



**UNICAMP** Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação

# **Máquinas Elétricas e Acionamento** *uma introdução*

**Edson Bim**

# Sumário

<b>4</b>	<b>Regime Permanente de Máquinas de Corrente Contínua</b>	<b>1</b>
4.1	Estrutura geométrica e aspectos gerais de funcionamento . . . . .	1
4.1.1	Reação de armadura . . . . .	2
4.1.2	Torque e comutação . . . . .	4
4.2	Equações básicas e fluxo de potência . . . . .	6
4.3	Classificação e funcionamento . . . . .	11
4.3.1	Motores . . . . .	11
4.3.2	Geradores . . . . .	20
4.4	Princípio do controle de velocidade . . . . .	23
4.4.1	Controle por tensão de armadura . . . . .	23
4.4.2	Controle por variação do fluxo indutor . . . . .	25
4.5	Frenagem elétrica . . . . .	27
4.5.1	Frenagem dinâmica . . . . .	28
4.5.2	Frenagem por inversão da tensão terminal de armadura . . . . .	28
4.5.3	Frenagem regenerativa . . . . .	29
4.6	Ponto de funcionamento e estabilidade . . . . .	29
4.7	Generalidades sobre seleção de motores . . . . .	30
	Exercícios . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Dinâmica da Máquina de Corrente Contínua de Excitação Separada</b>	<b>37</b>
5.1	Introdução . . . . .	37
5.2	Motor de excitação separada . . . . .	37
5.2.1	Variação abrupta da tensão de armadura com torque de carga constante . . . . .	41
5.2.2	Variação abrupta do torque de carga com tensão de armadura constante . . . . .	41
5.2.3	Partida do motor com carga . . . . .	42
5.2.4	Modelo para Pequenas Variações . . . . .	42
5.2.5	Transitórios devidos à variação da Tensão de Excitação . . . . .	44
5.2.6	Transitórios na frenagem elétrica . . . . .	45
5.3	Equações dinâmicas do motor com excitação série . . . . .	48
	Exercícios . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Produção de Campo Magnético Girante em Máquinas de Corrente Alternada</b>	<b>51</b>
6.1	Introdução . . . . .	51
6.2	Campo magnético e força magnetomotriz gerados por excitação monofásica . . . . .	53
6.2.1	Deslocamento da onda de força magnetomotriz . . . . .	54
6.3	Força magnetomotriz de enrolamentos polifásicos e multipolares . . . . .	57
6.3.1	Estatore . . . . .	57
6.3.2	Rotor . . . . .	63
6.4	Fmm resultante de entreferro . . . . .	67
	Exercícios . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Fluxo Magnético, Indutância e Resistência Elétrica de Enrolamentos</b>	<b>71</b>
7.1	Introdução . . . . .	71
7.2	Fluxo magnético . . . . .	71
7.3	Indutâncias de enrolamentos . . . . .	75
7.4	Resistência elétrica de enrolamentos . . . . .	80

<b>8</b>	<b>Máquina de Indução descrita por Vetores Espaciais</b>	<b>83</b>
8.1	Introdução . . . . .	83
8.2	O modelo no sistema de referência estacionário . . . . .	83
8.2.1	Vetores espaciais de forças magnetomotrizes e de correntes . . . . .	84
8.2.2	Vetor espacial força eletromotriz . . . . .	91
8.2.3	Matrizes de transformação $abc - \alpha\beta$ . . . . .	92
8.2.4	Vetores de fluxos concatenados e de tensões elétricas . . . . .	96
8.3	O modelo no sistema de referência genérico . . . . .	98
8.3.1	Equações básicas e circuito equivalente . . . . .	99
8.3.2	Potência . . . . .	101
8.3.3	Torque desenvolvido . . . . .	102
8.3.4	Os modelos descritos em variáveis de estado . . . . .	104
8.4	O modelo no sistema de referência síncrono . . . . .	109
8.5	Equações em p.u. . . . .	111
	Exercícios . . . . .	113
<b>9</b>	<b>Regime Permanente de Máquinas de Indução</b>	<b>117</b>
9.1	Circuito equivalente e diagramas fasoriais . . . . .	117
9.2	Fluxo de potência e torque . . . . .	123
9.2.1	Torque desenvolvido pelo motor alimentado por fonte de tensão . . . . .	128
9.2.2	Torque desenvolvido pelo motor alimentado por fonte de corrente . . . . .	131
9.3	Classificação dos motores de indução trifásicos de rotor gaiola . . . . .	132
9.4	Controle escalar de velocidade . . . . .	133
9.4.1	Fluxo do entreferro constante . . . . .	134
9.4.2	Variação da tensão de terminal do estator . . . . .	136
9.4.3	Variação da corrente de terminal do estator . . . . .	136
9.4.4	Variação do número de pólos . . . . .	136
9.4.5	Variação da frequência de alimentação . . . . .	138
9.4.6	Variação da resistência de rotor . . . . .	138
9.5	Frenagem elétrica . . . . .	138
9.5.1	Frenagem por inversão da seqüência de fase . . . . .	139
9.5.2	Frenagem regenerativa . . . . .	139
9.5.3	Frenagem por corrente contínua . . . . .	139
9.6	Gerador de Indução de rotor gaiola . . . . .	139
9.6.1	Gerador ligado à rede . . . . .	139
9.6.2	Gerador auto-excitado . . . . .	141
9.7	Motor monofásico . . . . .	144
9.7.1	Teoria dos dois campos girantes . . . . .	144
9.7.2	Métodos de partida . . . . .	146

# Lista de Figuras

4.1	Constituição básica da máquina de corrente contínua. . . . .	2
4.2	Características dos enrolamentos imbricado e ondulado. . . . .	3
4.3	Distribuições espaciais típicas de f.m.m e de fluxo. . . . .	4
4.4	Enrolamentos auxiliares: compensadores e de interpólos . . . . .	4
4.5	Produção de torque e a necessidade da comutação. . . . .	5
4.6	Comutação da corrente em uma bobina: tempo de comutação $t_c = t_3 - t_1$ . . . . .	6
4.7	Eixos magnéticos do campo indutor (eixo $d$ ) e da armadura (eixo $q$ ). . . . .	6
4.8	Característica de excitação. . . . .	7
4.9	Características a vazio e com reação de armadura. . . . .	8
4.10	Circuito elétrico equivalente de armadura. . . . .	9
4.11	Modos de funcionamento da máquina de corrente contínua. . . . .	10
4.12	Fluxo de potência na máquina de corrente contínua. . . . .	11
4.13	Operação da máquina contínua no plano $\omega \times T_{em}$ . . . . .	11
4.14	Motor com campo separado. . . . .	12
4.15	Circuito equivalente do motor de campo paralelo. . . . .	13
4.16	Motor campo série. . . . .	16
4.17	Motor composto aditivo. . . . .	19
4.18	Gerador de corrente contínua autoexcitado. . . . .	21
4.19	Característica estática do controle de velocidade por variação da tensão de armadura: $V_{ta1} < V_{ta2}$ . . . . .	23
4.20	Controle de velocidade por variação de $V_{ta}$ . . . . .	24
4.21	Retificador trifásico controlado. . . . .	25
4.22	Característica do controle de velocidade por variação do fluxo indutor: $V_{f2} < V_{f1}$ . . . . .	26
4.23	Curvas de capacidade de motores CC. . . . .	27
4.24	Circuito da armadura na frenagem elétrica. . . . .	27
4.25	Frenagem dinâmica: $r_{x2} > r_{x1}$ . . . . .	28
4.26	Frenagem por inversão de tensão. . . . .	29
4.27	Frenagem regenerativa . . . . .	30
4.28	Estabilidade estática da operação de motores. . . . .	31
4.29	Diagramas de carga. . . . .	32
6.1	Geometria básica do estator e dos rotores das máquinas de indução. . . . .	52
6.2	Geometria básica dos rotores de máquinas síncronas. . . . .	53
6.3	Linhas de campo magnético e fmm instantâneas produzidas no entreferro por excitação de uma única bobina. . . . .	54
6.4	Enrolamento elementar de 4 pólos e duas bobinas de passo pleno. . . . .	56
6.5	Estator trifásico de 12 ranhuras, 2 pólos e com bobinas de passo pleno. . . . .	58
6.6	Esboço idealizado da fmm do enrolamento trifásico-exemplo, no instante em que $i_{as}(t) = I_{max}$ . . . . .	58
6.7	Fmm do conjunto pólo-fase. . . . .	59
6.8	Enrolamento trifásico de 12 ranhuras, 2 pólos e passo encurtado de uma ranhura. . . . .	61
6.9	Ângulos espaciais elétricos da fmm de rotor em relação aos eixos magnéticos $ar$ e $as$ . . . . .	64
6.10	Ilustração gráfica da relação matemática entre as velocidades $\omega_1$ , $\omega_2$ e $\omega_m$ . . . . .	66
6.11	Esboço da distribuição de fmm de rotor de pólos lisos. . . . .	67
6.12	Pólos salientes e enrolamento amortecedor. . . . .	68

7.1	Enrolamentos $w_1$ e $w_2$ deslocados no espaço de $\gamma$ radianos elétricos. . . . .	73
7.2	Resistividades de alguns materiais em função da temperatura em $^{\circ}K$ . . . . .	81
8.1	Eixos magnéticos do estator e o plano complexo. . . . .	85
8.2	Estator trifásico e o seu equivalente bifásico. . . . .	86
8.3	Definição do vetor espacial representativo das correntes do rotor. . . . .	90
8.4	Transformação $\alpha\beta - xy$ . . . . .	99
8.5	Circuito equivalente no sistema de referência genérico. . . . .	101
8.6	Circuitos equivalentes de eixos direto e de quadratura. . . . .	110
9.1	Diagramas fasoriais e circuito equivalente de estator. . . . .	119
9.2	Circuito equivalente da máquina de indução referido ao estator e o diagrama fasorial do circuito de rotor. . . . .	120
9.3	Circuito equivalente do rotor de $N_r$ espiras efetivas por par de pólos por fase e na frequência de escorregamento. . . . .	122
9.4	Fluxo de potência ativa na máquina de indução. . . . .	125
9.5	Potência nos terminais elétrico e mecânico da máquina de indução com rotor gaiola. . . . .	126
9.6	Circuito equivalente Thévenin. . . . .	129
9.7	Curva torque $\times$ escorregamento típica da máquina de indução. . . . .	130
9.8	Ranhura de barra profunda e de gaiola dupla. . . . .	133
9.9	Características estáticas torque $\times$ velocidade de motores de indução em função da categorias de projeto. . . . .	134
9.10	Controle da velocidade com fluxo do entreferro constante. . . . .	135
9.11	Esquema de controle de velocidade $V/f$ básico, com fluxo do entreferro constante. . . . .	135
9.12	Controle da velocidade pela variação da tensão de terminal do estator. . . . .	136
9.13	Princípio da variação do número de pólos. . . . .	137
9.14	Controle da velocidade pela variação da frequência de alimentação. . . . .	138
9.15	Controle da velocidade pela variação da resistência elétrica da fase do rotor. . . . .	139
9.16	Frenagem por corrente contínua. . . . .	140
9.17	Gerador de indução conectado ao sistema elétrico. . . . .	140
9.18	Gerador de indução auto-excitado. . . . .	142
9.19	Tensão de terminal do gerador de indução auto-excitado em função da capacitância. . . . .	143
9.20	Motor monofásico com o enrolamento principal. ESTA FIGURA PRECISA SER CORRIGIDA	145
9.21	Partida com o estator de dois enrolamentos: o principal e auxiliar. . . . .	148

# Capítulo 4

## Regime Permanente de Máquinas de Corrente Contínua

### 4.1 Estrutura geométrica e aspectos gerais de funcionamento

A máquina de corrente contínua é o mais tradicional conversor rotativo de energia elétrica, tendo atingido as características construtivas finais já no último quarto do século *XIX*. A estrutura básica de uma máquina de corrente contínua convencional tem duas partes fisicamente distintas que são associadas a dois circuitos elétricos de funções bem específicas: (1) o estator que aloja os pólos indutores, os pólos auxiliares e eventualmente os enrolamentos compensadores e (2) o rotor que acomoda as bobinas associadas à conversão de energia e as lâminas do comutador.

