do gerador na barra 1. A tensão interna E'_2 é considerada, neste caso, como uma barra infinita ou a tensão interna transitória de um motor síncrono cuja reatância transitória está incluída no circuito.

Consideremos o caso de dois geradores suprindo cargas com impedâncias constantes em um circuito. Os elementos da matriz admitância de barra para o circuito, reduzida as duas barras é



Figura 7.2: Esquema de um gerador fornecendo potência através de uma linha de transmissão a uma barra terminal 2

$$Y_{Barra} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

Sabemos que

$$P_k - jQ_k = V_k^* \cdot \sum_{n=1}^N Y_{kn} \cdot V_n \quad (7.29)$$

Sendo k e N igual a 1 e 2, respectivamente. Substituindo V por E' , teremos

$$P_1 + jQ_1 = E'_1 \cdot (Y_{11} \cdot E'_1)^* + E'_1 \cdot (Y_{12} \cdot E'_2)^* \quad (7.30)$$

onde

$$E'_1 = |E'_1| \angle \delta_1 \quad E'_2 = |E'_2| \angle \delta_2$$

$$Y_{11} = G_{11} - jB_{11} \quad Y_{12} = |Y_{12}| \angle \theta_{12}$$

Assim

$$P_1 = |E'_1|^2 \cdot G_{11} + |E'_1| \cdot |E'_2| \cdot |Y_{11}| \cdot \cos(\delta_1 - \delta_2 - \theta_{12}) \quad (7.31)$$

$$Q_1 = -|E'_1|^2 \cdot B_{11} + |E'_1| \cdot |E'_2| \cdot |Y_{12}| \cdot \sin(\delta_1 - \delta_2 - \theta_{12}) \quad (7.32)$$

Essas equações são também aplicadas na barra 2 trocando os subscritos.

Fazendo $\delta = \delta_1 - \delta_2$ e $\gamma = \theta_{12} - \frac{\pi}{2}$, nas equações (7.31) e (7.32)

$$P_1 = |E'_1|^2 \cdot G_{11} + |E'_1| \cdot |E'_2| \cdot |Y_{11}| \cdot \sin(\delta - \gamma) \quad (7.33)$$

$$Q_1 = -|E'_1|^2 \cdot B_{11} - |E'_1| \cdot |E'_2| \cdot |Y_{12}| \cdot \cos(\delta - \gamma) \quad (7.34)$$

A equação (7.33) pode ser escrita numa forma mais simplificada por

$$P_e = P_c + P_{\max} \cdot \text{sen}(\delta - \gamma) \quad (7.35)$$

Onde

$$P_c = |E'_1|^2 \cdot G_{11} \quad e \quad P_{\max} = |E'_1| \cdot |E'_2| \cdot |Y_{12}| \quad (7.36)$$

P_e é a potência de saída do gerador, igual a P_1 , desprezadas as perdas de armadura, que é comumente chamada de equação de ângulo de potência. Seu gráfico, função do ângulo δ , é chamado de curva do ângulo de potência. A equação do ângulo de potência de um circuito puramente reativo é

$$P_e = P_{\max} \cdot \text{sen } \delta \quad (7.37)$$

Onde $P_{\max} = |E'_1| \cdot |E'_2| / X$ e X a reatância de transferência entre E'_1 e E'_2 .

Exemplo 3.

O diagrama da **Figura 7.3** mostra um gerador conectado através de duas linhas de transmissão a um grande sistema metropolitano considerado como uma barra infinita. A máquina está fornecendo 1,0 p.u. de potência e as tensões terminais são iguais a 1,0 p.u.. Os números no diagrama indicam as reatâncias numa mesma base. A reatância transitória do gerador é 0,2 p.u.. Determine a equação do ângulo de potência do sistema para essa condição de operação.

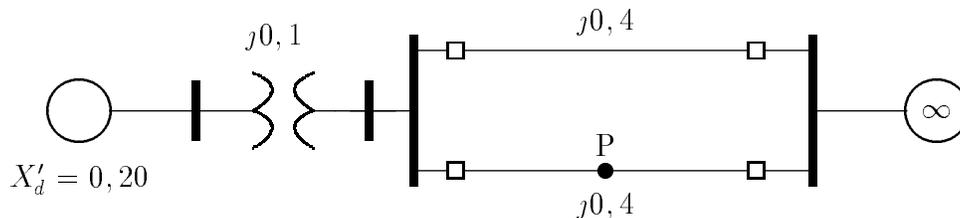


Figura 7.3: Gerador alimentando um grande sistema metropolitano considerado uma barra infinita

Solução:

O diagrama de reatância do sistema em questão é mostrado na **Figura 7.4**

A reatância série entre a tensão terminal e a barra infinita é

$$X = 0,1 + \frac{0,4}{2} = 0,3 \quad p.u.$$

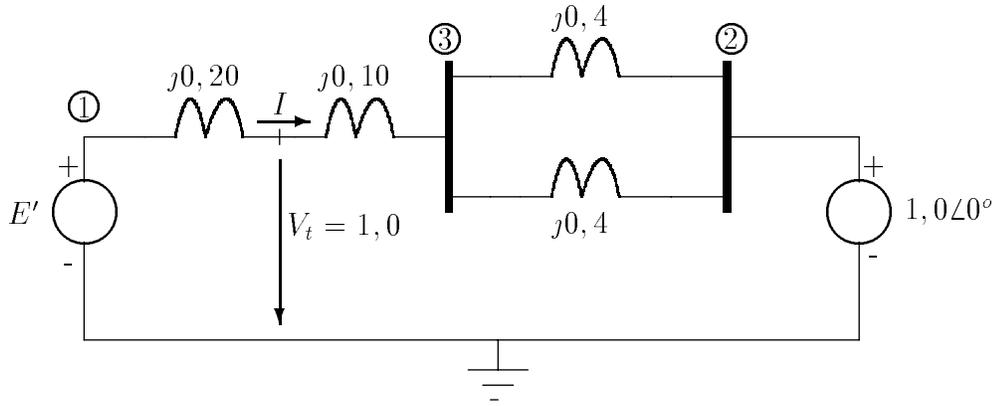


Figura 7.4: Diagrama de reatância do sistema anterior

A potência fornecida pelo gerador é igual a 1,0 p.u. e é dada pela equação do ângulo de potência por

$$\frac{|V_t| \cdot |V|}{X} \cdot \text{sen}(\alpha) = \frac{1,0 \times 1,0}{0,3} \cdot \text{sen}(\alpha) = 1,0$$

Onde V é a tensão na barra infinita e α o ângulo da tensão terminal V_t relativo a barra infinita. Calculando α , obteremos

$$\alpha = \text{sen}^{-1}(0,3) = 17,458^\circ$$

Assim a tensão terminal é

$$V_t = 1,0 \angle 17,458^\circ = 0,954 + j0,3 \text{ p.u.}$$

A corrente do gerador é obtida por

$$I = \frac{1,0 \angle 17,458^\circ - 1,0 \angle 0^\circ}{j0,3} = 1,0 + j0,1535 = 1,012 \angle 8,729^\circ \text{ p.u.}$$

A tensão transitória E' é

$$E' = (0,954 + j0,30) + j(0,2) \times (1,0 + j0,1535) = 0,923 + j0,5 = 1,05 \angle 28,44^\circ \text{ p.u.}$$

A equação do ângulo de potência relativa a tensão transitória interna E' e a tensão V da barra infinita é determinada pela reatância série total, por

$$X = 0,2 + 0,1 + \frac{0,4}{2} = 0,5 \text{ p.u.}$$

Logo

$$P_e = \frac{1,05 \times 1,0}{0,5} \cdot \text{sen}(\delta) = 2,10 \cdot \text{sen}(\delta) \text{ p.u.}$$

Onde δ é o ângulo do rotor com relação à barra infinita. A equação do ângulo de potência é plotada no gráfico da **Figura 7.5**.

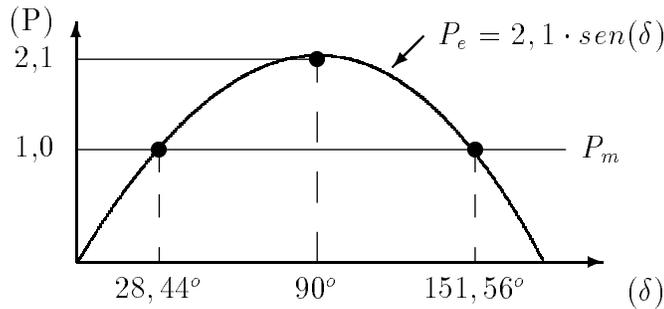


Figura 7.5: Gráfico do ângulo de potência

Observe que a potência mecânica de entrada P_m é constante e intercepta a curva senoidal do ângulo de potência no ponto de ângulo $\delta = 28,44^\circ$. Essa posição angular inicial do rotor do gerador corresponde a essa condição de operação. A equação de oscilação da máquina pode ser escrita da forma

$$\frac{H}{180 \cdot f} \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2} = 1,0 - 2,1 \cdot \text{sen}(\delta) \text{ p.u.} \quad (7.38)$$

Onde H é dado por Megajoules por Megavoltampères, f é a frequência elétrica do sistema e δ em graus elétricos.

Exemplo 4.

O sistema do exemplo 3 está operando nas condições mencionadas quando ocorre uma falta trifásica no ponto P da **Figura 7.3**. Determine a equação do ângulo de potência para o sistema na condição de falta e a equação de oscilação correspondente. Tomar $H = 5MJ/MVA$.

Solução:

O diagrama de reatância transformada em admitância é mostrado na **Figura 7.6**.

O efeito do curto-circuito é mostrado na **Figura 7.7**.

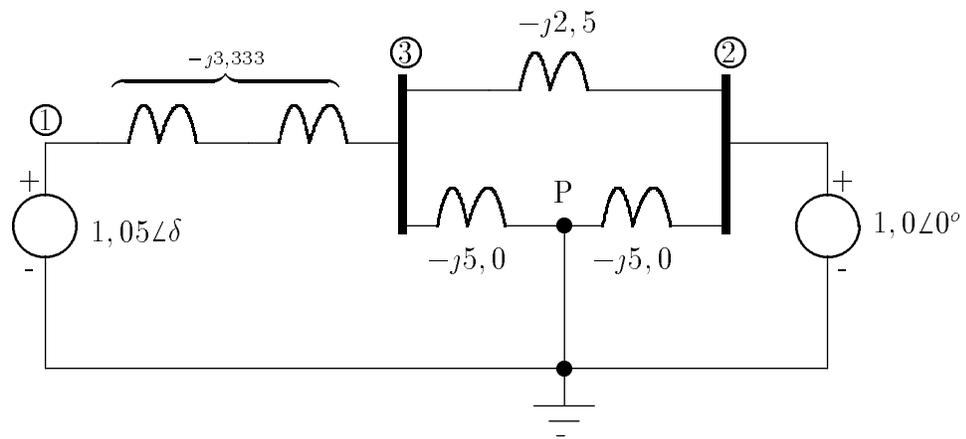


Figura 7.6: Diagrama de reatância transformado em admitância na condição de curto-circuito

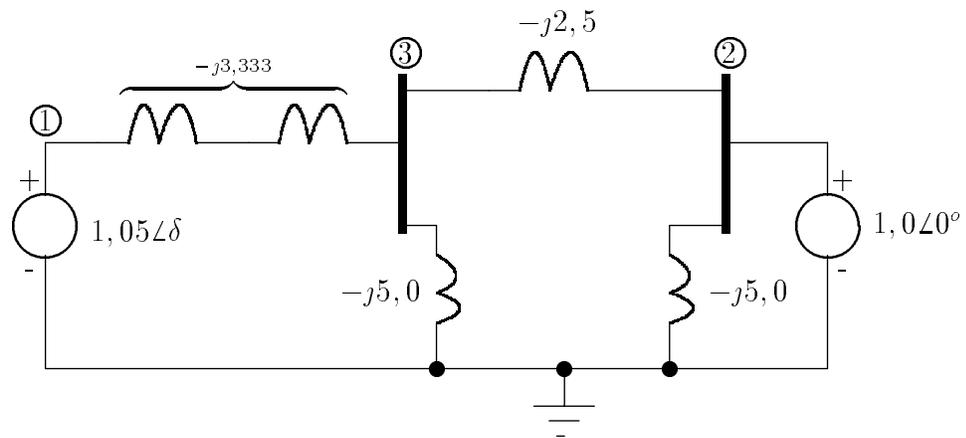


Figura 7.7: Diagrama esquemático mostrando o efeito do curto-circuito

Conforme calculado no exemplo anterior, a tensão transitória interna do gerador permanece constante e igual $E' = 1,05\angle 28,44^\circ$, baseado no conceito de que o enlace de fluxo na máquina não varia instantaneamente.