Como ilustrado na Figura 4.1(a), os *pólos indutores* – assim chamados porque induzem tensões nas bobinas do rotor –, têm a geometria de pólos salientes e são envoltos por bobinas do *enrolamento do campo indutor*. Os *pólos auxiliares*, fisicamente bem menores que os principais (indutores), são fixados entre estes e, por essa razão, denominados *interpólos*; são também envoltos por bobinas e têm a função precípua de anular o fluxo magnético que por ventura surgir na região interpolar, devido à corrente de armadura e, por essa razão, são conectados em série com a armadura. As bobinas que constituem o enrolamento de campo, uma vez percorridas por corrente contínua geram o *fluxo magnético indutor*. Nas *máquinas de ímãs permanentes*, as peças polares dos pólos principais, em vez de serem de ferro e acomodarem bobinas excitadas por corrente contínua, são feitas de material com propriedades magnéticas permanentes. Embora ocorra a perda da possibilidade do controle do fluxo indutor-também denominado principal-, o emprego de ímãs permanentes resulta em máquinas menores, mais leves e mais eficientes. Nos motores comerciais de ímãs permanentes e de aplicação geral utilizam-se ímãs de materiais cerâmicos, chamados ferrites. Os ímãs de terras raras, especialmente os de *samário - cobalto* (SaCo) ou de *neodímio-ferro-boro* (NdFeB), têm sido os preferidos nos motores de alto desempenho ou em motores que precisam ser compactos e leves. Ligas de alumínio, níquel, cobalto e ferro também são utilizadas.

O rotor tem geometria cilíndrica e aloja o *enrolamento de armadura* constituído por bobinas distribuídas em ranhuras, como ilustrado na Figura 4.1(b). No eixo do rotor e externamente à estrutura cilíndrica da armadura é fixado o *comutador*, cuja função é explicada mais adiante. É *no enrolamento de armadura que é induzida a tensão elétrica associada à conversão*. O termo armadura é empregado para os circuitos que têm a maior potência elétrica das máquinas elétricas rotativas. Nas máquinas síncronas, que semelhante às contínuas têm dois circuitos com funções distintas e bem definidas, o circuito de campo está no rotor e o da armadura no estator; no grupo das máquinas de indução não há a distinção entre o campo e a armadura e, por essa razão, não se emprega essa nomenclatura.

O *comutador* é um conjunto de barras de cobre isoladas entre si e dispostas sobre uma superfície circular fixada no eixo. As bobinas do enrolamento de armadura são conectadas em série, formando um enrolamento fechado, sendo os terminais dessas bobinas soldados às barras – como ilustrado na Figura 4.1(b), na qual são mostradas apenas duas bobinas do enrolamento. Como as bobinas giram solidárias com o rotor, escovas estacionárias, em relação ao comutador, fixadas na carcaça e pressionadas por molas contra as barras, fazem a conexão elétrica entre os terminais externos e internos da armadura.

As bobinas da armadura ligadas em série formam grupos paralelos entre as escovas. A forma com que essas bobinas são ligadas às barras definem dois tipos básicos de enrolamentos: o *imbricado* e o *ondulado*.

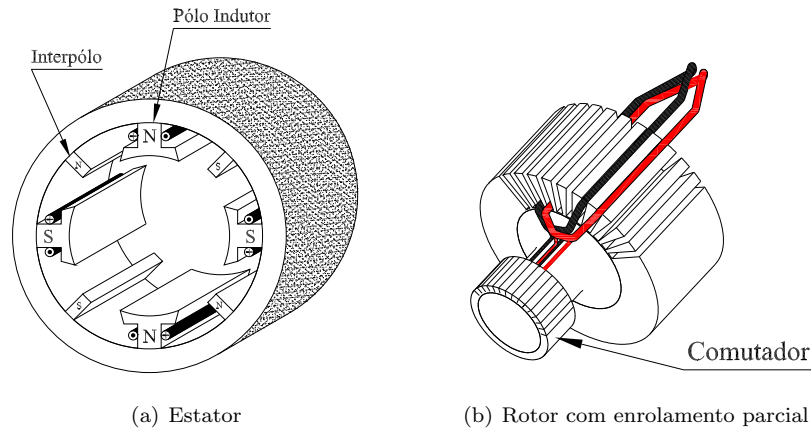


Figura 4.1: Constituição básica da máquina de corrente contínua.

Como ilustrados respectivamente nas Figuras 4.2(a) e 4.2(b), o enrolamento imbricado tem os *terminais de suas bobinas ligados a barras vizinhas* enquanto no enrolamento ondulado os *terminais de suas bobinas estão ligados a barras deslocadas entre si de  $360^\circ$  elétricos*, ou seja, dois passos polares. Se a armadura tem somente um enrolamento, o conjunto de bobinas é denominado *enrolamento simples* (multiplicidade 1); se o enrolamento da armadura for duplo, o número de caminhos paralelos é dobrado em relação ao enrolamento simples. O enrolamento ondulado de 4 pólos e multiplicidade 1 está ilustrado nas Figuras 4.2(c) e 4.2(d). Observe que as correntes dos grupos paralelos  $I_c$ , tanto do imbricado como do ondulado, se somam nas escovas, o que define a corrente de armadura externa  $I_a = aI_c$ . Se  $m$  é a multiplicidade do enrolamento,  $a$  o número de grupos de bobinas em paralelo e  $p$  o número de pólos, têm-se as seguintes relações:

$$a = mp \quad (\text{imbricado})$$

$$a = 2m \quad (\text{ondulado})$$

A posição das escovas no comutador é escolhida para ter contato elétrico com aquelas barras ligadas a condutores que estão transitivamente na região interpolar (observe as bobinas em traço mais forte nas Figuras 4.2(b) e 4.2(d); na região interpolar, idealmente, a bobina tem tensão induzida nula, por causa da ausência de fluxo. Porque as escovas curto-circuitam essas bobinas da região interpolar, as tensões induzidas devem ser nulas para que as correntes de curto-circuito sejam nulas, o que evita faíscamentos excessivos no contato entre as escovas e as barras do comutador.

#### 4.1.1 Reação de armadura

Na Figura 4.3 estão ilustradas distribuições típicas de forças magnetomotrizes e as respectivas distribuições de fluxo do campo indutor ( $F_f, B_f$ ), da armadura ( $F_a, B_a$ ) e da resultante ( $F_g, B_g$ ). Diferentemente de  $F_f$  (Figura 4.3(a)), que é essencialmente constante sob a sapata polar, a distribuição da força magnetomotriz  $F_a$  ao longo do entreferro é aproximadamente triangular (Figura 4.3(b)).

Na forma geral, o fluxo é diretamente proporcional à força magnetomotriz ( $fmm$ ), isto é,  $fmm = \mathfrak{R}\Phi$ , na qual  $\mathfrak{R}$  é a relutância magnética da trajetória do fluxo. Porque o comprimento do entreferro das máquinas de corrente contínua é variável e, ainda, ocorrer o fenômeno da saturação magnética no material magnético, a *relação entre fluxo e f.m.m. é não linear*. Na região interpolar, caracterizada por valores altos de relutância quando comparados com aqueles do entreferro polar, a densidade de fluxo do campo indutor decresce e é idealmente nula no ponto central dessa região (observe Figura 4.3(a)); o mesmo ocorre para a densidade de fluxo gerada pela corrente de armadura (observe Figura 4.3(b)).

A *distribuição do fluxo resultante  $B_g$  ao longo do entreferro* é obtida se são somados os fluxos de campo e de armadura, o que resulta a distribuição típica da Figura 4.3(c). Ao se examinar a onda de fluxo resultante, nota-se que a distribuição do fluxo de armadura modificou o fluxo no entreferro sob o pólo indutor – esse fenômeno é conhecido por *reação de armadura*.

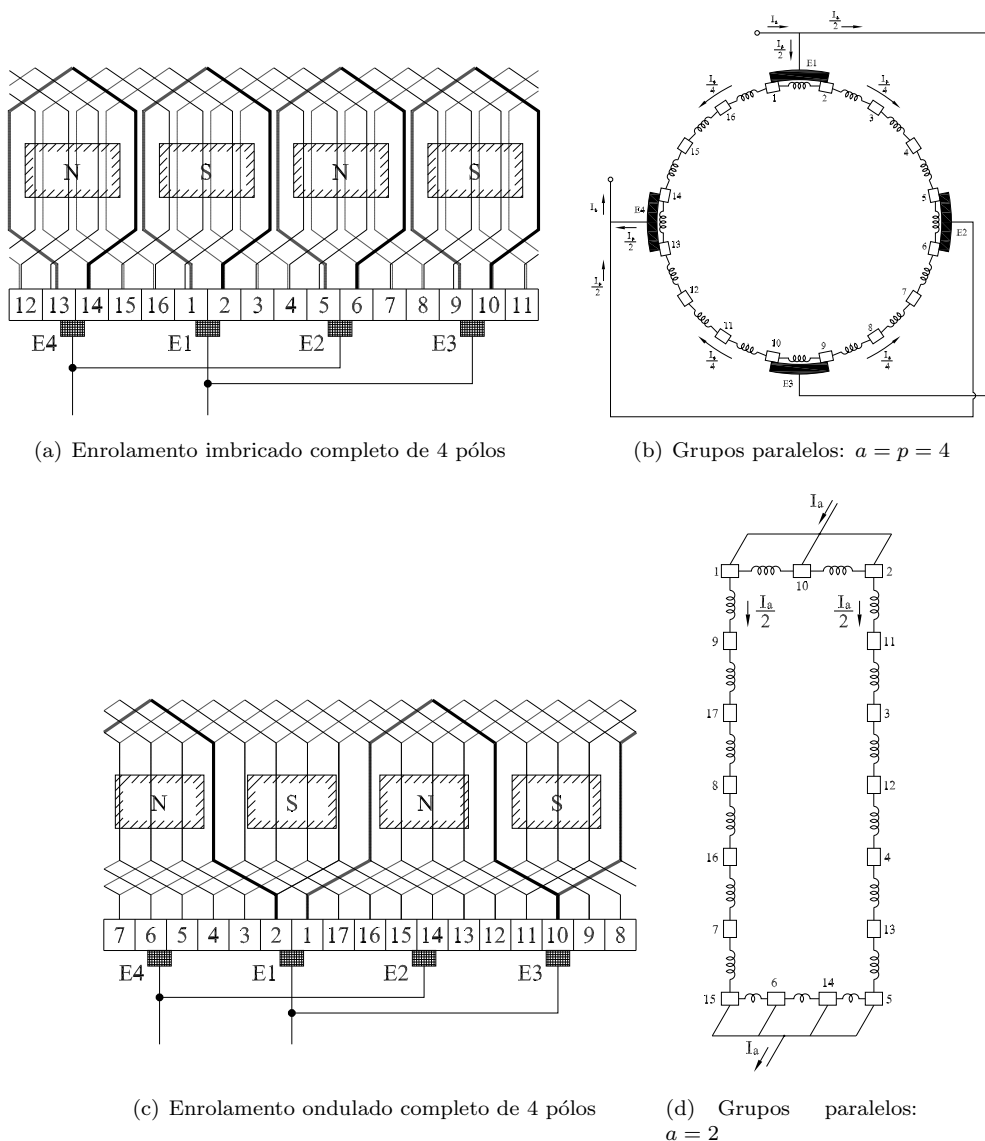


Figura 4.2: Características dos enrolamentos imbricado e ondulado.

O primeiro efeito da reação de armadura é o de reduzir e distorcer o fluxo originalmente retangular sob o pólo indutor, pois a diminuição que ocorre no fluxo de campo em uma das extremidades não é compensada pelo aumento da outra (lado direito do pólo norte), por causa da saturação magnética. Em máquinas de grande potência é desejável eliminar ou diminuir estes efeitos de redução e distorção de fluxo, e, por esta razão, utilizam-se enrolamentos compensadores acomodados em ranhuras das sapatas polares e conectados em série com a armadura, como ilustrado na Figura 4.4(a).

O segundo efeito da reação de armadura é o aparecimento de fluxo na região interpolar, o que não é desejável pois prejudica a comutação, como explicado na próxima seção. Anula-se o seu efeito, ao se colocar na região interpolar *pólos auxiliares*, denominados *interpólos*, de polaridade contrária ao do fluxo gerado pela armadura. As bobinas desses interpólos devem ser ligadas em série com a armadura, como ilustrado na Figura 4.4(b), porque o fluxo interpolar é função da corrente de armadura, e o entreferro do interpólo é ajustado experimentalmente. Observe, ainda na Figura 4.4(a), que na ação motora, a polaridade dos interpólos é a mesma do pólo indutor anterior; no caso do gerador, é a do pólo principal posterior.



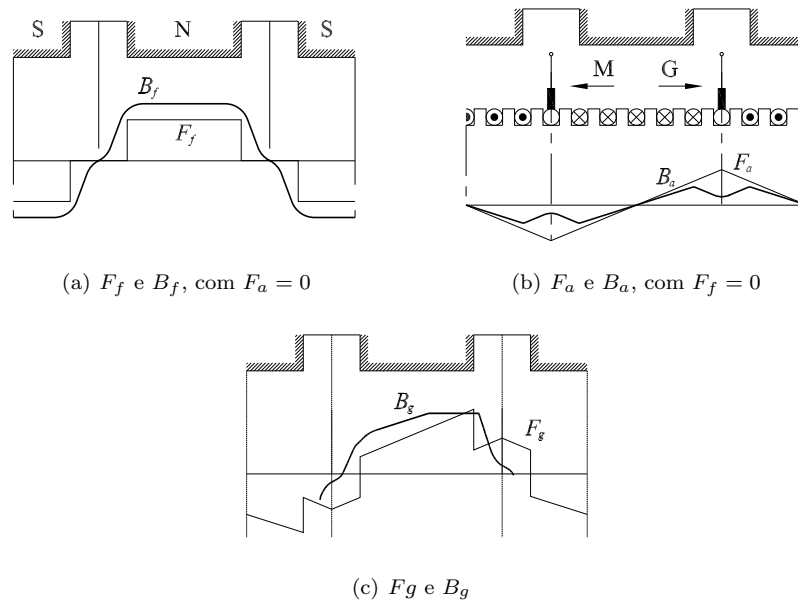


Figura 4.3: Distribuições espaciais típicas de f.m.m e de fluxo.

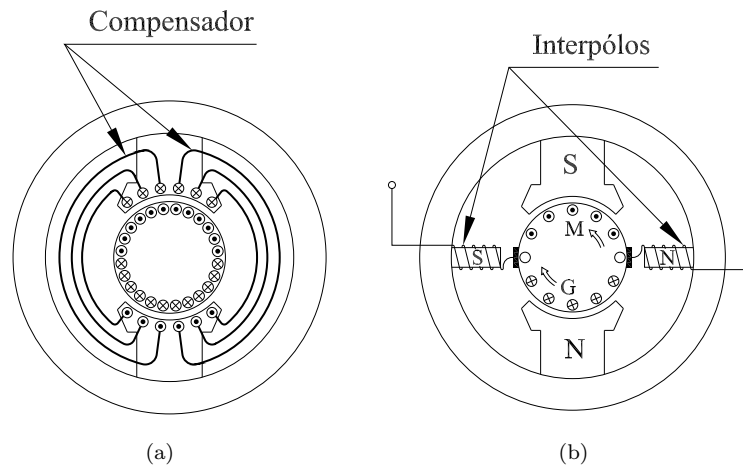


Figura 4.4: Enrolamentos auxiliares: compensadores e de interpólos .

### 4.1.2 Torque e comutação

A obtenção de torque em máquinas elétricas rotativas, devido à conversão eletromecânica de energia (elétrica em mecânica ou vice-versa), se dá pela interação dos fluxos de estator e do rotor, e nesse texto é denominado *torque eletromecânico*  $T_{em}$ . Para que o torque desenvolvido seja unidirecional e, assim, o rotor girar continuamente, cada pólo indutor deve interagir sempre com o mesmo fluxo produzido pela corrente nos condutores da armadura, o que significa dizer que as correntes nos condutores sob uma determinada região polar devem ter sempre o mesmo sentido. O torque eletromecânico desenvolvido  $T_{em}$  se inverte quando somente a corrente de excitação ou a corrente de armadura é invertida; no primeiro caso os pólos do campo indutor são invertidos e, no segundo caso, são os pólos da armadura. Se, por acaso, os dois fluxos são invertidos, o sentido do torque se mantém.

Para entender a comutação, considere uma máquina elementar de dois pólos, funcionando no modo motor e com a armadura tendo uma bobina de uma espira. Para a posição da bobina e corrente externa, como ilustradas na Figura 4.5(a), a sobreposição do fluxo gerado pela corrente nos condutores  $a$  e  $a'$  com a do fluxo indutor resulta em uma distribuição não uniforme do fluxo na região dos dentes nos quais estes condutores

estão colocados, e, sendo assim, gera-se uma força que age sobre a estrutura cilíndrica do rotor, da região de maior concentração de fluxo para a de menor fluxo, isto é, o torque eletromecânico gerado age no sentido de impulsionar o rotor no sentido anti-horário (observe Figura 4.5(d)). Na posição intermediária – posição interpolar –, a bobina concatena o máximo fluxo e, portanto, a tensão induzida nela é nula (lei de Faraday); como ilustrado na Figura 4.5(b), nesta posição a escova curto-circuita a bobina e, idealmente, deseja-se que a corrente na bobina seja nula. Quando o rotor desloca o equivalente a  $\pi$  radianos, o sentido da corrente nos lados  $a$  e  $a'$  da bobina é invertido por ação do comutador, pois sendo as escovas estacionárias, cada uma delas está sempre em contato com aquela bobina – não importa qual bobina seja – que se localiza instantaneamente debaixo do mesmo pólo, como ilustrado na Figura 4.5(c). Esse processo de inversão de corrente, denominado *comutação*, deve ser feito de maneira suave e linear, como ilustrado idealmente na Figura 4.6. O intervalo de tempo no qual a corrente é invertida na bobina é o tempo de comutação  $t_c$ .

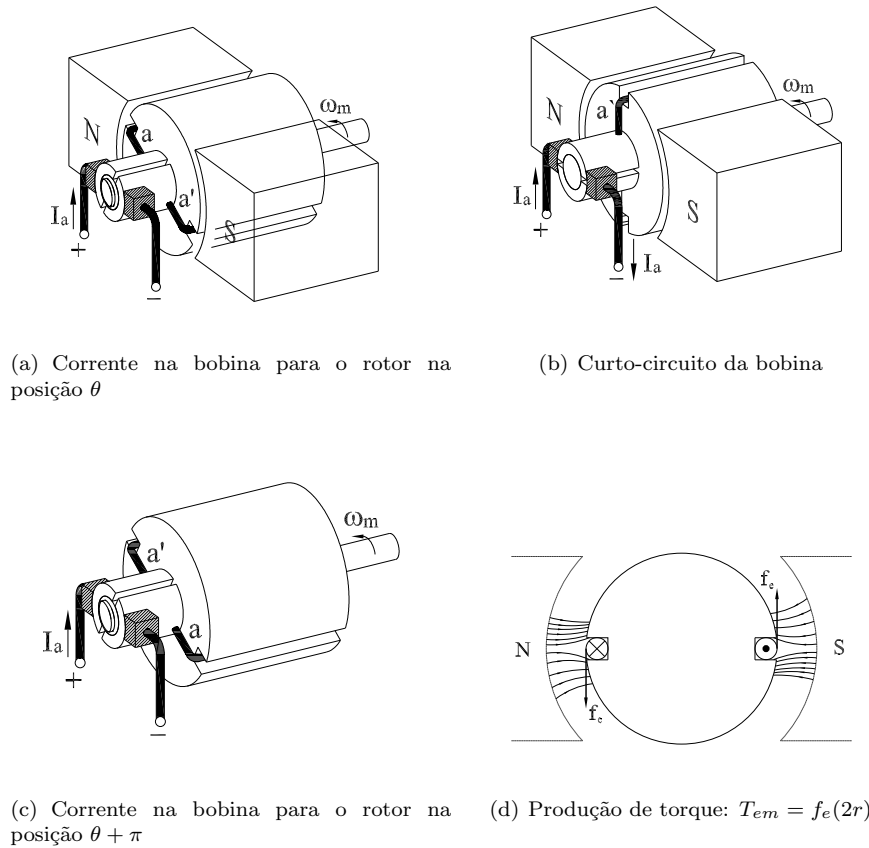


Figura 4.5: Produção de torque e a necessidade da comutação.

Pelo fato de o comutador e as escovas garantirem sempre o mesmo sentido de corrente nos condutores da armadura posicionados sob o mesmo pólo, o fluxo criado por essa corrente é estacionário e se posiciona, no caso ideal, em quadratura (eixo  $q$ ) com o eixo magnético do fluxo do campo indutor (eixo  $d$ ), como ilustrado na Figura 4.7– observe que os enrolamentos do campo indutor e de armadura são designados por solenóides colocados nestes eixos (Figura 4.7(b)). Diz-se, então, que a *máquina de corrente contínua é de campo estacionário*, em contraste com as máquinas de indução e síncronas, que funcionam por causa do campo girante.