A matriz admitância de barra para a nova configuração é obtida por

$$Y_{Barra} = j \begin{bmatrix} -3,333 & 0 & 3,333 \\ 0 & -7,50 & 2,500 \\ 3,333 & 2,5 & -10,833 \end{bmatrix}$$

A barra 3, sem fonte, será removida da matriz Y_{Barra} , usando o método da redução de Kron. Esse método é simplificado pela expressão:

$$Y_{kj(novo)} = Y_{kj(original)} - \frac{Y_{kn} \cdot Y_{nj}}{Y_{nn}}$$

Fazendo esse procedimento, chega-se a uma nova matriz Y_{Barra} dada por

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} -2,308 & 0,769 \\ 0,769 & -6,923 \end{bmatrix}$$

O módulo da admitância de transferência é 0,769. Portanto,

$$P_{max} = |E'_1| \cdot |E'_2| \cdot |Y_{12}| = 1,05 \times 1,0 \times 0,769 = 0,808 \text{ p.u.}$$

A equação do ângulo de potência na condição de falta no sistema é

$$P_e = 0,808 \cdot \text{sen}(\delta) \text{ p.u.}$$

E a correspondente equação de oscilação é

$$\frac{5}{180 \cdot f} \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2} = 1,0 - 0,808 \cdot \text{sen}(\delta) \text{ p.u.} \quad (7.39)$$

Devido sua inércia, o ângulo do rotor não pode mudar instantaneamente no instante da falta. Entretanto, o ângulo do rotor é, inicialmente, $28,44^\circ$ como no exemplo 3, e a potência elétrica de saída é $P_e = 0,808 \cdot \text{sen}(28,44^\circ) = 0,385$. Assim, a potência de aceleração inicial é

$$P_a = 1,0 - 0,385 = 0,615 \text{ p.u.}$$

E a aceleração inicial é positiva, cujo valor é dado por

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{180 \cdot f}{5} \cdot 0,615 = 22,14 \cdot f \text{ graus/s}^2.$$

Exemplo 5

A falta no sistema do exemplo 4 é limpa (abertura da linha pela proteção) simultaneamente nos dois lados da linha afetada. Determine a equação do ângulo de potência e a equação de oscilação para o período pós-falta.

Solução:

Verificando a **Figura 7.4**, após removida a linha com falta, a admitância do sistema é

$$y_{12} = \frac{1,0}{j(0,2 + 0,1 + 0,4)} = -j1,429 \text{ p.u.}$$

Ou na matriz admitância de barra $y_{12} = j1,429$ p.u.. Assim, a equação do ângulo de potência é

$$P_e = 1,05 \cdot 1,0 \cdot 1,429 \cdot \text{sen}(\delta)$$

E a equação de oscilação

$$\frac{5}{180 \cdot f} \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2} = 1,0 - 1,5 \cdot \text{sen}(\delta)$$

A aceleração no instante da abertura da falta depende da posição angular do rotor naquele instante de tempo. A curva do ângulo de potência dos exemplos 3, 4 e 5 é mostrado na **Figura 7.8**.

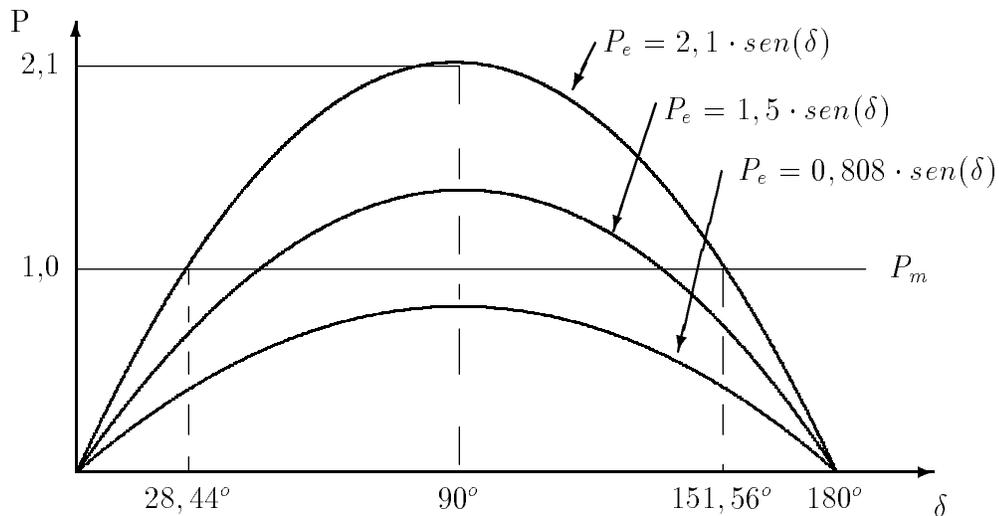


Figura 7.8: Curva do ângulo de potência dos exemplos 3, 4 e 5

7.6 Coeficientes de Potência Sincronizante

No exemplo 3 o ponto de operação na curva senoidal, P_e , da **Figura 7.5**, o ângulo δ_0 foi calculado igual a $28,44^\circ$, onde a potência mecânica de entrada P_m era igual a potência elétrica P_e . Na mesma figura foi visto que $P_e = P_m$ com $\delta = 151,56^\circ$, o que pode parecer ser um ponto aceitável de operação. A seguir mostraremos não ser o caso.

O bom senso requer para um ponto aceitável de operação aceitável é aquele que um gerador não perca o sincronismo quando ocorrer pequenas mudanças na potência elétrica de saída do gerador. Para este exame, requer para uma potência fixa P_m , que uma mudança incremental no ponto de operação, isto é, considera-se

$$\delta = \delta_0 + \delta_\Delta \quad e \quad P_e = P_{e0} + P_{e\Delta} \quad (7.40)$$

Onde o índice zero denomina o ponto de operação em regime permanente e o índice Δ identifica a variação incremental a partir desse valor.

Substituindo a equação (7.40) na equação (7.37), obtemos a equação do ângulo de potência para o sistema de duas máquinas na forma

$$P_{e0} + P_{e\Delta} = P_{\max} \cdot \text{sen}(\delta_0 + \delta_\Delta) = P_{\max} \cdot (\text{sen}(\delta_0) \cdot \cos(\delta_\Delta) + \cos(\delta_0) \cdot \text{sen}(\delta_\Delta)).$$

Sendo δ_Δ um pequeno deslocamento incremental de δ_0 ,

$$\text{sen}(\delta_\Delta) \cong \delta_\Delta \quad e \quad \cos(\delta_\Delta) = 1 \quad (7.41)$$

Assim, a equação anterior torna-se

$$P_{e0} + P_{e\Delta} = P_{\max} \cdot \text{sen}(\delta_0) + (P_{\max} \cdot \cos(\delta_0)) \cdot \delta_\Delta \quad (7.42)$$

no ponto de operação inicial δ_0 ,

$$P_m = P_{e0} = P_{\max} \cdot \text{sen} \delta_0 \quad (7.43)$$

A partir das duas últimas equações, temos que

$$P_m - (P_{e0} + P_{e\Delta}) = -(P_{\max} \cdot \cos \delta_0) \cdot \delta_\Delta \quad (7.44)$$

Substituindo as variáveis incrementais da equação (7.40) na equação de oscilação, equação (7.12), obtemos

$$\frac{2H}{\omega_s} \cdot \frac{d^2(\delta_0 + \delta_\Delta)}{dt^2} = P_m - (P_{e0} + P_{e\Delta}) \quad (7.45)$$

Trocando o lado direito dessa equação pela equação (7.44) e trocando os termos, obtemos

$$\frac{2H}{\omega_s} \cdot \frac{d^2 \delta_\Delta}{dt^2} + (P_{\max} \cdot \cos \delta_0) \cdot \delta_\Delta = 0 \quad (7.46)$$

Observe que $P_{\max} \cdot \cos \delta_0$ é a inclinação da curva do ângulo de potência no ponto de operação com o ângulo δ_0 . Denominaremos essa inclinação como S_p e a definiremos como

$$S_p = \left. \frac{dP_e}{d\delta} \right|_{\delta=\delta_0} = P_{\max} \cdot \cos \delta_0 \quad (7.47)$$

Onde S_p é chamado de coeficiente de potência sincronizante. Quando S_p é usado na equação (7.46), a equação de oscilação para variações incrementais ângulo-rotor pode ser posta na forma

$$\frac{d^2 \delta_\Delta}{dt^2} + \frac{\omega_s \cdot S_p}{2H} \cdot \delta_\Delta = 0 \quad (7.48)$$

Esta é uma equação diferencial linear de segunda ordem, cuja solução depende do sinal de S_p . Quando S_p for positivo, a solução $\delta_\Delta(t)$ corresponde a um movimento harmônico simples. Tal movimento é representado pela oscilação de um pêndulo oscilando sem amortecimento. A equação de oscilação do movimento harmônico simples é $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_n^2 \cdot x = 0$ cuja solução é $x = A \cdot \cos \omega_n \cdot t + B \cdot \sin \omega_n \cdot t$. Quando S_p é negativo, a solução $\delta_\Delta(t)$ cresce exponencialmente sem limite. Na **Figura 7.5**, o ponto de operação $\delta = 28,44^\circ$ é um ponto de equilíbrio estável. Nesse sentido, o ângulo do rotor oscila após uma pequena perturbação. Na prática o amortecimento restabelece o ângulo do rotor para $\delta_0 = 28,44^\circ$, após a perturbação temporária. Pelo outro lado, o ponto $\delta = 151,56^\circ$ é um ponto de equilíbrio instável pelo fato de S_p ser negativo. Este ponto não é válido como ponto de operação.

A solução da equação (7.48) representa à oscilação senoidal, com coeficiente de potência sincronizante S_p positivo. A frequência angular de oscilação sem amortecimento é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_s \cdot S_p}{2H}} \quad rad/s \quad (7.49)$$

Que corresponde a uma frequência de oscilação dada por

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\omega_n \cdot S_p}{2H}} \quad Hz \quad (7.50)$$

Exemplo 6.

A máquina do exemplo 3 está operando com um ângulo $\delta = 28,44^\circ$, quando ocorre uma pequena perturbação no sistema elétrico. Determine a frequência e o período de oscilação do rotor da máquina se a perturbação é removida antes da reação da máquina motriz. $H = 5 MJ/MVA$.