Enquanto o enrolamento de campo tem a função de gerar o fluxo magnético de excitação, a *armadura é a parte da máquina relacionada com a maior potência elétrica envolvida no processo de conversão eletromecânica de energia*, seja como gerador ou como motor. Valores típicos da potência elétrica envolvida no circuito de campo estão na faixa de 3% à 5% da potência de armadura.

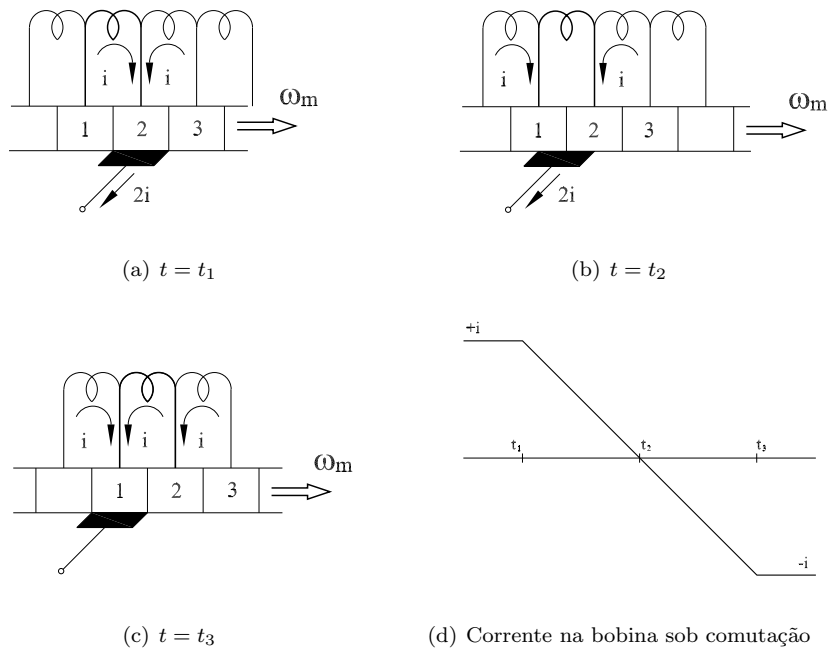


Figura 4.6: Comutação da corrente em uma bobina: tempo de comutação  $t_c = t_3 - t_1$ .

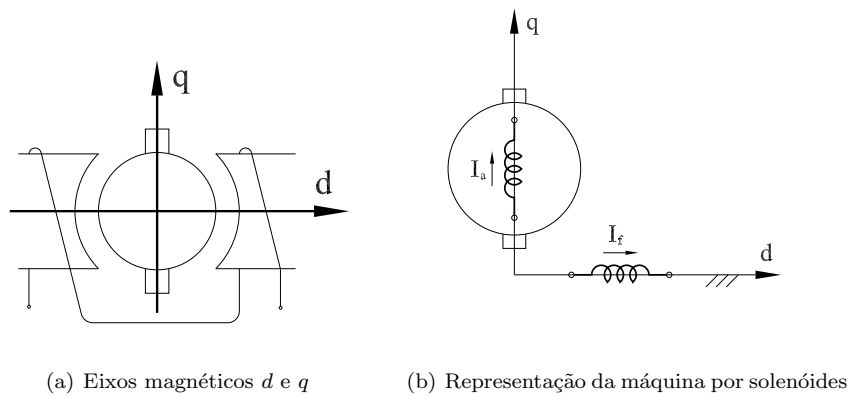


Figura 4.7: Eixos magnéticos do campo indutor (eixo  $d$ ) e da armadura (eixo  $q$ ).

## 4.2 Equações básicas e fluxo de potência

No caso da máquina possuir enrolamento de campo, a curva típica do *fluxo magnético indutor por pólo*  $\Phi_{fg}$ , que atravessa o entreferro, em função da *f.m.m. por pólo*  $F_p$  está mostrada na Figura 4.8. Claramente, há duas regiões distintas: uma na qual existe uma região caracterizada por uma relação aproximadamente linear entre o fluxo magnético e a corrente de excitação e outra – conhecida por região de saturação –, na qual tem-se presente o fenômeno da não linearidade magnética. Para um dado fluxo de entreferro por pólo, se a armadura estiver girando, haverá a geração de tensões nas diversas bobinas que compõem o enrolamento de armadura. Pela lei de Faraday, a tensão gerada em uma bobina é igual à variação temporal do fluxo concatenado. Para uma máquina de  $p$  pólos, o valor médio da tensão gerada em uma bobina de uma espira quando a armadura gira o equivalente a um passo polar, isto é  $2\pi/p$  radianos mecânicos, é igual à variação do fluxo concatenado dividida pelo tempo que a armadura leva para se deslocar  $2\pi/p$  radianos mecânicos;

A variação do fluxo concatenado, devida ao deslocamento angular  $2\pi/p$ , de uma bobina de uma espira é

$$\Delta\phi = \phi_{fg} - (-\phi_{fg}) = 2\phi_{fg}$$

na qual  $\phi_{fg}$  designa o *fluxo radial por pólo do campo indutor que atravessa o entreferro*, que é obtido a partir da densidade média do fluxo magnético sob o pólo, dada por

$$\phi_{fg} = B_{fg}(\text{médio})l\tau$$

na qual  $l$  é o comprimento longitudinal da armadura e  $\tau_p$  é a medida do passo polar, isto é, o comprimento do arco correspondente à distribuição de fluxo de um pólo.

Se o rotor gira com velocidade angular  $\omega_m$  radianos mecânicos por segundo, o tempo decorrido para o deslocamento angular do rotor correspondente ao arco polar  $\Delta\theta = 2\pi/p$  é

$$\Delta t = \frac{2\pi/p}{\omega_m}$$

e, assim, a *tensão média induzida em uma bobina de uma espira* (dois condutores) é a variação do fluxo concatenado pela bobina pela tempo decorrido. Portanto, a tensão média induzida na bobina é

$$e_a(\text{bobina}) = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{p}{\pi}\phi_{fg}\omega_m$$

e, conseqüentemente, em cada condutor tem-se

$$e_a(\text{condutor}) = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{p}{2\pi}\phi_{fg}\omega_m .$$

Se o enrolamento de armadura tem o total de  $Z_a$  condutores divididos em  $a$  grupos paralelos, cada caminho paralelo tem  $Z_a/a$  condutores em série. A *tensão elétrica média gerada entre as escovas*  $E_a$  é a tensão média gerada em cada grupo, ou seja, é o resultado da multiplicação da tensão média de um condutor por  $Z_a/a$ :

$$E_a = \frac{Z_a}{a}e_a(\text{condutor}) = \frac{pZ_a}{2a\pi}\phi_{fg}\omega_m . \quad (4.1)$$

Como o fluxo indutor é estacionário, esta tensão depende do deslocamento das bobinas da armadura em torno do estator e, por esta razão, é freqüentemente denominada *tensão de velocidade*.

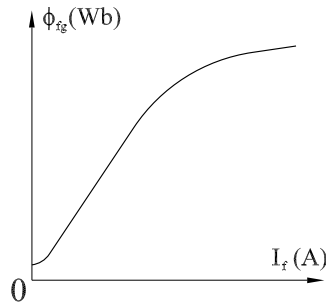


Figura 4.8: Característica de excitação.

Como o fluxo  $\phi_{fg}$  é produzido pela corrente de campo  $I_f$ , considera-se que

$$\psi_{af} = \frac{Z_a}{a\pi}\phi_{fg} = L_{af}I_f \quad (4.2)$$

é o fluxo de campo médio que concatena o enrolamento de armadura ou, em outras palavras, o *fluxo mútuo mocional*. O fator  $L_{af}$  tem a dimensão de indutância e é denominada *indutância mútua fictícia* entre os enrolamentos de armadura e de campo. A denominação de mútua fictícia é devido ao fato dos eixos magnéticos da armadura e de campo serem ortogonais entre si e, por essa razão, não haveria mutualidade entre esses enrolamentos. Essa indutância mútua relaciona a tensão gerada à corrente de excitação e à

velocidade, nas condições de linearidade magnética. Por estar associada ao fluxo mútuo mecânico, seu valor depende da corrente de armadura por causa da reação de armadura, se esta não for compensada. Do fluxo de excitação por pólo  $\phi_f$  gerado pela corrente de campo que circula nas bobinas, o fluxo de entreferro  $\phi_{fg}$  designa uma parte, ou seja, é o fluxo de campo por pólo que resulta após a subtração do fluxo de dispersão do campo e do efeito da reação de armadura, quando esta existir e não for compensada.

Ao se combinar as Equações (4.1) e (4.2), a tensão resultante na armadura pode ser descrita por

$$E_a = L_{af} I_f \frac{p}{2} \omega_m$$

na qual  $(p/2)\omega_m$  é a velocidade angular do rotor em radianos elétricos por segundo. Alternativamente, a fem de armadura pode ser escrita como

$$E_a = G_{af} I_f \omega_m$$

na qual  $G_{af} = (p/2)L_{af}$  e é denominada *mútua mecânica*, ou ainda, *mútua rotacional* entre os enrolamentos de armadura e de campo indutor. Essa última forma de escrever a equação da fem é a adotada nesse texto.

Na análise de desempenho, em vez de se adotar a característica de excitação, utiliza-se a característica de circuito aberto da máquina de corrente contínua, que é a relação gráfica entre  $E_a$  e a corrente externa de campo  $I_f$ . Esta curva pode ser obtida experimentalmente ao se acionar o rotor com velocidade constante e ao variar-se a corrente do campo. Dado que  $E_a/\omega_m = G_{af} I_f$ , constrói-se a característica de circuito aberto, ilustrada pela curva superior do gráfico da Figura 4.9. Deve ser salientado que, pelo fato da mesma ser obtida com corrente de armadura nula, a reação de armadura não está presente.

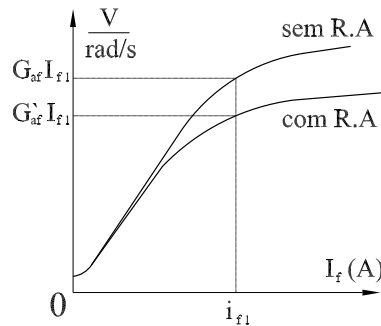


Figura 4.9: Características a vazio e com reação de armadura.

Como foi mencionado anteriormente, a corrente de armadura que circula nas bobinas do rotor produz uma força magnetomotriz que, combinada com a força magnetomotriz de excitação, diminui o fluxo resultante no entreferro e, por esta razão, diz-se que a *corrente de armadura desmagnetiza*, o que significa dizer que o valor de fluxo por pólo no entreferro é menor do que aquele referente à situação da máquina sem carga ( $I_a = 0$ ). Se a reação de armadura é considerada, o fluxo mútuo mecânico diminui, como ilustrado na curva inferior do gráfico da Figura 4.9, o que significa que o correspondente valor de  $G_{af}$  diminui, quando comparado com aquele de reação de armadura desprezível. Para as máquinas que não têm enrolamentos de compensação, geralmente as de pequena potência, a reação de armadura pode provocar uma diminuição de 3% a 6% no fluxo, quando a corrente de armadura tem valor nominal. Como já descrito anteriormente, o enrolamento de compensação colocado em ranhuras do pólo indutor tem a função de eliminar ou diminuir o efeito da reação de armadura na região definida pelo pólo indutor.