Solução:

Aplicando-se a equação de oscilação na equação (7.48), o coeficiente de potência sincronizante no ponto de operação é

$$S_p = 2,10 \times \cos(28,44^\circ) = 1,8466$$

A frequência angular de oscilação é, portanto,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_s \cdot S_p}{2H}} = \sqrt{\frac{377 \times 1,8460}{2 \times 5}} = 8,343 \text{ rad/s}$$

A correspondente frequência de oscilação é

$$f_n = \frac{8,343}{2\pi} = 1,33 \text{ Hz}$$

e o período

$$T = \frac{1}{f_n} = 0,753 \text{ s.}$$

Este exemplo é importante sobre o ponto de vista prático, o qual indica a ordem de grandeza da frequência que pode ser imposta a frequência nominal de 60 Hz de um grande sistema com várias máquinas interconectadas.

7.7 Critério das Áreas Iguais na Análise de Estabilidade

A equação de oscilação determinada no item 3, é não linear. Assim sendo, a solução formal não pode ser explicitada. No caso da oscilação de uma única máquina com relação a uma barra infinita é muito difícil de obter-se a solução na forma literal. Para tanto, métodos computacionais são utilizados. Para verificar a estabilidade de um sistema de duas máquinas sem resolver a equação de oscilação, um método direto e aproximado é a seguir apresentado.

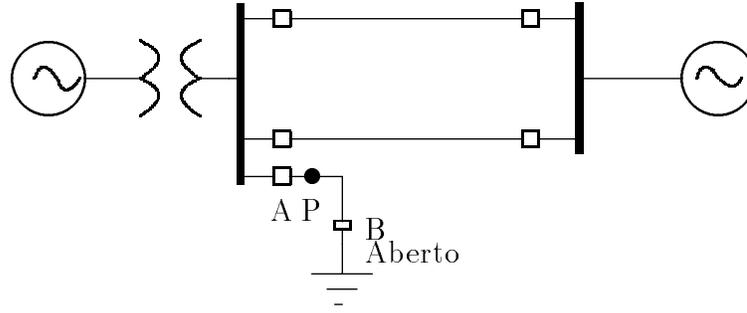


Figura 7.9: Diagrama esquemático mostrando o efeito do curto-circuito

O sistema da **Figura 7.9** é o mesmo considerado anteriormente mas com a adição de uma linha de transmissão pequena.

Inicialmente o disjuntor **A** está fechado mas o **B**, no lado oposto, da pequena linha está aberto. A condição de operação inicial do exemplo 3 pode ser considerada sem alteração. No ponto P, ocorre uma falta trifásica e limpa pelo disjuntor **A** depois de um curto período de tempo. O sistema de transmissão permanece inalterado exceto enquanto permanecer a falta. O curto causado pela falta é efetivamente na barra e a potência elétrica de saída é zero até a falta ser limpa. A condição física antes, durante e depois pode ser entendida analisando a curva do ângulo de potência na **Figura 7.10**.

Inicialmente o gerador está operando na velocidade síncrona com o ângulo do rotor de δ_0 e a potência mecânica de entrada P_m igual a potência elétrica de saída P_e como no ponto a da **Figura 7.10a**. Quando ocorre a falta no instante $t=0$, a potência elétrica de saída é zero enquanto a potência mecânica de entrada permanece inalterada como mostra a **Figura 7.10b**. A diferença de potência deve ser compensada na taxa de mudança da energia cinética armazenada na massa do rotor. Essa mudança se dá no crescimento da velocidade a partir da potência de aceleração P_m . Denominando o tempo de abertura da falta de t_c , para um tempo $t < t_c$ a aceleração é constante e pode ser calculada por

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{\omega_s}{2H} \cdot P_m \quad (7.51)$$

Enquanto permanece a falta, a velocidade cresce acima da velocidade síncrona e pode ser obtida pela integração da equação (7.51).

$$\frac{d\delta}{dt} = \int_0^t \frac{\omega_s}{2H} \cdot P_m \cdot dt = \frac{\omega_s}{2H} \cdot P_m \cdot t \quad (7.52)$$

Integrando outra vez com respeito ao tempo, têm-se, a posição angular do rotor dada por

$$\delta = \frac{\omega_s \cdot P_m}{4H} \cdot t^2 + \delta_0 \quad (7.53)$$

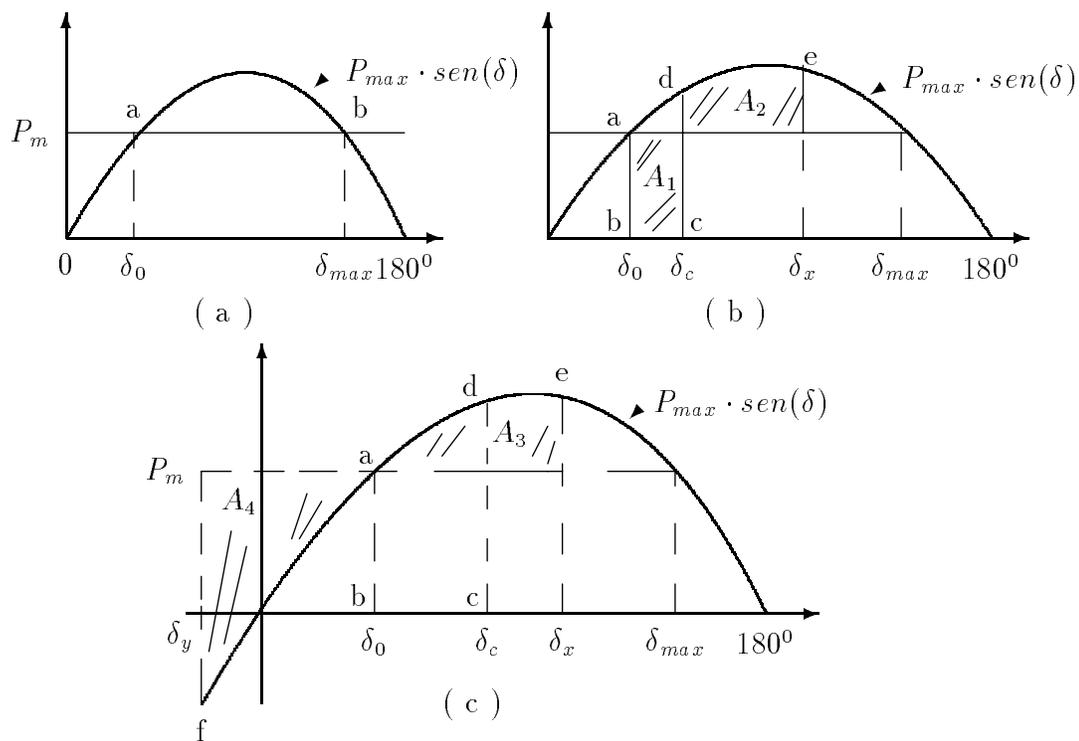


Figura 7.10: Diagrama do ângulo de potência apresentando as condições físicas do sistema antes, durante e depois do curto-circuito

As equações (7.52) e (7.53) mostram que a velocidade do rotor relativa a velocidade síncrona cresce linearmente com o tempo, enquanto o ângulo do rotor avança a partir de δ_0 até o ângulo δ_c na abertura da falta. Isto é, na **Figura 7.10b**, o ângulo δ vai de b até c. No instante da abertura da falta, o crescimento na velocidade do rotor e o ângulo entre o gerador e a barra infinita são respectivamente,

$$\left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{t=t_c} = \frac{\omega_s \cdot P_m}{2H} \cdot t_c \quad (7.54)$$

e

$$\delta(t) \Big|_{t=t_c} = \frac{\omega_s \cdot P_m}{2H} \cdot t_c^2 + \delta_0 \quad (7.55)$$

Quando a falta é limpa no ângulo δ_c , a potência elétrica cresce abruptamente ao valor correspondente ao ponto *d* na curva do ângulo de potência. Em *d* a potência elétrica excede a potência mecânica de entrada. A partir daí a potência de aceleração fica negativa. Como consequência diminui a velocidade quando a potência P_e vai de *d* a *e* na **Figura 7.10c**. Em *e* a velocidade do rotor atinge a velocidade síncrona, embora o ângulo do rotor tenha avançado δ_x . O ângulo δ_x é determinado pelo fato das áreas A_1 e A_2 serem iguais, como será explicado depois. O rotor não pode permanecer na velocidade síncrona e sim continuar decrescendo. A velocidade relativa é negativa e o ângulo do rotor move para trás a partir de δ_x em *e* ao longo da curva de potência da **Figura 7.10c**. até o ponto *a* em que a velocidade do rotor é menor que a velocidade síncrona. De *a* até *f* a potência mecânica excede a potência elétrica e a velocidade do rotor outra vez atinge a velocidade síncrona em *f*. o ponto *f* é localizado no sentido de que as áreas A_3 e A_4 sejam iguais. Na ausência de amortecimento, o rotor continuará oscilando na sequência $f - a - e$, $e - a - f$, com a velocidade síncrona ocorrendo em *e* e *f*

Em um sistema em que uma única máquina oscila em relação a uma barra infinita, podemos usar o princípio das áreas iguais, **chamado de critério das áreas iguais**, para determinar a estabilidade do sistema em condições transitórias sem resolver a equação de oscilação. Embora não aplicável a um sistema multimáquina, o método ajuda no entendimento de como certos fatores influenciam na estabilidade transitória de um sistema.

O critério das áreas iguais foi aplicado para uma máquina e uma barra infinita embora a consideração feita no item 3 mostre que o método pode ser facilmente adaptado a um sistema de duas máquinas. A equação de oscilação para a máquina conectada a barra é

$$\frac{2H}{\omega_s} \cdot \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e \quad (7.56)$$

A velocidade angular do rotor relativa a velocidade síncrona é dada por

$$\omega_r = \frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_s \quad (7.57)$$

Derivando a equação (7.57) com relação a t e substituindo o resultado na equação (7.56) obteremos

$$\frac{2H}{\omega_s} \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = P_m - P_e \quad (7.58)$$

É evidente que quando a velocidade do rotor é igual a velocidade síncrona, $\omega = \omega_s$ e $\omega_r = 0$. Multiplicando os dois lados da equação (7.58) por $\omega_r = \frac{d\delta}{dt}$, obteremos

$$\frac{H}{\omega_s} \cdot 2\omega_r \cdot \frac{d\omega_r}{dt} = (P_m - P_e) \cdot \frac{d\delta}{dt} \quad (7.59)$$

O primeiro membro dessa equação pode ser escrito da forma

$$\frac{H}{\omega_s} \cdot \frac{d(\omega_r^2)}{dt} = (P_m - P_e) \cdot \frac{d\delta}{dt} \quad (7.60)$$

Multiplicando por dt e integrando o resultado, teremos

$$\frac{H}{\omega_s} \cdot (\omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} (P_m - P_e) d\delta \quad (7.61)$$

O índice para o termo ω_r corresponde a δ , isto é, a velocidade ω_{r1} do rotor correspondente ao ângulo δ_1 e ω_{r2} correspondente a δ_2 . Assim, ω_r representa a saída do rotor da velocidade síncrona. Podemos ver facilmente que se a velocidade do rotor está na velocidade síncrona em δ_1 e em δ_2 , corresponde a $\omega_{r1} = \omega_{r2} = 0$. Nestas condições, a equação (7.61) torna-se

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} (P_m - P_e) d\delta = 0 \quad (7.62)$$

Essa equação aplicada em dois pontos δ_1 e δ_2 no diagrama do ângulo de potência, determina os pontos em que a velocidade do rotor é a velocidade síncrona. Na **Figura 7.10b**, os tais pontos são a e e correspondente a δ_0 e δ_x . Se fizermos a integração em dois passos, podemos escrever

$$\int_{\delta_0}^{\delta_c} (P_m - P_e) d\delta + \int_{\delta_c}^{\delta_x} (P_m - P_e) d\delta = 0 \quad (7.63)$$

ou

$$\int_{\delta_0}^{\delta_c} (P_m - P_e) d\delta = \int_{\delta_c}^{\delta_x} (P_e - P_m) d\delta \quad (7.64)$$

A integral do primeiro membro corresponde ao período que o sistema permanece com falta e o segundo membro corresponde ao período pós-falta. Na **Figura 7.10b**

P_e é zero durante a falta. A área hachurada A_1 é dada pelo primeiro membro da equação (7.64) e a área A_2 pelo segundo membro. As duas áreas A_1 e A_2 são iguais.

A velocidade do rotor é a velocidade síncrona em δ_x e δ_y na **Figura 7.10c**, pela mesma razão como mostra as áreas A_3 e A_4 . As áreas A_1 e A_4 são diretamente proporcionais ao crescimento da energia cinética do rotor quando está acelerando e as áreas A_2 e A_3 são proporcionais ao decrescimento da energia cinética do rotor quando está desacelerando. Isto pode ser visto pelos membros da equação (7.61).

A área A_1 depende do tempo de abertura da falta. Se o tempo de abertura for grande, o ângulo δ_c cresce, com isso cresce A_1 . Pelo critério das áreas iguais A_2 também cresce até o ângulo δ_x . Se o tempo de abertura é prolongado até que o ângulo do rotor oscile além do ângulo máximo δ_{max} , a velocidade do rotor no ponto da curva do ângulo de potência estará acima da velocidade síncrona quando a potência de aceleração é outra vez atingida. Na condição de aceleração positiva o ângulo δ crescerá sem limite levando a um resultado instável. Entretanto, existe um ângulo crítico para a abertura da falta no sentido de satisfazer o critério das áreas iguais para estabilidade. Este ângulo é chamado de **ângulo crítico de abertura** δ_{cr} , como é mostrado na **Figura 7.11**.

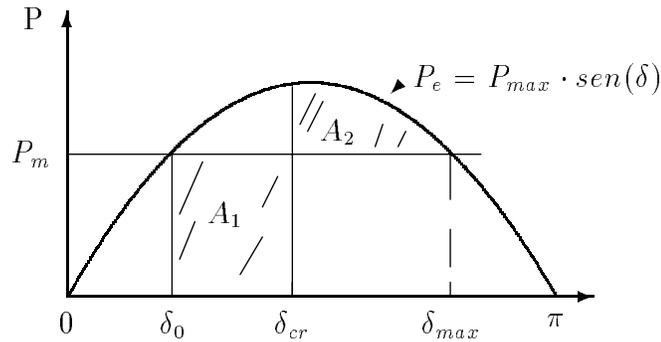


Figura 7.11: Diagrama do ângulo de potência mostrando o ângulo crítico de abertura

O tempo crítico correspondente para remover a falta é chamado de **tempo crítico de abertura** t_{cr} . No caso particular da **Figura 7.11**, o tempo crítico e o ângulo crítico de abertura são calculados como segue:

$$A_1 = \int_{\delta_0}^{\delta_{cr}} P_m d\delta = P_m (\delta_{cr} - \delta_0) \quad (7.65)$$

e a área A_2

$$A_2 = \int_{\delta_{cr}}^{\delta_{max}} (P_{max} \cdot \text{sen } \delta - P_m) d\delta = P_{max} (\cos \delta_{cr} - \cos \delta_{max}) - P_m (\delta_{max} - \delta_{cr}) \quad (7.66)$$

Igualando A_1 e A_2 obteremos após algumas manipulações algébricas

$$\cos \delta_{cr} = \left(\frac{P_m}{P_{\max}} \right) \cdot (\delta_{\max} - \delta_0) + \cos \delta_{\max}. \quad (7.67)$$

Temos a partir da curva do ângulo de potência que

$$\delta_{\max} = \pi - \delta_0 \quad (7.68)$$

e

$$P_m = P_{\max} \cdot \text{sen } \delta_0 \quad (7.69)$$

Substituindo δ_{\max} e P_m na equação (7.67), simplificando o resultado e resolvendo para δ_{cr} , obteremos

$$\delta_{cr} = \cos^{-1} [(\pi - 2\delta_0) \cdot \text{sen } \delta_0 - \cos \delta_0] \quad (7.70)$$

O valor para δ_{cr} calculado a partir dessa equação, quando substituído no primeiro membro da equação (7.55), torna-se

$$\delta_{cr} = \frac{\omega_s \cdot P_m}{4H} \cdot t_{cr}^2 + \delta_0 \quad (7.71)$$

ou

$$t_{cr} = \sqrt{\frac{4H (\delta_{cr} - \delta_0)}{\omega_s \cdot P_m}} \quad (7.72)$$

para o tempo crítico de abertura.

Exemplo 7.

Calcular o ângulo e o tempo crítico de abertura para o sistema da **Figura 7.9** para o sistema sujeito a uma falta trifásica no ponto P na linha de transmissão curta. As condições iniciais são as mesmas do exemplo 3 e $H=5$ MJ/MVA.

Solução:

No Exemplo 3 a equação do ângulo de potência é

$$P_e = P_{\max} \cdot \text{sen } \delta = 2,1 \times \text{sen } \delta$$

O ângulo inicial do rotor é $\delta_0 = 28,44^\circ = 0,496 \text{ rad}$ e a potência mecânica de entrada P_m é 1,0 p.u.. A partir da equação (7.70) temos que:

$$\delta_{cr} = \cos^{-1} [(\pi - 2 \times 0,496) \cdot \text{sen } 28,44^\circ - \cos 28,44^\circ] = 81,697^\circ = 1,426 \text{ rad}$$

Utilizando este valor com os outros valores conhecidos na equação (7.72) obteremos

$$t_{cr} = \sqrt{\frac{4 \times 5 (1,426 - 0,496)}{377 \times 1}} = 0,222 \text{ s}$$

Este valor equivale ao tempo crítico de abertura de 13,3 ciclos na frequência de 60 Hz.

Este exemplo serve para estabelecer o conceito de tempo crítico de abertura o qual é fundamental ao projetista de proteção para o esquema de abertura de falta. Nos casos mais gerais, o tempo crítico de abertura não pode ser explicitado sem resolver a equação de oscilação por simulação em computador digital.

7.8 Aplicações Adicionais do Critério das Áreas Iguais

Embora o critério das áreas iguais seja aplicado apenas para o caso de duas máquinas ou uma máquina e uma barra infinita, é bastante útil para ver o que acontece quando ocorre uma falta. O computador digital é muito prático no sentido de determinar a estabilidade de um grande sistema.

Quando um gerador está suprindo potência a uma barra infinita por duas linhas de transmissão em paralelas, a abertura de uma das linhas de transmissão pode causar a perda de sincronismo do gerador, apesar da carga está sendo suprida pela outra linha em condições de regime permanente. Se um curto-circuito trifásico ocorre na barra que as duas linhas estão conectadas, nenhuma potência será transmitida por ambas. É o caso do exemplo 7. No entanto, se a falta ocorrer na extremidade delas, a abertura dos disjuntores nos extremos isolará a falta do sistema e permitirá o fluxo através da outra linha paralela.

Quando é transmitida potência durante uma falta, o critério das áreas iguais é aplicado como mostra a **Figura 7.12**, que é similar ao diagrama de potência da **Figura 7.8**. Antes da falta, $P_{\max} \cdot \sin \delta$ é a potência transmitida; durante a falta, $r_1 \cdot P_{\max} \cdot \sin \delta$ e $r_2 \cdot P_{\max} \cdot \sin \delta$ é a potência transmitida depois da retirada da falta quando $\delta = \delta_{cr}$.

Examinando as áreas A_1 e A_2 e usando os passos do item anterior, teremos

$$\cos \delta_{cr} = \frac{\left(\frac{P_m}{P_{\max}}\right) \cdot (\delta_{\max} - \delta_0) + r_2 \cdot \cos \delta_{\max} - r_1 \cdot \cos \delta_0}{r_2 - r_1} \quad (7.73)$$

Para o sistema e a localização da falta como na **Figura 7.9**, o valor de $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ e a equação (7.73) reduz-se a equação (7.67).

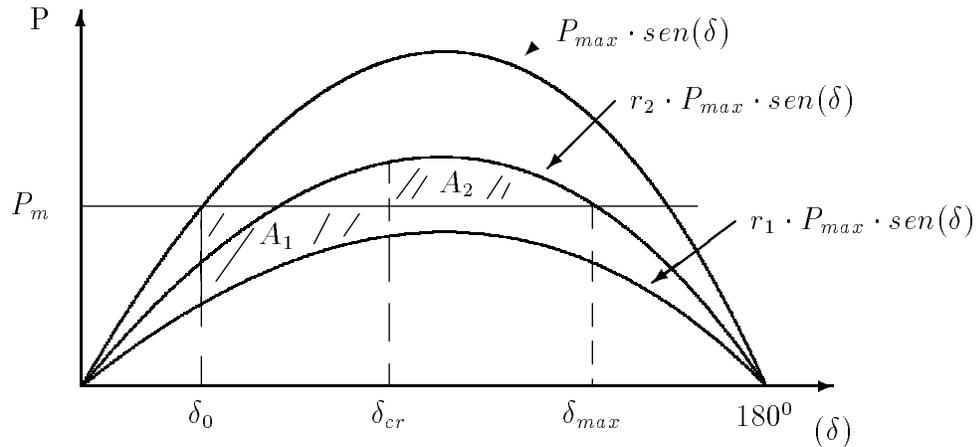


Figura 7.12: Diagrama do ângulo de potência antes, durante e depois da falta

Independentemente de sua localização, curto-circuitos não envolvendo as três fases permitem a transmissão de alguma potência devido elas serem representadas por alguma impedância conectada entre o local do curto-circuito e a barra de referência no diagrama de sequência positiva.

Os pequenos valores de r_1 resulta em um grande distúrbio no sistema devido ao baixo valor de r_1 resultar em baixa potência transmitida durante a falta. Assim sendo, teremos A_1 maior. No sentido de severidade ($r_1 \cdot P_{\max}$ decrescendo) as faltas são:

1. Falta fase - terra
2. Falta fase - fase
3. Falta fase - fase - terra
4. Falta trifásica

A falta fase-terra ocorre mais frequentemente e a falta trifásica é mais rara de acontecer.

Exemplo 8.

determine o ângulo crítico de abertura para uma falta trifásica descrita no exemplo 4 e exemplo 5 para a configuração inicial do sistema e as condições iniciais do exemplo 3.

Solução:

A equação do ângulo de potência obtida no exemplo é:

Antes da falta: $P_{\max} \cdot \sin \delta = 2,1 \times \sin \delta$.

Durante a falta: $r_1 \cdot P_{\max} \cdot \sin \delta = 0,808 \times \sin \delta$.

Depois da falta: $r_2 \cdot P_{\max} \cdot \sin \delta = 1,5 \times \sin \delta$

Assim:

$$r_1 = \frac{0,808}{2,10} = 0,385, \quad r_2 = \frac{1,5}{2,1} = 0,714$$

Do exemplo 3, temos

$$\delta_0 = 28,44^\circ = 0,496 \text{ rad}$$

e da **Figura 7.12**,

$$\delta_{\max} = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{1,0}{1,5}\right) = 138,19^\circ = 2,412 \text{ rad}.$$

Colocando esse valor na equação (7.73),

$$\cos \delta_{cr} = \frac{\frac{1,0}{2,1} \cdot (2,412 - 0,496) + 0,714 \cdot \cos 138,19^\circ - 0,385 \cdot \cos 28,44^\circ}{0,714 - 0,385} = 0,127$$

Logo

$$\delta_{cr} = 82,726^\circ$$

Para determinar o tempo crítico de abertura devemos obter a curva de oscilação de $\delta \times t$ para este exemplo.