O circuito de armadura é caracterizado pelos parâmetros elétricos indutância de armadura  $L_a$  e resistência total de armadura  $r_a$  (soma da resistência do enrolamento de armadura com a das escovas), bem como pela tensão interna  $E_a$  – observe a designação do circuito colocada na Figura 4.10. Como, neste capítulo o interesse é o regime permanente, a corrente de armadura é constante e, conseqüentemente,  $L_a dI_a/dt = 0$  e, portanto, ao se empregar a lei de Kirchoff ao circuito elétrico de armadura, com a tensão terminal de armadura designada por  $V_{ta}$ , tem-se

$$V_{ta} = E_a \pm r_a I_a$$

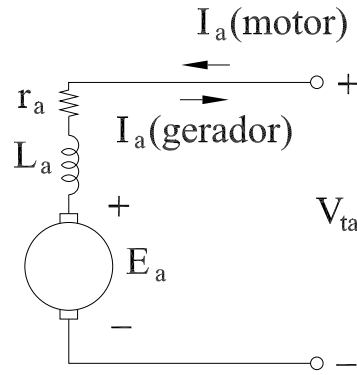


Figura 4.10: Circuito elétrico equivalente de armadura.

$$V_{ta} = G_{af} I_f \omega_m \pm r_a i_a \quad (4.3)$$

na qual é adotado o sinal (+) para o motor e o sinal (-) para o gerador. No modo motor, a tensão de velocidade apresenta valores típicos de 90% a 95% da tensão terminal  $V_{ta}$ . O circuito de campo, por ser estacionário, não tem tensão induzida e, portanto, é caracterizado apenas pelos parâmetros resistência  $r_f$  e indutância própria  $L_f$ .

No modo motor, a partir da Equação (4.3) tem-se a corrente de armadura

$$I_a = \frac{V_{ta} - G_{af} I_f \omega_m}{r_a} \quad (4.4)$$

que circula do terminal positivo da tensão  $E_a$  para o terminal negativo – esse sentido da corrente, por convenção, é admitido positivo. No modo gerador tem-se  $E_a > V_{ta}$  e, portanto, ao se empregar a Equação (4.4), a corrente tem o seu sentido invertido ( $I_a < 0$ ).

A *potência eletromecânica*  $P_{em}$  de uma máquina elétrica operando no *modo motor* é a fração da potência elétrica de entrada convertida em mecânica; por sua vez, operando no *modo gerador*, designa a fração da potência mecânica convertida em elétrica.

No modo motor,  $P_{em}$  é determinada, se as perdas ferro são ignoradas, a partir da subtração das das perdas no cobre de armadura da potência elétrica de entrada da armadura, isto é,

$$P_{em} = V_{ta} I_a - r_a I_a^2 = \underbrace{(V_{ta} - r_a I_a)}_{G_{af} I_f \omega_m} I_a$$

$$P_{em} = G_{af} I_f \omega_m I_a \quad (4.5)$$

No modo gerador o valor de  $P_{em}$  é obtido, ao se subtrair as perdas mecânicas da potência entregue ao eixo pela fonte mecânica externa.

O *torque eletromecânico*  $T_{em}$  desenvolvido pela máquina, nos modos motor e gerador, é determinado pelo coeficiente  $P_{em}/\omega_m$  e, portanto, a partir da Equação (4.5), tem-se

$$T_{em} = G_{af} I_f I_a \quad (4.6)$$

Se o *torque eletromecânico* é quem impulsiona o rotor, a energia elétrica é convertida em energia mecânica, o que caracteriza a operação motora (potência elétrica é fornecida à armadura). Se, ao contrário, potência mecânica é fornecida ao eixo do rotor, tem-se a conversão de energia mecânica em elétrica, e a máquina de corrente contínua opera no modo gerador. Na Figura 4.11 estão ilustradas as diferenças de operação entre o motor e o gerador, no que diz respeito às grandezas velocidade, torque, corrente e tensão. Observe que a ação do torque eletromecânico gerado no modo motor atua no mesmo sentido da velocidade de eixo e, no modo gerador, atua no sentido contrário ao da velocidade de eixo, o que lhe dá a característica frenante.

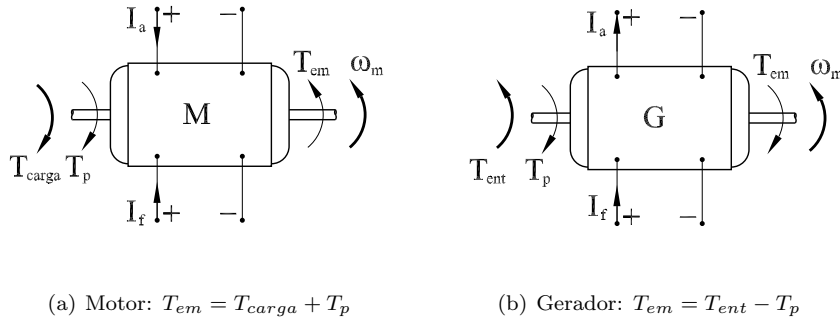


Figura 4.11: Modos de funcionamento da máquina de corrente contínua.

O torque resistente ao movimento em máquinas rotativas está associado ao atrito do tipo Coulomb (atrito seco), aos rolamentos com lubrificação (atrito viscoso) e às hélices de ventilação do rotor (atrito com o ar) e, portanto, designa perdas mecânicas. Ao se considerar as características de cada um destes torques, a expressão geral do torque resistente (usualmente denominado *torque de perdas rotacionais*  $T_p$ ) é

$$T_p = T_{p0} + b_m \omega_m + b_a \omega_m^2$$

na qual  $T_{p0}$  é devido ao atrito seco,  $b_m$  e  $b_a$  são os coeficientes de atrito viscoso e de atrito com o ar, respectivamente. Geralmente, para cálculo de eficiência, a potência de perdas rotacionais é a soma das perdas mecânicas com as perdas no núcleo e, conseqüentemente, o torque de perdas  $T_p$  é associado a esta potência (ver Exemplo ??).

Ao se empregar a 2ª lei de Newton para o movimento de rotação e recorrer-se à Figura 4.11, as equações de regime permanente da máquina de corrente contínua são

(a) Modo motor:

$$T_{em} - T_{carga} - T_p = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{em} = T_{carga} + T_p$$

(a) Modo gerador:

$$T_{ent} - T_{em} - T_p = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{ent} = T_{em} + T_p$$

nas quais  $T_{carga}$  é o torque da carga mecânica externa acionada pelo motor, ou em outras palavras, é o torque disponível no eixo (*torque de saída*) e  $T_{ent}$  é o torque aplicado no eixo do gerador pela turbina. Ressalte-se que no motor o torque eletromecânico desenvolvido é igual à soma do torque de saída com o de perdas, enquanto no gerador, o torque de entrada é igual à soma do torque eletromecânico com o de perdas.

O fluxo de potência nas máquinas de corrente contínua pode ser melhor compreendido a partir de gráficos, como o da Figura 4.12.

No modo motor, ilustrado na Figura 4.12(a), a potência de entrada é a potência elétrica entregue nos terminais de armadura e de campo; parte dessa potência é dissipada nas resistências dos enrolamentos do campo e da armadura (perdas  $rI^2$ ) e a parte restante é convertida em mecânica, denominada potência mecânica desenvolvida  $P_{em}$ ; esta potência, expressa por  $P_{em} = E_a I_a$ , é composta pelas perdas mecânicas rotacionais  $P_{rot}$  e pela potência de saída  $P_{carga}$ . A perda no material magnético devido ao movimento relativo entre o rotor e o fluxo de campo é, geralmente, incorporada às perdas rotacionais.

No modo gerador, a potência de entrada é a potência mecânica que aciona o eixo do gerador. Uma parte desta potência supre as perdas mecânicas  $P_{rot}$  e a restante é convertida em energia elétrica  $P_{em} = E_a I_a$ ; a subtração das perdas elétricas  $rI^2$  de  $P_{em}$ , resulta na potência elétrica de saída  $P_{carga}$ , efetivamente tomada pela carga elétrica externa, como ilustrado na Figura 4.12(b).

Na Figura 4.13 está ilustrado o funcionamento da máquina de corrente contínua nos quadrantes do plano velocidade-torque; a convenção adotada foi a de receptor, para a qual a potência é positiva se consumida e negativa se gerada pelo dispositivo sob análise; conseqüentemente, se a máquina funciona no modo motor, a potência eletromecânica é positiva e, portanto, velocidade e o torque são positivos com corrente de armadura positiva.

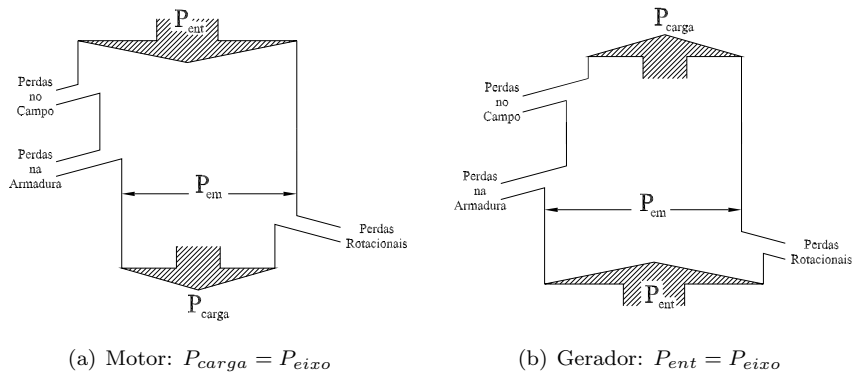


Figura 4.12: Fluxo de potência na máquina de corrente contínua.

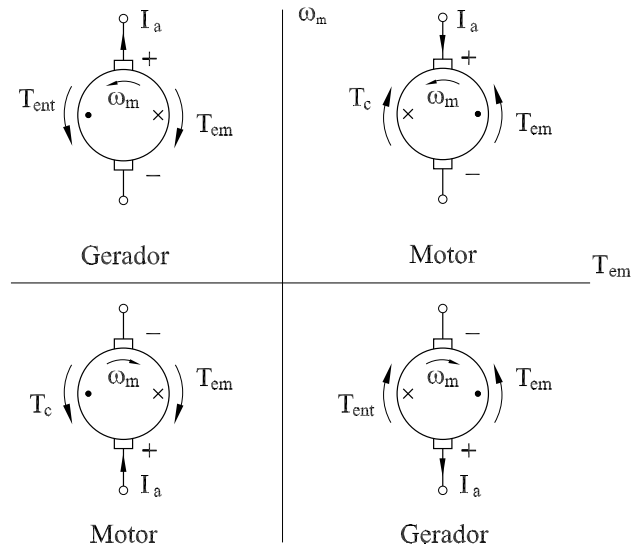


Figura 4.13: Operação da máquina contínua no plano  $\omega \times T_{em}$ .