7.9 Estudo de Estabilidade Multimáquina: Representação Clássica

O critério das áreas iguais não pode ser usado diretamente em sistemas com três ou mais máquinas, apesar do fenômeno físico observado em duas máquinas basicamente refletir o caso de multimáquinas. Entretanto, a complexidade numérica cresce com o número de máquinas em um estudo de estabilidade transitória. Quando

um sistema multimáquina em condições de transitório eletromecânico, as oscilações intermáquina ocorrem entre as máquinas através dos sistemas de transmissão que as conectam. Se apenas uma máquina atuar isoladamente como fonte de oscilação, ela fornecerá ao sistema interconectado uma oscilação eletromecânica determinada por sua inércia e seu coeficiente de potência sincronizante. A frequência típica de tal oscilação é da ordem de 1 a 2 Hz e sobreposta a frequência nominal de 60 Hz. Quando várias máquinas estão simultaneamente na condição de oscilação transitória, a curva de oscilação reflete a presença combinada das várias oscilações. Entretanto, a frequência do sistema de transmissão não será fortemente perturbada a partir de frequência nominal. Assim sendo, as considerações feitas no circuito em 60 Hz permanecem.

Para diminuir a complexidade do modelo do sistema e dar robustez aos cálculos, são feitas comumente as seguintes considerações no estudo de estabilidade transitória:

1. a potência mecânica de cada máquina permanece constante durante o tempo do cálculo da curva de oscilação;
2. a potência de amortecimento é desprezada;
3. cada máquina é representada pela reatância transitória constante em série com a tensão interna transitória constante;
4. o ângulo mecânico do rotor de cada máquina coincide com o ângulo δ elétrico da tensão interna transitória;
5. todas as cargas são consideradas como impedância shunt a terra com valores determinados nas condições pré-transitório.

O modelo de estabilidade baseado nestas considerações, é chamado de modelo clássico e os estudos que usam estes modelos são chamados de **estudos clássicos de estabilidade**. Estas considerações são adicionadas as considerações fundamentais vistas no início desse capítulo para todo estudo de estabilidade. Naturalmente, um programa de computador com máquinas e modelos de cargas mais sofisticados, pode modificar uma ou mais considerações vistas anteriormente. Entretanto, em nosso estudo o modelo clássico é usado para distúrbios produzidos a partir de faltas trifásicas.

Como visto, em qualquer estudo de estabilidade transitória, a condição do sistema antes da falta e a configuração do circuito durante e depois da ocorrência devem ser conhecidas. Conseqüentemente, em um caso multimáquinas, duas etapas preliminares são requeridas:

1. as condições em regime permanente pré-falta do sistema são calculadas usando um programa de fluxo de carga
2. a representação pré-falta é determinada e então modificada para a condição de falta e depois para a condição pós-falta.

A partir da primeira etapa, conhecemos os valores da potência ativa, reativa e a tensão nas barras de carga e geração com os ângulos calculados em relação a barra de referência. A tensão interna transitória de cada gerador é calculada pela equação

$$E' = V_t + jX'_d \cdot I \quad (7.74)$$

onde V_t é a tensão terminal correspondente e I a corrente de saída. Cada carga é convertida em uma admitância constante calculada pela equação

$$Y_L = \frac{P_L - jQ_L}{|V_L|^2} \quad (7.75)$$

onde $P_L + jQ_L$ é a carga e $|V_L|$ o módulo da tensão correspondente. A matriz admitância de barra usada no fluxo de carga para a condição pré-falta, é alterada para incluir a reatância transitória de cada gerador e a admitância shunt de carga como na **Figura 7.13**. Observe que a corrente injetada é zero nas barras exceto nas barras dos três geradores.

A segunda etapa determina a modificação da matriz admitância de barra correspondente a condição de falta e pós-falta. Assim, apenas a barra de geração interna tem injeção de corrente e as outras restantes devem ser eliminadas e a matriz modificada reduzida ao correspondente número de geradores. Durante e depois da falta, o fluxo de potência de cada gerador no circuito é calculado pela correspondente equação do ângulo de potência. Por exemplo, na **Figura 7.13**, a potência de saída do gerador 1 é dada por

$$P_{e1} = |E'_1|^2 \cdot G_{11} + |E'_1| |E'_2| |Y_{12}| \cos(\delta_{12} - \theta_{12}) + |E'_1| |E'_3| |Y_{13}| \cos(\delta_{13} - \theta_{13}) \quad (7.76)$$

onde $\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2$. Da mesma forma as equações são escritas para P_{e2} e P_{e3} com os valores Y_{ij} tirados da matriz admitância de barra 3×3 para a condição de falta e pós-falta. A equação do ângulo de potência dá a equação de oscilação

$$\frac{2H_i}{\omega_s} \cdot \frac{d^2\delta_i}{dt^2} = P_{mi} - P_{ei} \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.77)$$

para representar o movimento de cada rotor para o período de falta e pós-falta. A solução depende da localização e duração da falta. O procedimento básico usado em um programa de computador digital para um estudo clássico de estabilidade é apresentado no exemplo seguinte.

Exemplo 9.

Um sistema elétrico, 60 Hz, 230 kV, com linhas de transmissão, dois geradores e uma barra infinita como mostra a **Figura 7.14**. Os dados das linhas e dos transformadores estão na **Tabela 1**. Ocorre uma falta trifásica na linha 4-5 na vizinhança da barra 4. Usando a condição pré-falta da solução de um fluxo de carga, **Tabela 2**, determine a equação de oscilação de cada máquina durante o período de falta. Os geradores com os valores de reatâncias, e H expressos na base de 100MVA, são descritos como segue:

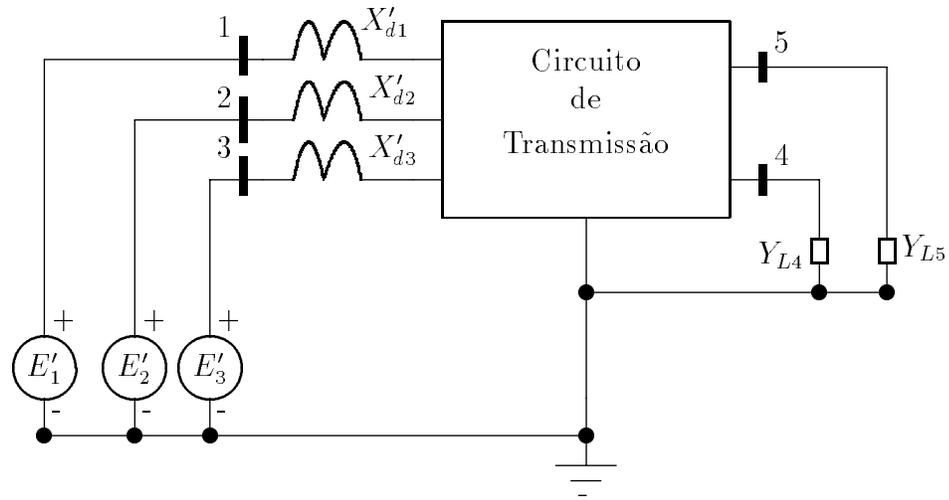


Figura 7.13: Circuito exemplo mostrando a inclusão de reatância transitória de cada gerador

Gerador 1, 400 MVA, 20 kV, $X'_d = 0,067$ p.u., $H = 11,2$ MJ/MVA

Gerador 2, 250MVA, 18kV, $X'_d = 0,10$ p.u., $H = 8,0$ MJ/MVA.

Tabela 1

Dados das linhas e transformadores com os valores em p.u.
na base de 100MVA e 230 kV

Barra a Barra	R	X	Y
Trafo 1-4		0,022	
Trafo 2-5		0,040	
Linha 3-4	0,007	0,040	0,082
Linha 3-5(1)	0,008	0,047	0,098
Linha 3-5(2)	0,008	0,047	0,098
Linha 4-5	0,018	0,110	0,226

Tabela 2

Valores dos dados de barra e condições pré-falta em p.u.

Barra	Tensão	P_G	Q_G	P_L	Q_L
1	$1,03 \angle 8,88^\circ$	3,5	0,712		
2	$1,02 \angle 6,38^\circ$	1,85	0,298		
3	$1,0 \angle 0^\circ$				
4	$1,018 \angle 4,68^\circ$			1,0	0,44
5	$1,011 \angle 2,27^\circ$			0,5	0,16

Solução:

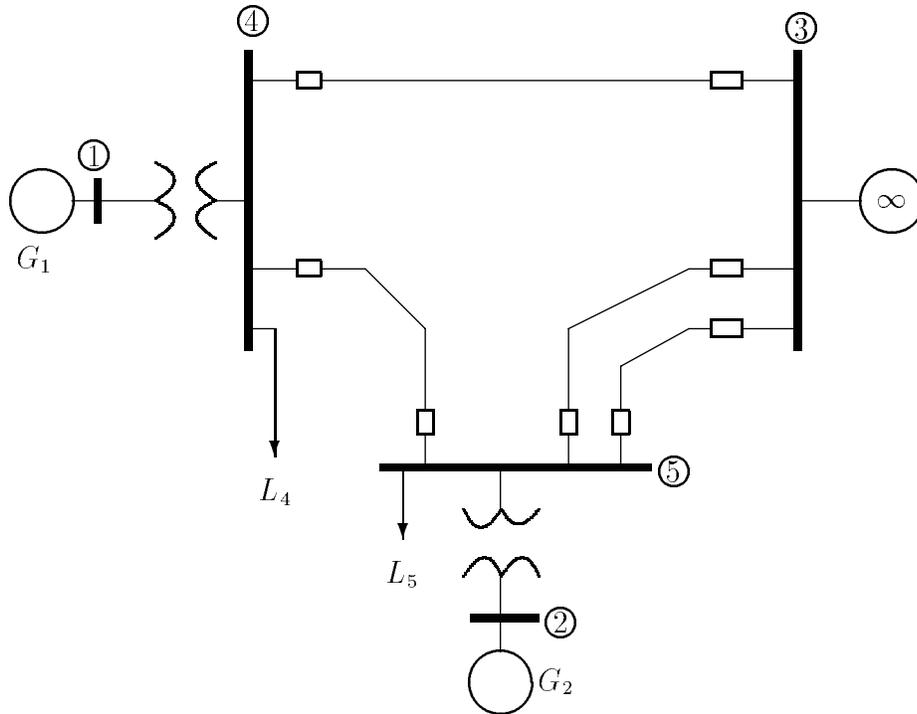


Figura 7.14: Sistema elétrico com dois geradores e uma barra infinita

Para se determinar a equação de oscilação é preciso encontrar a tensão interna transitória. A corrente injetada no circuito pela barra 1 é

$$I_1 = \frac{(P_1 + jQ_1)^*}{V_1^*} = \frac{3,5 - j0,712}{1,03\angle -8,88^\circ} = 3,468\angle -2,619^\circ$$

da mesma forma

$$I_2 = \frac{1,850 - j0,298}{1,02\angle -6,38^\circ} = 1,837\angle -2,771^\circ$$

Assim

$$E'_1 = 1,03\angle 8,88^\circ + j0,67 \times 3,468\angle -2,619^\circ = 1,10\angle 20,82^\circ$$

$$E'_2 = 1,02\angle 6,38^\circ + j0,10 \times 1,837\angle -2,771^\circ = 1,065\angle 16,19^\circ$$

Na barra infinita

$$E'_3 = E_3 = 1,0\angle 0,0^\circ$$

e

$$\delta_{13} = \delta_1 \text{ e } \delta_{23} = \delta_2$$

As cargas nas barras 4 e 5 são representadas por suas admitâncias calculadas pela equação(7.75)

$$Y_{L4} = \frac{1,0 - j0,44}{(1,018)^2} = 0,9649 - j0,4246$$

$$Y_{L5} = \frac{0,50 - j0,16}{(1,018)^2} = 0,4892 - j0,1565$$

Estas admitâncias juntamente com as reatâncias transitórias, são usadas com os parâmetros das linhas e transformadores para formar o sistemas pré-falta acrescentando à matriz admitância de barra as reatâncias transitórias das máquinas. Designaremos as barras 1 e 2 como barras internas fictícias entre a tensão interna e a reatância transitória da máquina. Assim, a matriz admitância, para o exemplo:

$$Y_{11} = \frac{1}{j0,067 + j0,022} = -j11,236$$

$$Y_{34} = -\frac{1}{0,007 + j0,04} = -4,245 + j24,2571$$

A soma das admitâncias conectadas as barras 3, 4 e 5 devem ser incluídas as capacitâncias shunt das linhas de transmissão. Assim,

$$\begin{aligned} Y_{44} &= -j11,236 + \frac{j0,082}{2} + \frac{j,0226}{2} + 4,245 - j24,2571 \\ &\quad + \frac{1}{0,018 + j0,11} + 0,9649 - j0,4246 \\ &= 6,6587 - j44,6175 \end{aligned}$$

A matriz acrescida (aumentada) é mostrada na **Tabela 3**.

Tabela 3

Elementos da matriz admitância de barra pré-falta

Barra	1	2	3	4	5
1	$j11,2360$	0,0	0,0	$j11,2360$	0,0
2	0,0	$-j7,1429$	0,0	0,0	$j7,1429$
3	0,0	0,0	11,2841 $-j54731$	$-4,2450$ $+j24,2571$	$-7,0392$ $+j41,3550$
4	$j11,2360$	0,0	$-4,2450$ $+j24,2571$	6,6588 $-j44,6175$	$-1,4488$ $+j8,8538$
5	0,0	$j7,1429$	$-7,0392$ $+j41,3550$	$-1,4488$ $+j8,8538$	8,9772 $-j57,2972$

Durante a falta, a barra 4 deve ser curto-circuitada a terra. A linha e a coluna 4 da **Tabela 3** desaparecem devido a barra 4 está ligada a barra de referência. A nova linha e coluna 4 (barra 5) são eliminadas por redução de Kron.

A matriz Y_{Bus} do sistema na condição de falta, **Tabela 4**, mostra que a barra 1 desacopla das outras barras durante a falta e que a barra 2 é conectada diretamente a barra 3. Isso reflete o fato físico que o curto-circuito na barra 4 reduz a zero a potência injetada no sistema pelo gerador 1 e força o gerador 2 fornecer potência radialmente a barra 3. Na condição de falta, encontramos, usando os valores da **Tabela 4**, as equações dos ângulos de potência

$$P_{e1} = 0$$

$$\begin{aligned} P_{e2} &= |E'_2|^2 \cdot G_{22} + |E'_2| |E_3| |Y_{23}| \cos(\delta_{23} - \theta_{23}) \\ &= (1,065)^2 (0,1362) + (1,065) (1,0) (5,1665) \cdot \cos(\delta_2 - 90,755^0) \\ &= 0,1545 + 5,5023 \cdot \sin(\delta_2 - 0,755^0) \end{aligned}$$

Entretanto, quando a falta está no sistema, as equações de oscilações (valores de P_{m1} e P_{m2} da **Tabela 2**) são

$$\frac{d^2\delta_1}{dt^2} = \frac{180 \cdot f}{H_1} \cdot (P_{m1} - P_{e1}) = \frac{180 \cdot f}{H_1} \cdot P_{a1} = \frac{180 \cdot f}{11,2} \cdot (3,5) \text{ graus elét./s}^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta_2}{dt^2} &= \frac{180 \cdot f}{H_2} \cdot (P_{m2} - P_{e2}) = \frac{180 \cdot f}{H_2} \cdot P_{a2} \\ &= \frac{180 \cdot f}{8,0} \cdot \left\{ 1,85 - \left[0,1545 + 5,5023 \times \sin(\delta_2 - 0,755^0) \right] \right\} \\ &= \frac{180 \cdot f}{8,0} \cdot \left[1,6955 - 5,5023 \times \sin(\delta_2 - 0,755^0) \right] \text{ graus elét./s}^2 \end{aligned}$$

Tabela 4

Matriz admitância de barra
Circuito com falta

Barra	1	2	3
1	0,0-j11,236 11,236∠ - 90°	0,0+j0,0	0,0+j0,0
2	0,0+j0,0	0,1362-j6,2737 6,2752∠ - 88,7563°	-0,0681+j5,1661 5,1665∠90,7552°
3	0,0+j0,0	-0,681+j5,1661 5,1665∠90,7552°	5,7986-j35,6299 36,0987∠ - 80,7564

Circuito pós-falta

Barra	1	2	3
1	0,5050-j7,7827 7,8058∠ - 86,3237°	0,0+j0,0	-0,2216+j7,6291 7,6323∠91,6328°
2	0,0+j0,0	0,1591-j6,1168 6,1189∠ - 88,5101°	-0,0901+j6,0975 6,0982∠90,8466°
3	-0,2216+j7,6291 7,6323∠91,6638°	-0,901-j6,0975 6,0982∠90,8466°	1,3927-j13,8728 13,9426∠ - 84,2672°

Exemplo 10.

A falta trifásica no exemplo 9 é limpa pela abertura simultânea dos disjuntores nas extremidades da linha em falta. Determine a equação de oscilação para o período pós-falta.

Solução:

Quando a falta é limpa pela remoção da linha 4-5, a matriz admitância Y_{Bus} **Tabela 3** deve ser modificada. Isto é feito fazendo Y_{45} e Y_{54} igual a zero e subtraindo a admitância série da linha 4-5 e a metade da admitância shunt do elemento Y_{44} e Y_{55} da **Tabela 3**. A matriz admitância reduzida aplicada ao circuito pós-falta é mostrada na parte inferior da **Tabela 4** e seus elementos iguais a zero na primeira e segunda linha. Isso reflete-se pelo fato dos geradores não estarem interconectados quando 4-5 é removida. Consequentemente, cada gerador fica conectado a barra infinita. Assim, as equações do ângulo de potência na condição pós-falta são:

$$\begin{aligned}
 P_{e1} &= |E'_1|^2 \cdot G_{11} + |E'_1| |E_3| |Y_{13}| \cdot \cos(\delta_{13} - \theta_{13}) \\
 &= (1,1)^2 (0,5005) + (1,1) (1,0) (7,6323) \cos(\delta_1 - 91,664^\circ) \\
 &= 0,6056 + 8,3955 \cdot \cos(\delta_1 - 91,664^\circ)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P_{e2} &= |E_2'|^2 \cdot G_{22} + |E_2'| |E_3| |Y_{23}| \cdot \cos(\delta_{23} - \theta_{23}) \\
&= (1,065)^2 (0,1591) + 1,065 (1,0) (6,0982) \cos(\delta_2 - 90,847^\circ) \\
&= 0,1804 + 6,4934 \cdot \text{sen}(\delta_2 - 0,847^\circ)
\end{aligned}$$

Para o período pós-falta as equações de oscilação são:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \delta_1}{dt^2} &= \frac{180 \cdot f}{11,2} \cdot \left\{ 2,5 - \left[0,6056 + 8,3955 \cdot \text{sen}(\delta_1 - 1,664^\circ) \right] \right\} \\
&= \frac{180 \cdot f}{11,2} \cdot \left[2,8944 - 8,3955 \cdot \text{sen}(\delta_1 - 1,664^\circ) \right] \text{ graus elét./s}^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \delta_2}{dt^2} &= \frac{180 \cdot f}{8,0} \cdot \left\{ 1,85 - \left[0,1804 + 6,4934 \cdot \text{sen}(\delta_2 - 0,847^\circ) \right] \right\} \\
&= \frac{180 \cdot f}{8,0} \cdot \left[1,6696 - 6,4934 \cdot \text{sen}(\delta_2 - 0,847^\circ) \right] \text{ graus elét./s}^2
\end{aligned}$$

Cada equação do ângulo de potência obtida no exemplo 9 e nesse exemplo é da forma da equação (7.35). A equação de oscilação em cada caso assume a forma

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{180 \cdot f}{H} \cdot [P_m - P_c - P_{\max} \cdot \text{sen}(\delta - \gamma)] \quad (7.78)$$

Onde a parcela entre colchetes representa a potência de aceleração do rotor. Consequentemente, podemos escrever a equação na forma

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{180 \cdot f}{H} \cdot P_a \text{ graus elét./s}^2 \quad (7.79)$$

Onde

$$P_a = P_m - P_c - P_{\max} \cdot \text{sen}(\delta - \gamma) \quad (7.80)$$

7.10 Solução por Passos da Curva de Oscilação

Em geral, o único método possível para resolver a curva de oscilação é o método por passos. Existem vários métodos para a solução numérica de equações diferenciais de segunda ordem que utilizam cálculo por passos para pequenos incrementos da variável independente. Os métodos mais elaborados só são possíveis quando os cálculos são feitos por um computadores digital. O método utilizado nos cálculos feitos a mão é necessariamente mais simples que os recomendados para computador. No método mais simples, a variação da posição angular do rotor durante um intervalo de tempo pequeno é calculado fazendo as seguintes hipóteses prévias:

1. A potência de aceleração P_a , calculada no começo de um intervalo é constante desde o meio do intervalo precedente até metade do intervalo considerado.
2. A velocidade angular é constante em todo o intervalo, sendo considerado para essa grandeza o valor que ela possui no meio do intervalo. Evidentemente, nenhuma dessas hipótese é verdadeira, uma vez que δ varia continuamente e tanto P_a como ω são funções de δ . Com a diminuição do intervalo, a curva de oscilação calculada com base nessas hipóteses aproxima-se da curva real. A **Figura 7.15** ajudará na visualização das hipóteses.