## 4.3 Classificação e funcionamento

As máquinas de corrente contínua são classificadas de acordo com as conexões do enrolamento do campo indutor: máquinas de campo separado, de campo paralelo, de campo série e de campo composto.

### 4.3.1 Motores

#### Excitação separada

Se o enrolamento de campo tem seus terminais ligados a uma fonte separada da fonte do circuito de armadura, como ilustrado na Figura 4.14, o motor é dito ser excitação separada e, por esta razão, é denominado *motor excitação independente*. Em alguns casos os enrolamentos de campo e de armadura são conectados em paralelo e alimentados por uma mesma fonte de tensão contínua e, nesse caso, pode ser denominado *motor excitação paralela*, *motor "shunt"* ou *motor derivação*.

A partir da Equação (4.4) obtém-se a *equação fundamental da velocidade*

$$\omega_m = \frac{V_{ta}}{G_{af} I_f} - \frac{r_a}{G_{af} I_f} I_a \quad (4.7)$$

que é a equação de uma reta com inclinação negativa determinada pelo coeficiente  $r_a/G_{af} I_f$ .



Embora a equação fundamental da velocidade seja função das correntes de armadura e de campo e da tensão de armadura – grandezas facilmente mensuráveis –, prefere-se a equação da velocidade de eixo em função do torque eletromecânico. Ao se combinar, então, as Equações (4.6) e (4.7) e assumir-se fluxo indutor constante, obtém-se a característica estática torque-velocidade, dada por

$$\omega_m = \frac{V_{ta}}{G_{af} I_f} - \frac{r_a}{(G_{af} I_f)^2} T_{em} \quad (4.8)$$

que é denominada característica natural, pois depende apenas dos parâmetros intrínsecos à máquina de corrente contínua, tal como a resistência do enrolamento de armadura  $r_a$ . Ao se inserir uma resistência  $r_x$  em série com a armadura, a curva  $T - \omega$  deixa de ser natural.

Alguns valores característicos podem ser obtidos, mediante a análise dessa equação:

- (a) A *velocidade ideal a vazio*  $\omega_{m0}$  é a velocidade obtida com  $T_{em} = 0$ :

$$\omega_{m0} = \frac{V_{ta}}{G_{af} I_f} .$$

- (b) A *queda de velocidade*  $\Delta\omega_m$  em relação à ideal a vazio  $\omega_{m0}$ , devido ao torque de carga, é definida pelo torque de carga em regime permanente  $T_{em} = T_{carga}$ :

$$\Delta\omega_m(T) = \omega_{m0} - \omega_m = \frac{r_a}{(G_{af} I_f)^2} T_{em} .$$

Observe que a queda de velocidade  $\Delta_m(T)$  é diretamente proporcional à resistência de armadura e inversamente proporcional ao quadrado da corrente de campo. Portanto, se o fluxo do campo indutor é constante, ao se inserir resistências externas  $r_x$  em série com a armadura, para um mesmo torque de carga a queda de velocidade do eixo do motor aumenta, como ilustrado na Figura 4.14(b) para dois valores da resistência de armadura.

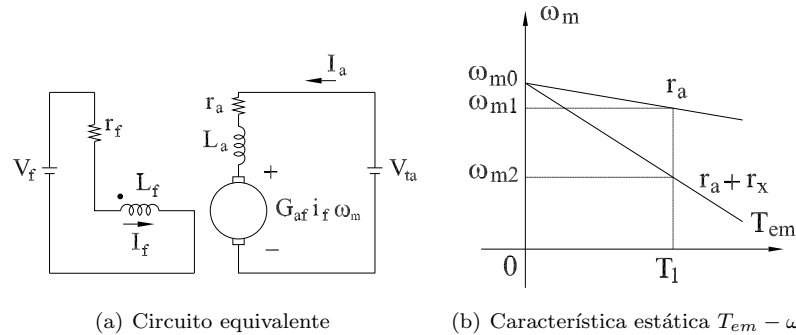


Figura 4.14: Motor com campo separado.

Geralmente as resistências de armadura das máquinas de alta potência apresentam valores baixos e, por essa razão, a diminuição da velocidade devido ao aumento da carga é pequena, o que caracteriza o motor com excitação separada como sendo de velocidade praticamente constante. As quedas típicas de velocidade estão na ordem de 3% da velocidade ideal a vazio.

### Excitação paralela

Diferentemente do motor de excitação separada, o motor com campo paralelo ou "shunt" tem a sua corrente de campo dependente da tensão de armadura, porque os enrolamentos de campo e de armadura são conectados em paralelo, conforme ilustrado na Figura 4.15. Geralmente coloca-se uma resistência  $r_x$  em série com o campo, para que se tenha o controle da corrente de campo. As equações de regime do motor são

$$V_{ta} = (r_f + r_x) I_f \quad (4.9)$$

$$V_{ta} = r_a I_a + G_{af} I_f \omega_m . \quad (4.10)$$

Ao se explicitar  $I_f$  em (4.9) e substituir em (4.10), obtém-se a corrente de armadura dada por

$$I_a = \frac{V_{ta}}{r_a} - G_{af} \omega_m \frac{V_{ta}}{(r_f + r_x) r_a} . \quad (4.11)$$

A equação da velocidade é obtida ao substituir (4.11) na Equação básica (4.6) do torque e, depois de alguns arranjos, tem-se a equação da velocidade em função da tensão de armadura aplicada e da resistência externa em série com o enrolamento de campo:

$$\omega_m = \frac{r_f + r_x}{G_{af}} - \frac{(r_f + r_x)^2 r_a}{G_{af}^2 V_{ta}^2} T_{em} .$$

A característica  $\omega_m - T_{em}$  do motor de campo paralelo é semelhante àquela do motor excitação separada. Observe que quanto maior o valor da resistência externa  $r_x$ , maior é a velocidade a vazio, devido à diminuição do fluxo indutor.

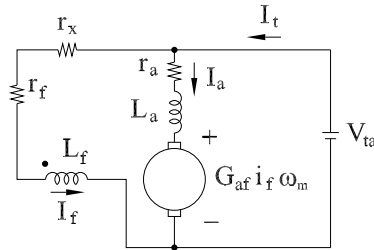


Figura 4.15: Circuito equivalente do motor de campo paralelo.

**Exemplo 4.1** Um motor de corrente contínua com excitação paralela tem os seguintes dados nominais disponíveis:  $P_n = 50 \text{ kW}$ ,  $970 \text{ rot/min}$  e  $V_{ta} = 440 \text{ V}$ ,  $I_a = 127,5 \text{ A}$ , e resistências de campo e de armadura  $r_f = 147 \Omega$  e  $r_a = 0,075 \Omega$ , respectivamente. Determinar nas condições nominais: (a) a tensão elétrica gerada na armadura; (b) a potência eletromecânica desenvolvida; (c) a corrente de campo; (d) a potência de entrada e a eficiência; (e) as perdas nas resistências de armadura e de campo; (f) as perdas rotacionais (g) torque eletromecânico desenvolvido e o torque de perdas; (h) torque de saída.

**Solução:**

(a) Tensão elétrica gerada na armadura:

$$\Rightarrow E_a = 440 - 0,075 \times 127,5 = 430,4 \text{ V}$$

(b) Potência eletromecânica desenvolvida:

$$\Rightarrow P_{em} = 430,4 \times 127,5 = 54,88 \text{ kW}$$

(c) Corrente de campo:

$$\Rightarrow I_f = 440/147 = 3,0 \text{ A}$$

(d) Potência de entrada e a eficiência:

$$\Rightarrow P_e = 440 \times (127,5 + 3) = 57,42 \text{ kW}$$

$$\Rightarrow \eta(\%) = (50/57,42) \times 100\% = 87\%$$

(e) Perdas nas resistências de armadura e de campo:

$$\Rightarrow r_a I_a^2 = 0,075 \times (127,5)^2 = 1,22 \text{ kW}$$

$$\Rightarrow r_f I_f^2 = 147 \times (3)^2 = 1,32 \text{ kW}$$

(f) Perdas rotacionais:

$$\Rightarrow P_p = 54,88 - 50 = 4,88 \text{ kW}$$

(g) Torque eletromecânico desenvolvido e torque de perdas:

$$\omega_m = 970 \times \frac{\pi}{30} = 101,58 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow T_{em} = \frac{54,8 \times 10^3}{101,58} = 540,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\Rightarrow T_p = 4,88 \text{ kW} / 101,58 \text{ rad/s} = 48,04 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(h) Torque de saída:

$$\Rightarrow T_s = T_{em} - T_p = 540,3 - 48,04 = 492,26 \text{ N} \cdot \text{m}$$

ou de forma alternativa

$$\Rightarrow T_s = \frac{P_s}{\omega_{eixo}} = \frac{50 \times 10^3}{101,58} = 492,26 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**Exemplo 4.2** Um motor de corrente contínua de excitação paralela tem os seguintes dados nominais: 7,5 kW, 220 V, 4 pólos, enrolamento de armadura ondulado, 1.440 rot/min e 702 condutores no enrolamento de armadura. Nas condições nominais, a potência de entrada é 8,60 kW e as diversas perdas da máquina são as seguintes:

Perdas no ferro = 90 W

Perdas no circuito de campo = 198 W

Perdas nos interpólos = 95 W

Perdas no enrolamento de armadura = 420 W

Perdas na resistência de contato das escovas = 145 W

Perdas de ventilação = 150 W

A vazio, com tensão nos terminais de armadura aproximadamente igual a 220 V, a velocidade é 1.500 rot/min.

Calcular, nas condições nominais: (a) A resistência elétrica e a corrente de campo; (b) a corrente terminal  $I_t$  e de armadura  $I_a$ ; (c) a resistência total de armadura; (d) a tensão induzida na armadura; (e) a mútua mecânica; (f) a potência interna ou eletromecânica; (g) o fluxo por pólo; (h) o efeito desmagnetizante, em Wb, da reação de armadura.