A potência de aceleração é calculada para os pontos envolvidos em pequenos círculos no final dos intervalos $(n-2)$, $(n-1)$ e (n) , os quais iniciam os intervalos $(n-1)$, (n) e $(n+1)$. A linha em degraus de P_a na **Figura 7.15** resulta da hipótese de que P_a é constante entre os pontos médios dos intervalos. Analogamente ω_r , o excesso da velocidade angular sobre a velocidade síncrona ω_s , é mostrado como uma linha em degraus, constante no intervalo, com valor calculado no respectivo ponto médio. Entre as ordenadas $(n - \frac{3}{2})$ e $(n - \frac{1}{2})$ existe uma variação de velocidade provocada pela potência de aceleração. A variação de velocidade é o produto da aceleração pelo intervalo de tempo, isto é

$$\omega_{r,n-\frac{1}{2}} - \omega_{r,n-\frac{3}{2}} = \frac{d^2\delta}{dt^2} \cdot \Delta t = \frac{\omega_s}{2H} \cdot P_{a,n-1} \cdot \Delta t. \quad (7.81)$$

A variação de δ em um intervalo qualquer é o produto de ω_r no intervalo pelo tempo. Nessas condições, a variação de δ no intervalo $(n-1)$ é

$$\Delta\delta_{n-1} = \delta_{n-1} - \delta_{n-2} = \Delta t \cdot \omega_{r,n-\frac{3}{2}} \quad (7.82)$$

e no enézimo intervalo

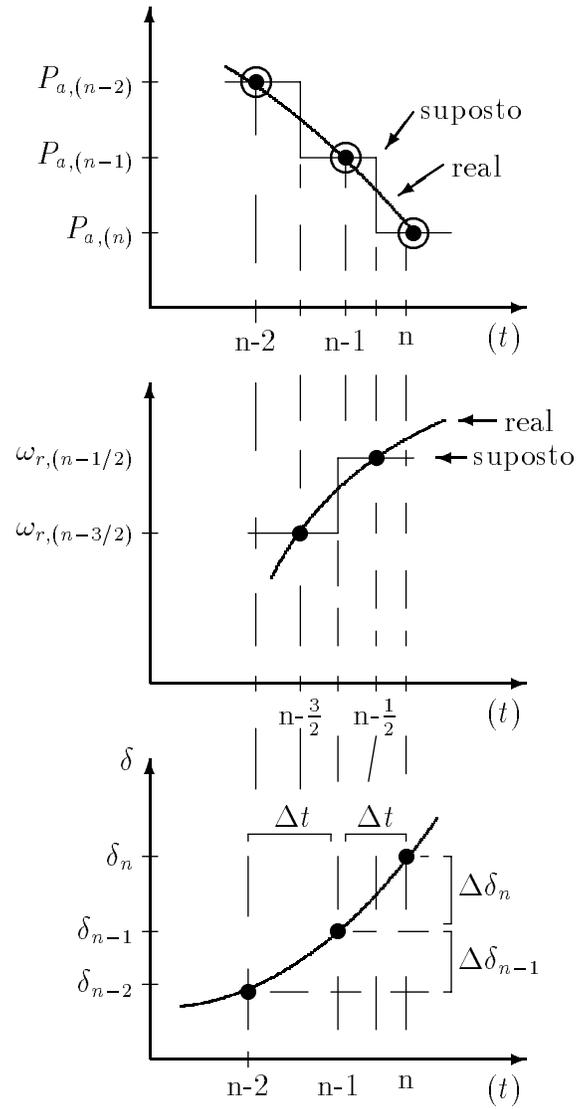


Figura 7.15: Valores reais e suposto de P_a , ω_r e δ em função do tempo

$$\Delta\delta_n = \delta_n - \delta_{n-1} = \Delta t \cdot \omega_{r,n-\frac{1}{2}}. \quad (7.83)$$

Subtraindo a equação (7.82) da equação (7.83) e subtraindo a equação (7.81) na equação resultante para eliminar todos os valores de ω_r , obteremos

$$\Delta\delta_n = \Delta\delta_{n-1} + k \cdot P_{a,n-1} \quad (7.84)$$

onde

$$k = \frac{\omega_s}{2H} \cdot (\Delta t)^2. \quad (7.85)$$

Exemplo 11.

Prepare uma tabela mostrando as etapas, a fim plotar a curva de oscilação da máquina 2 para a falta no sistema de 60 Hz do exemplo 9 e 10. A falta é limpa pela abertura simultânea dos disjuntores nas extremidades da linha com falta em 0,225s.

Solução:

Sem perda de generalidade, consideraremos os cálculos detalhados para a máquina 2. Os cálculos para a curva de oscilação da máquina 1 fica a critério do estudante. Os nossos cálculos serão feitos em p.u. na base de 100MVA. Para o intervalo de tempo $\Delta t = 0,05s$, o parâmetro k da máquina 2 é

$$k = \frac{180 \cdot f}{H} \cdot (\Delta t)^2 = \frac{180 \times 60}{8,0} \times 25 \times 10^{-4} = 3,375 \text{ graus elét.}$$

Quando a falta ocorre em $t = 0$, o ângulo do rotor da máquina 2 não pode mudar instantaneamente. Assim, a partir do exemplo 9, $\delta_0 = 16,19^\circ$ e durante a falta

$$P_e = 0,1545 + 5,5023 \times \text{sen}(\delta - 0,755^\circ).$$

Entretanto, como visto no exemplo 9

$$P_a = P_m - P_e = 1,6955 - 5,5023 \times \text{sen}(\delta - 0,755^\circ).$$

No início do primeiro intervalo há uma descontinuidade na potência de aceleração de cada máquina. Antes da falta $P_a=0$, e depois

$$P_a = 1,6955 - 5,5023 \times \text{sen}(16,19^\circ - 0,755^\circ) = 0,231 \text{ p.u..}$$

O valor médio de P_a em $t=0$ é $\frac{1}{2} \times 0,231 = 0,1155 \text{ p.u..}$ Então, temos que

$$k \cdot P_a = 3,375 \times 0,1155 = 0,3898^0$$

Identificaremos os intervalo pelos subscritos numéricos. Assim,

$$\Delta\delta_1 = 0 + 0,3898 = 0,3898^0$$

sendo a mudança do ângulo do rotor da máquina 2 no primeiro intervalo de tempo de 0 a Δt . Assim, no final do primeiro intervalo

$$\delta_1 = \delta_0 + \Delta\delta_1 = 16,19^0 + 0,3898^0 = 16,5798^0$$

e

$$\delta_1 - \gamma = 16,5798 - 0,755 = 15,8248^0.$$

Temos então em $t = \Delta t = 0,05s$

$$k \cdot P_{a,1} = 3,375 \times [1,6955 - 5,5023 \times \text{sen}(15,8248^0)] = 0,6583^0.$$

O ângulo do rotor cresce no segundo intervalo de tempo por

$$\Delta\delta_2 = \Delta\delta_1 + k \cdot P_{a,1} = 0,3898 + 0,6583 = 1,0481^0.$$

Assim, no final do segundo intervalo de tempo

$$\delta_2 = \delta_1 + \Delta\delta_2 = 16,5798 + 1,0481 = 17,6279^0.$$

Os passos subsequentes dos cálculos estão na **Tabela 5**. Observe que é necessária a equação pós-falta do exemplo 10.

Na **Tabela 5** o termo $P_{\max} \cdot \text{sen}(\delta - \gamma)$, P_a e δ_n são valores calculados no instante de tempo t mostrado na primeira coluna e δ_n é a mudança no ângulo do rotor durante o intervalo que inicia no instante indicado. Por exemplo, no instante $t=0,10s$ o ângulo $17,6279^0$ é o primeiro valor calculado que é determinado adicionando a mudança do ângulo durante o intervalo de tempo precedente (0,05 a 0,10s) ao ângulo no instante $t=0,05s$. O próximo $P_{\max} \cdot \text{sen}(\delta - \gamma)$ é calculado para $\delta = 17,6279^0$. Assim $P_a = (P_m - P_c) - P_{\max} \text{sen}(\delta - \gamma)$ e $k \cdot P_a$ são calculados. O valor de $k \cdot P_a$ é $0,3323^0$ que é adicionado a mudança angular de $1,0481^0$ durante o intervalo precedente para encontrar a mudança de $1,3804^0$ durante o intervalo iniciado em $t=0,10s$. O valor adicionado a $17,6279^0$ resulta em um valor de $\delta = 19,0083$ em $t=0,15s$. Note que em $t=0,25s$ o valor de $P_m - P_e$ sofre uma mudança causada pela abertura (limpeza) da falta em $0,225s$. O ângulo γ muda, também, de $0,755$ a $0,847^0$.

Tabela 5

Cálculo da curva de oscilação da máquina 2 do exemplo 11
para abertura da falta em 0,225s

t,s	$\delta_n - \gamma$ graus elét.	$P_{\max} \cdot \text{sen}(\delta_n - \gamma)$ p.u.	P_a p.u.	$k \cdot P_a$ graus elét.	$\Delta\delta_n$ graus elét.	δ_n graus elét.
00-	0,0000		16,1900
00+	15,435	1,4644	0,2310		16,1900
0_{av}	0,1155	0,3898 0,3898	16,1900
0,05	15,8248	1,5005	0,1950	0,6583 1,0481	16,5798
0,10	16,8729	1,5970	0,0985	0,3323 1,3804	17,6279
0,15	18,2533	1,7234	-0,0279	-0,0942 1,2862	19,0083
0,20	19,5395	1,8403	-0,1448	-0,4886 0,7976	20,2945
0,25	20,2451	2,2470	-0,5774	-1,94867 -1,1511	21,0921
0,30	19,0940	2,1241	-0,4545	-1,5340 -2,6852	19,9410
0,35	16,4048	1,8343	-0,1647	-0,5559 -,32410	17,2558
0,40	13,1678	1,4792	0,1904	0,6425 -2,5985	14,0148
0,45	10,5693	1,1911	0,4785	1,6151 -0,9833	11,4163
0,50	9,5860	1,0813	0,5883	1,9854 1,0020	10,4330
0,55	10,5880	1,1931	0,4765	1,6081 2,6101	11,4350
0,60	13,1981	1,4826	0,1870	0,6312 3,2414	14,0451
0,65	16,4395	1,8376	-0,1680	-0,5672 2,6742	17,2865
0,70	19,1137	2,1262	-1,5411	-1,5411 1,1331	19,9607
0,75	20,2468	2,2471	-0,5775	-1,9492 -0,8161	21,0938
0,80	19,4307	2,1601	-0,4905	-1,6556 -2,4716	20,2771
0,85						17,8061

Quando uma falta é limpa, ocorre uma descontinuidade na potência de aceleração. Em $t=0,225s$, que é o caso para a montagem da **Tabela 5**, nenhuma aproximação especial foi feita. Nosso procedimento foi assumir uma descontinuidade no meio do intervalo, considerando P_a constante que é determinado por δ no início do intervalo.

Quando a falta é limpa no início de um intervalo tal com em três ciclos (0,05s), os dois valores da potência de aceleração resulta de duas expressões (uma durante a falta e outra depois da abertura) para a potência de saída do gerador no início do intervalo. Para o sistema do exemplo 11, se a descontinuidade ocorre em 0,05s, o valor médio dos dois valores é assumido com um valor constante de P_a de 0,025 a 0,075s. O procedimento é o mesmo que quando ocorre uma falta em $t=0$ como na **Tabela 5**.

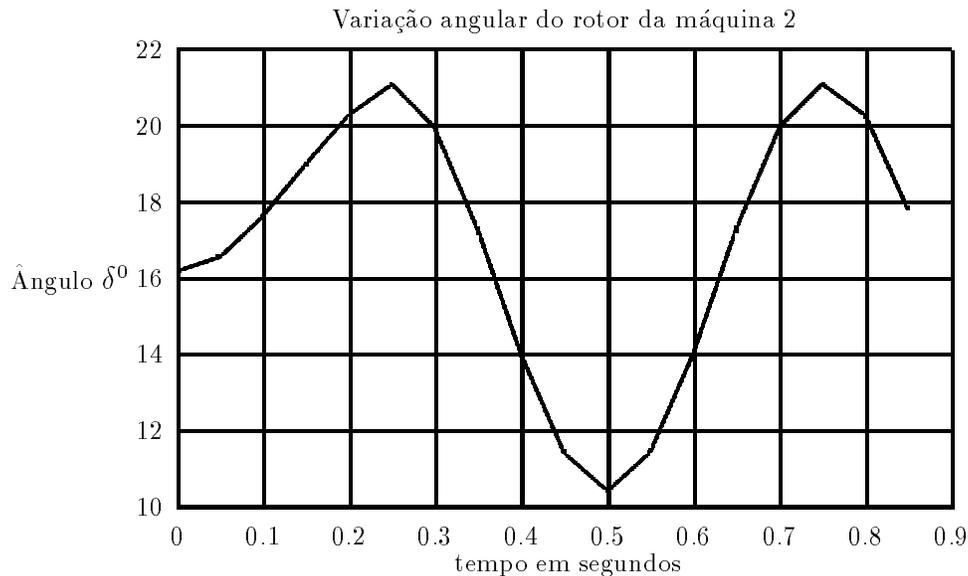


Figura 7.16: Curva do ângulo de potência da máquina 2

Da maneira que foi preparada a **Tabela 5**, poderemos determinar $\delta \times t$ da máquina 1 para abertura da falta em 0,225s e ambas as máquinas para abertura em 0,05s. Posteriormente obteremos os dados para o gráfico $\delta \times t$ das duas máquinas para a abertura em 0,05 e 0,225s. As curvas de oscilação são feitas para a abertura em 0,225s. Pode-se ver que a máquina 1 é instável neste caso, **Tabela 6** e **Figura 7.17**.

O coeficiente de potência sincronizante calculado da equação do ângulo de potência da máquina 2 na condição pós-falta é

$$S_p = \frac{dP_e}{d\delta} = \frac{d}{d\delta} \left[0,1804 + 6,4934 \times \text{sen}(\delta - 0,847^\circ) \right] = 6,4934 \times \cos(\delta - 0,847^\circ).$$

Observe que para os pontos calculados na **Tabela 5**, o ângulo da máquina 2 varia entre $10,43^\circ$ e $21,09^\circ$. Usando esses ângulos, obtem-se pouca diferença no valor encontrado para S_p . Se usarmos o valor médio, $15,76^\circ$, teremos para S_p

$$S_p = 6,74 \text{ p.u. potência/rad elét.}$$

E pela equação (7.50) a frequência de oscilação

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{377 \times 6,274}{2 \times 8}} = 1,935 \text{ Hz}$$

E o período de oscilação

$$T = \frac{1}{1,935} = 0,517s$$

7.11 Programa de Computador Digital para Estudo de Estabilidade Transitória.

Atualmente os programas de computador digital para estudos de estabilidade transitória têm sido utilizados para atender dois requisitos básicos:

1. estudos para grandes sistemas interligados com várias máquinas;
2. necessidade de representar mais detalhadamente as máquinas e seus sistemas de controle.

A representação clássica das máquinas são úteis para alguns estudos. Entretanto, a elaboração de modelos mais detalhados podem ser requeridos para representar turboalternadores modernos com características dinâmicas determinadas por tecnologias mais avançadas nos projetos das máquinas e nos sistemas de controle.

O modelo mais simples de máquina síncrona é aquele usado no estudo clássico. Modelos mais complicados de máquinas usando dois eixos, eixo direto e em quadratura, são utilizados para representar a condição do fluxo durante o período subtransitório e transitório imediatamente depois de um distúrbio no sistema. Por exemplo, sem o modelo explícito da máquina para representar a variação do enlace de fluxo do enrolamento de campo no eixo direto, não é possível representar a ação do regulador automático de tensão no sistema de excitação que todas as máquinas modernas hoje são equipadas. O sistema de controle da turbina que controla a potência mecânica de entrada da unidade geradora, também tem característica de resposta dinâmica que pode influenciar na dinâmica do rotor. Se estes sistemas de controle são representados, o modelo da unidade geradora está bem representado. Os modelos mais complexos de geradores dão um número maior de equações algébricas e diferenciais para cada máquina.

Em estudos de grandes sistemas, vários geradores são interconectados com centros de cargas distintos por sistemas de linhas de transmissão cujo desempenho também será representado por um grande número de equações algébricas. Entretanto, dois conjuntos de equações serão resolvidos simultaneamente para cada intervalo subsequente a um distúrbio de um sistema. Um conjunto consiste das equações algébricas para o comportamento em regime permanente e suas cargas e, a equação algébrica que relaciona V_t e E' da máquina síncrona. O outro conjunto consiste das equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico das máquinas associado aos sistemas de controle.

O fluxo de carga Newton-Raphson é a técnica mais comum de solução para as equações do circuito. Vários métodos são conhecidos para resolver as equações diferenciais por integração numérica. O método de Runge-Kutta é bastante usado nos programas de estabilidade transitória.

A **Tabela 6**, mostra os resultados de saída de um computador para plotar a curva de oscilação das máquinas 1 e 2 do exemplo 11 para abertura em 0,225s e 0,05s, cujos gráficos estão nas Figuras 7.17 e 7.18.

Tabela 6

Saída do computador para a curva de oscilação das máquinas 1 e 2 para a abertura em 0,225s e 0,05s

Abertura em 0,225s			Abertura em 0,05s		
Tempo	Máq. 1	Máq. 2	Tempo	Máq. 1	Máq. 2
0,00	20,8	16,2	0,00	20,8	16,2
0,05	25,1	16,6	0,05	25,1	16,6
0,10	37,7	17,6	0,10	32,9	17,2
0,15	58,7	19,0	0,15	37,3	17,2
0,20	88,1	20,3	0,20	36,8	16,7
0,25	123,1	20,9	0,25	31,7	15,9
0,30	151,1	19,9	0,30	23,4	15,0
0,35	175,5	17,4	0,35	14,6	14,4
0,40	205,1	14,3	0,40	8,6	14,3
0,45	249,9	11,8	0,45	6,5	14,7
0,50	319,3	10,7	0,50	10,1	15,6
0,55	407,0	11,4	0,55	17,7	16,4
0,60	489,9	13,7	0,60	26,6	17,1
0,65	566,0	16,8	0,65	34,0	17,2
0,70	656,4	19,4	0,70	37,6	16,8
0,75	767,7	20,8	0,75	36,2	16,0

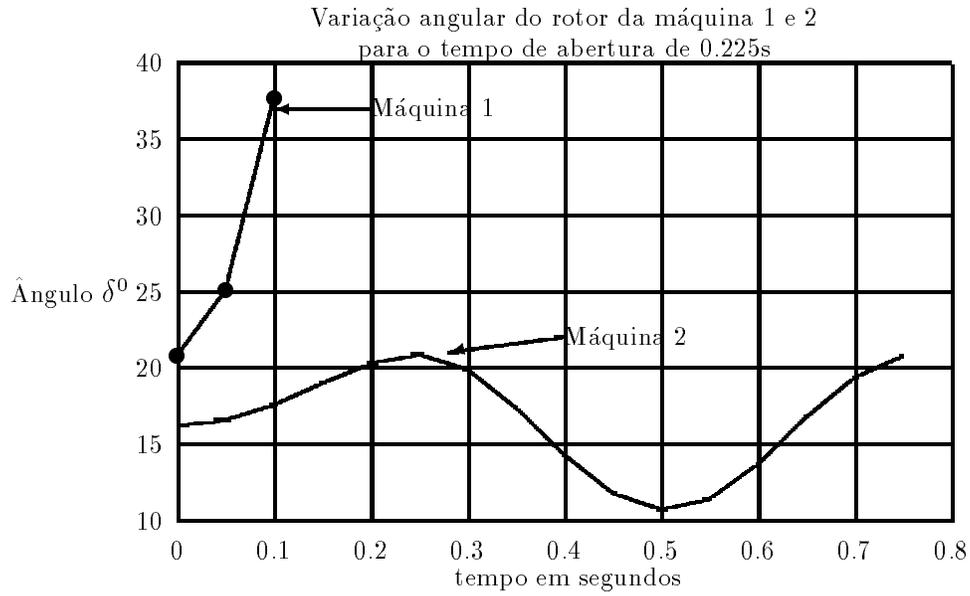


Figura 7.17: Curva do ângulo de potência da máquina 1 e 2 para o tempo de abertura de 0,225s

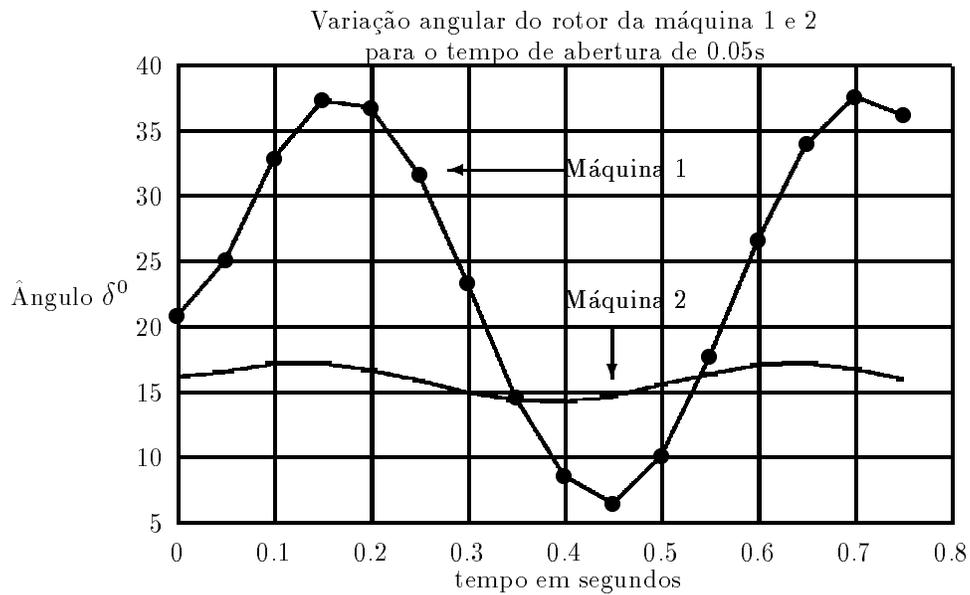


Figura 7.18: Curva do ângulo de potência da máquina 1 e 2 para o tempo de abertura de 0,05s

Referências Bibliográficas

- [1] **Alcir Monticelli.** Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica. Cepel-Eletróbrás. Editora Edgard Blucher LTDA, 1983.
- [2] **Dorel Soares Ramos, Eduardo Mário Dias.** Sistemas Elétricos de Potência. Vol. 1 e 2. Guanabara Dois.
- [3] **Edward Wilson Kimbark, Sc.D.** Power System Stability. Vol. I. John Wiley, New York.
- [4] **Homer E. Brown.** Grandes Sistemas Elétricos Métodos Matriciais. Livros Técnicos e Científicos. Editora Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Edição 1975.
- [5] **J. Tavares de Oliveira.** Fundamentos de Análise de Sistemas de Potência. Apostila.
- [6] **J. Tavares de Oliveira.** Minimização de Custo de Combustíveis de usinas Térmicas. Tese de Mestrado, UFPB, Campina Grande-Pb, 1979.
- [7] **J. Tavares de Oliveira.** Análise Trifásica do Fenômeno de Ferroressonância. Tese de Doutorado. COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro-Brasil. 1993.
- [8] **Olle I. Elgerd.** Introdução à Teoria de Sistemas de Energia Elétrica. Editora Mc Graw-Hill do Brasil LTDA.
- [9] **Paul M. Anderson.** Analysis of Falted Power Systems. The Iowa State University Press/Ames-1973.
- [10] **Peter Peregrinus Ltd.** Stevenage, UK, and, New York. 2nd edição. Power System Protection, Vol. 1,2,3
- [11] **Siemens AG.** Correntes de Curto-Circuito em Redes Trifásicas. Editora Edgard Blucher LTDA. Tradução 5ª Edição Alemã. Set/1975.
- [12] **William D. Stevenson Jr..** Elements of Power System Analysis. Fourth Edition. Mc Graw Hill.