**Solução:**

(a) Resistência elétrica e a corrente de campo:

$$r_f = (220)^2 / 198 = 244,4 \Omega \Rightarrow I_f = \frac{220}{244,4} = 0,9 \text{ A} .$$

(b) Correntes terminal e de armadura:

$$I_t = 8,60 \times 10^3 / 220 = 39,0 \text{ A} \Rightarrow I_a = 39,0 - 0,9 = 38,1 \text{ A} .$$

(c) Resistência total de armadura:

$$r_a = (420 + 95 + 145) / (38,1)^2 = 0,45 \Omega .$$

(d) Tensão induzida na armadura e a velocidade do rotor:

$$\Rightarrow E_a = 220 - 0,45 \times 38,1 = 202,86 \text{ V} .$$

(e) Mútua mecânica:

$$G'_{af} = \frac{202,86}{0,9 \times 150,8} = 1,48 \text{ V/A} \cdot \text{rad.mec./s} .$$

(f) *Potência eletromecânica:*

$$P_{em} = 202,86 \times 38,1 = 7,73 \text{ kW} .$$

(g) *Fluxo por pólo:*

Ao se empregar a Equação (4.1) tem-se

$$202,86 = \frac{4}{2} \left( \frac{702}{2} \right) \frac{1}{\pi} \times \phi_{fg}(\text{carga}) \times 1.440,86 \times \frac{\pi}{30}$$
$$\Rightarrow \phi_{fg}(\text{carga}) = 0,60 \times 10^{-2} \text{ Wb} .$$

(h) *Efeito desmagnetizante da armadura:*

A vazio, a queda de tensão na resistência total de armadura pode ser considerada desprezível e, portanto,  $V_{ta} \approx E_a$ . Então,

$$\frac{220}{202,86} = \frac{\psi_{fg}(\text{vazio}) \times 1.500}{0,60 \times 10^{-2} \times 1.440}$$
$$\Rightarrow \phi_{fg}(\text{vazio}) = 0,62 \times 10^{-2} \text{ Wb} .$$

O fluxo de entreferro por pólo nas condições nominais é menor do que o correspondente valor a vazio, por causa da existência da reação de armadura. Esta diminuição é dada por

$$\Delta\phi_{fg} = (0,60 - 0,62) \times 10^{-2}$$
$$\Rightarrow \Delta\phi_{fg} = -0,02 \times 10^{-2} \text{ Wb} .$$

### Excitação série

Se o enrolamento de campo é conectado em série com a armadura, como mostrado na Figura 4.16(a), o motor é denominado *motor campo série* e o projeto do enrolamento de campo deve ser diferente daquele utilizado na excitação separada, pois, sendo as correntes de armadura elevadas, há a necessidade de condutores com área maior e um enrolamento de menor número de espiras para produzir a mesma força magnetomotriz de excitação do equivalente motor excitação separada. Como a corrente de campo é a corrente de armadura, qualquer variação da corrente de armadura significa variação da corrente de excitação e, portanto, variação no fluxo por pólo que atravessa o entreferro. Na prática existe uma limitação no valor do fluxo por causa do fenômeno da saturação magnética (veja a curva de magnetização). As equações do motor série são obtidas ao se considerar  $I_s = I_a$  e  $\phi_{sg} \propto I_a$  nas equações básicas do motor:

$$V_{ta} = G_{as} I_a \omega_m + (r_a + r_s) I_a . \quad (4.12)$$

$$T_{em} = G_{as} (I_a)^2 . \quad (4.13)$$

Observe que o torque eletromecânico é proporcional ao produto de fatores sempre positivos. A inversão do sentido da corrente não produz inversão do torque e, portanto, o motor pode também funcionar em corrente alternada, embora exija, para esse fim, um projeto especial.

Ao se explicitar a corrente de armadura em (4.13) e substituí-la em (4.12), resulta, após alguns rearranjos, na equação característica velocidade-torque do motor série, dada por

$$\omega_m = \frac{V_{ta}}{\sqrt{G_{as} T_{em}}} - \frac{r_a + r_s}{G_{as}} .$$

A correspondente curva característica  $\omega_m - T_{em}$ , para uma dada tensão de armadura, está ilustrada na Figura 4.16(b) e as seguintes observações são feitas:

- (a) A curva velocidade-torque eletromecânico é não linear, pois o seu termo variável é inversamente proporcional a  $\sqrt{G_{as} T_{em}}$ ;

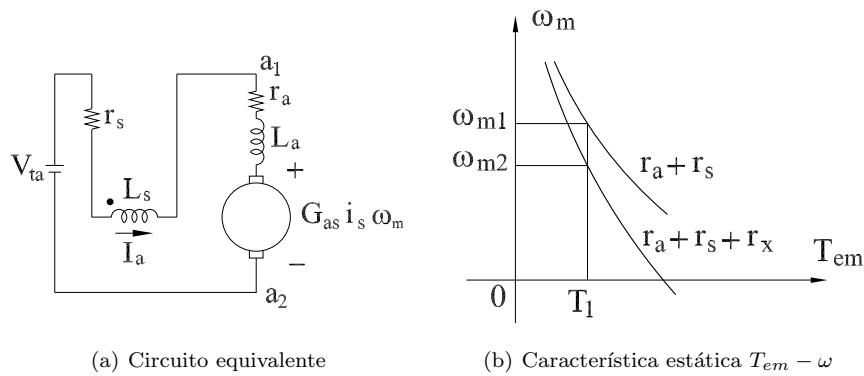


Figura 4.16: Motor campo série.

- (b) A velocidade ideal a vazio ( $T_{em} = 0$ ) é "infinita", o que significa que a curva característica não intercepta o eixo da velocidade;
- (c) O motor apresenta velocidades elevadas quando o torque exigido pela carga é baixo e, à medida que este se eleva, a velocidade decresce fortemente. Isto o torna atraente em aplicações em que se deseja um alto torque de partida por unidade de corrente, pois neste caso a corrente de armadura exigida é alta e, por consequência, o fluxo gerado por pólo é alto também;
- (d) Para valores altos de torque, a variação de velocidade é menos pronunciada do que na faixa de baixos valores de torque.

**Exemplo 4.3** Um motor de corrente contínua, excitação série tem os seguintes dados nominais: 110 kW, 600 V, 600 rot/min, 186 A e resistência total de armadura (inclui a resistência do campo série) é  $r_a = 0,165 \Omega$ . Ao se alimentar em separado o enrolamento do campo série, com o circuito de armadura em aberto, se o rotor é acionado na velocidade de 400 rot/min, é obtida a seguinte característica a vazio:

$I_s$ [A]	169	194	225	261	300
$E_a$ [V]	375	400	425	450	475

Considere o efeito desmagnetizante da reação de armadura como sendo proporcional ao quadrado da corrente. Obter: (a) O valor da mútua mocional  $G_{as}$ , em toda a faixa da corrente de campo, a partir da característica a vazio; (b) A reação de armadura expressa pela variação da mútua mocional (c) o efeito da reação de armadura, se o motor opera com corrente de 300 A; (d) o torque de partida se a corrente é limitada em 300 A.

**Solução:**

(a) A característica de magnetização é tomada com corrente de armadura nula e, portanto, a reação de armadura não está presente na obtenção desta característica. Diretamente da característica a vazio determina-se  $G_{as} = E_a 30 / I_s 400 \pi$ .

$I_s$ A	169	194	225	261	300
$G'_{as} 10^{-2} V/A \cdot rad/s$	5,31	4,92	4,51	4,12	3,78

Como se observa a mútua mocional depende do grau de saturação magnética; o seu valor diminui à medida que a corrente de excitação aumenta.

(b) Nas condições nominais, ao se empregar a equação de tensão da armadura, a mútua mocional  $G'_{as}$  é determinada a partir de

$$600 = G'_{as} \times 186 \times \frac{600\pi}{30} + 0,165 \times 186$$

$$\Rightarrow G'_{as} = 4,87 \times 10^{-2} V/A \cdot rad/s .$$

Para se calcular qual seria a mútua mocional  $G_{af}$  com a corrente de armadura nominal, sem considerar

a reação de armadura, faz-se a interpolação na característica a vazio, isto é,

$$\frac{186 - 169}{G_{as} - 5,31 \times 10^{-2}} = \frac{194 - 186}{4,92 \times 10^{-2} - G_{as}}$$

$$\Rightarrow G_{as} = 5,05 \times 10^{-2} \text{ V/A} \cdot \text{rad/s} .$$

Como esperado,  $G'_{as} < G_{as}$  porque a reação de armadura diminui o fluxo de entreferro. Portanto, dado que a reação de armadura é considerada proporcional ao quadrado da corrente – o que equivale escrever que  $\Delta G_{as} = k(I_a)^2$  –, a diminuição na mútua mocional  $\Delta G_{as}$  é calculada por

$$\Delta G_{as} = (4,87 - 5,05) \times 10^{-2} = k(186)^2$$

ou seja,

$$k = -5,20 \cdot 10^{-8} .$$

A diminuição no campo devido à corrente de armadura é expressa, então, pela diminuição da mútua mocional

$$\Rightarrow \Delta G_{as} = -5,20 \times 10^{-8} (I_a)^2 .$$

(c) De acordo com esta equação, para corrente de armadura de 300 A, a diminuição da mútua é

$$\Delta G_{as} = G'_{as} - G_{as} = -0,47 \cdot 10^{-2} \text{ V/A} \cdot \text{rad/s}$$

e, ao se consultar a Tabela Exemplo 4.3, para este mesmo valor de corrente de armadura, obtém-se

$$G_{as} = 3,78 \times 10^{-2} .$$

Ao se considerar o efeito desmagnetizante da reação de armadura, o valor efetivo da mútua mocional é

$$\Rightarrow G'_{as} = 3,31 \times 10^{-2} \text{ V/A} \cdot \text{rad/s} .$$

(d) O torque de partida, ao se considerar reação de armadura, é

$$\Rightarrow T_{partida} = 3,31 \times 10^{-2} \times (300)^2 = 2.970,0 \text{ N} \cdot \text{m} .$$

Se não houvesse a reação de armadura, o torque de partida seria

$$\Rightarrow T_{partida} = 3,78 \times 10^{-2} \times (300)^2 = 3.402,0 \text{ N} \cdot \text{m} .$$

### Excitação composta

A combinação das características de desempenho das máquinas *de campo paralelo e de campo série* é obtida ao se conectar os circuitos de campo separado e série, e, por essa razão, são denominadas *máquinas de campo composto*. Para o enrolamento do campo série ligado em série com a armadura, a ligação é conhecida por *ligação paralela-longa*; se o enrolamento série for ligado externamente ao circuito da armadura, a ligação é dita *ligação paralela-curta*. Na Figura 4.17 estão ilustradas as duas combinações entre as excitações série e paralela.

A depender da forma que o circuito do campo série é conectado, a sua fm.m. se soma ou se subtrai à fm.m do campo principal – no primeiro caso é dito aditivo e no segundo é subtrativo. Para os enrolamentos de campo separado e série, de  $N_f$  e  $N_s$  espiras por pólo, respectivamente, a excitação resultante por pólo é

$$N_f I_{feq} = N_f I_f \pm N_s I_s \left\{ \begin{array}{ll} I_s = I_a & \text{paralela -longa} \\ I_s = I_a + I_f & \text{paralela - curta} \\ + & \text{composto aditivo} \\ - & \text{composto subtrativo} \end{array} \right.$$

$$I_{feq} = I_f \pm \frac{N_s}{N_f} I_s \quad (4.14)$$

na qual a corrente  $I_{feq}$  é a corrente equivalente que, se circulasse somente na bobina do enrolamento separado de  $N_f$  espiras por pólo, produziria a mesma força magnetomotriz que resulta da excitação simultânea dos campos separado e série, como ilustrado na Figura 4.17(c). O efeito do enrolamento série é o de acrescentar a parcela de corrente  $(N_s/N_f)I_s$  à excitação separada. As correntes presentes em (4.15) são as correntes medidas; isto significa que o efeito de reação de armadura não está representado nesta equação. Como a reação de armadura é desmagnetizante, o que significa que embora a corrente de campo seja a mesma, a fmm correspondente é menor. Assim sendo, pode-se pensar em uma fmm de reação de armadura  $Fmm_{RA}$  que combinada com aquela estabelecida somente pelos campos paralelo e série resulta na seguinte (*força magnetomotriz efetiva*):

$$Fmm_{efetiva} = N_f I_f \pm N_s I_s - Fmm_{RA} . \quad (4.15)$$

A cada uma das fms nos enrolamentos do campo indutor corresponde uma fem gerada na armadura – respectivamente  $G_{af} I_f \omega_m$  e  $G_{as} I_s \omega_m$  –, o que leva à fem total de armadura

$$E_a = (G_{af} I_f \pm G_{as} I_s) \omega_m . \quad (4.16)$$

As equações de tensão da armadura e do torque desenvolvido tornam-se, então,

$$V_{ta} = r_a I_a + r_s I_s + E_a \quad (4.17)$$

$$T_{em} = (G_{af} I_f \mp G_{as} I_s) I_a .$$

Se é considerada a ligação paralela-longa, para a qual  $I_s = I_a$ , a combinação das Equações (4.16) e (4.17) resulta na seguinte equação de regime permanente da velocidade:

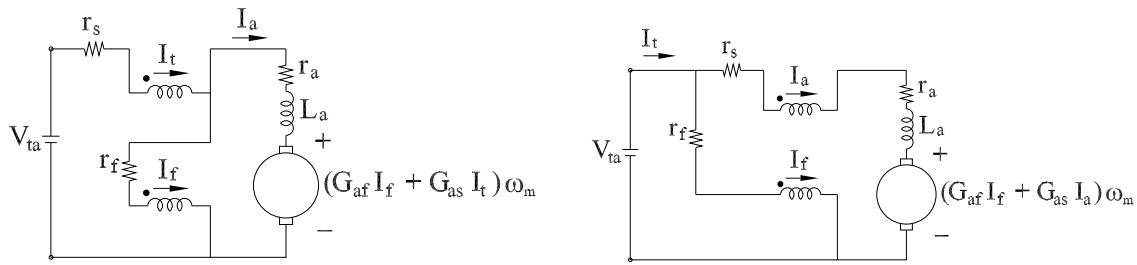
$$\omega_m = \frac{V_{ta}}{G_{af} I_f \pm G_{as} I_a} - \frac{r_a + r_s}{G_{af} \frac{I_f}{I_a} \pm G_{as}} .$$

Se ao enrolamento de campo paralelo não é ligada nenhuma resistência de controle e é alimentado por uma fonte de tensão  $V_f$ , basta considerar  $I_f = V_{ta}/r_f$  nessa última equação, para se obter a equação da velocidade em função das tensões de armadura e de campo e da corrente de carga  $I_a$ . Para a ligação paralela-curta, a corrente de excitação série torna-se  $I_s = I_a + I_f$ . Para valores baixos de corrente de armadura, o efeito da excitação série não é significativo, mas à medida que a corrente de carga aumenta a sua influência passa a ser notável.

**Exemplo 4.4** São conhecidos os seguintes pontos da curva de magnetização de um máquina de corrente contínua obtida a vazio com a velocidade de 1.600 rot/min e com o enrolamento de campo principal excitado separadamente:

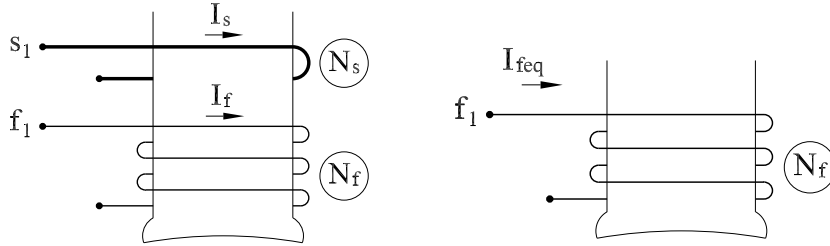
$I_f$ [A]	0, 20	0, 40	0, 60	0, 80	1, 00	1, 20
$G_{af} I_f$ [V/rad/s]	0, 398	0, 690	0, 982	1, 140	1, 246	1, 326

São conhecidos ainda os valores nominais de sua potência (20 hp) e tensão de terminal (220 V), e a o valor da resistência de armadura  $r_a = 0,22 \Omega$ . Ao funcionar sem carga mecânica externa acoplada ao seu eixo, com  $V_{ta} = 220$  V e  $I_f = 0,85$  A (excitação paralela), a potência absorvida pelo motor (circuitos de armadura e de campo) foi 583 W – esta potência pode ser considerada constante em toda a faixa de velocidade de funcionamento, para os objetivos deste exemplo. Ao se alimentar a armadura com a tensão de 220 V e com a mesma corrente de excitação do caso a vazio, a corrente de armadura demandada pela carga de torque constante foi 52 A e a velocidade medida 1.778 /rot/min. Calcule: (a) as mútuas mocionais correspondentes aos pontos dados da curva de magnetização (b) a tensão de velocidade a vazio (c) a mútua mocional para o motor a vazio e com carga, (d) o torque desenvolvido para acionar a carga, (e) se não existisse a reação de armadura quais seriam os valores da corrente de armadura e a velocidade, (f) a corrente de excitação necessária de campo paralelo para que o fluxo por pólo do motor em carga seja o mesmo do caso a vazio e (g) se o motor for conectado para composto longo aditivo, determine a relação de espiras por pólo do campo série em relação ao do campo paralelo, para que o campo série compense a reação de armadura, quando o motor aciona a referida carga. Para os objetivos deste exemplo, a resistência do enrolamento de campo série



(a) Ligação paralela-curta

(b) Ligação paralela-longa



(c) Enrolamentos paralelo e série de um pólo (d) Excitação equivalente a do campo composto

Figura 4.17: Motor composto aditivo.

pode ser desprezada. **Solução**

(a) Os valores de  $G_{af}$  são calculados ao se dividir  $G_{af} I_f$  da pela correspondente corrente de campo, o que resulta na seguinte tabela:

$I_f$ [A]	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20
$G_{af}$ [V/A · rad/s]	1,990	1,725	1,636	1,425	1,246	1,105

(b) A vazio tem-se

$$E_a = 220 - 0,22 - \left( \frac{583}{220} - 0,85 \right) I_t$$

$$\Rightarrow E_a = 219,6 \text{ V} .$$

Observe que  $E_a \approx V_{ta}$ , se o motor funciona a vazio.

(c) A mútua mecânica a vazio é calculada ao se realizar a interpolação linear dos dados da tabela, para  $I_f = 0,85 \text{ A}$ :

$$\frac{0,85 - 0,80}{G_{af} - 1,425} = \frac{1,00 - 0,85}{1,246 - G_{af}}$$

$$\Rightarrow G_{af} = 1,380 \text{ V/A rad/s} .$$

Sob carga,  $G'_{af}$  é determinada ao se empregar a equação de tensão do circuito de armadura, dada por

$$220 - 0,22 \times 52 = G'_{af} 0,85 \times 1,778 \frac{\pi}{30}$$

$$\Rightarrow G'_{af} = 1,318 \text{ V/A rad/s} .$$



(d) O torque desenvolvido é

$$\Rightarrow T_{em} = 1,318 \times 0,85 \times 52 = 58,3 \text{ N} \cdot \text{m} .$$

(e) Com o fluxo igual àquele da condição a vazio, tem-se o novo valor da corrente de armadura

$$\Rightarrow I_a = \frac{58,3}{1,380 \times 0,85} = 49,7 \text{ A}$$

e a velocidade seria

$$\Rightarrow N_m = \frac{220 - 0,22 \times 49,7}{1,380 \times 0,85} \frac{30}{\pi} = 1.702,0 \text{ rot/min} .$$

(f) A corrente de campo deve ser aumentada para que se tenha

$$G_{af} I_{feq} = 1,380 \times 0,85 + (1,380 - 1,318)0,85$$
$$G_{af} I_{feq} = 1,226 \text{ V/rad/s}$$

que substituída na tabela de dados da curva de magnetização resulta

$$I_{feq} = 0,96 \text{ A} .$$

Ao se empregar a equação da excitação composta, obtém-se

$$0,96 = 0,85 + \frac{N_s}{N_f} 49,7$$
$$\Rightarrow \frac{N_s}{N_f} = \frac{2,2}{1.000}$$

isto é, 2,2 espiras de campo série por pólo para cada 1.000 espiras do campo paralelo por pólo.

### 4.3.2 Geradores

Como mencionado anteriormente, diferentemente do motor, o gerador tem seu rotor impulsionado por uma fonte externa de energia mecânica e a sua corrente de armadura tem seu sentido invertido. Adicionalmente, a tensão de terminal de armadura depende da corrente de carga: aumento da corrente de armadura significa diminuição da tensão aplicada à carga elétrica, independentemente da existência da reação de armadura.

No que diz respeito aos enrolamentos do campo indutor, a análise realizada para o motor não se aplica aos do tipo paralelo e composto, pois a excitação depende da tensão gerada.

#### Excitação separada

A análise da máquina da corrente contínua funcionando no modo gerador é semelhante ao do motor, pois a corrente do campo indutor independe da tensão de terminal de armadura.

#### Excitação paralela

Quando o enrolamento do campo principal é conectado aos terminais da armadura, a corrente de excitação depende fortemente da tensão gerada; esta, por sua vez, para ter valores significativos, depende desta corrente. Supondo-se o gerador funcionando a vazio ( $I_f = I_a$ ), para que o processo de excitação ocorra é necessário que inicialmente exista um campo residual capaz de gerar a tensão  $e_{a0}$ ; esta tensão aplicada ao enrolamento de campo estabelece uma corrente, que por sua vez, gera um fluxo maior que o residual e, portanto, aumenta a tensão gerada. Este processo dinâmico de excitação se sustenta se a corrente de campo, decorrente da tensão residual, gera um fluxo magnético que se soma ao fluxo residual. Com o objetivo de se controlar a corrente de campo, é conectado um reostato (resistência  $r_x$ ) em série com o enrolamento de campo, tal como se faz para o motor paralelo, o que significa que a resistência total do circuito de campo é  $R_f = r_f + r_x$ .

Alterações de  $r_x$ , altera a inclinação da reta de tensão de campo dada por  $R_f$  e, portanto, leva a uma mudança no ponto de intersecção entre as curvas de magnetização e de campo. Existe um particular valor para a resistência total do circuito de campo, que se for ultrapassado, não permite o surgimento de uma corrente de campo necessária para que se tenha a auto-excitação; este valor está representado por  $R_{crit}$  e a correspondente reta de tensão de campo está ilustrada na Figura 4.18(a). A equação que representa a auto-excitação paralela é

$$E_a = L_a \frac{dI_a}{dt} + r_a I_a + L_f \frac{dI_f}{dt} + R_f I_f$$

e que resulta, para o gerador a vazio, a equação

$$E_a = (L_a + L_f) \frac{dI_f}{dt} + (r_a + R_f) I_f .$$

A vazio, pode-se desprezar a queda na resistência de armadura ( $r_a <, R_f$ ) e, assim sendo, em regime permanente tem-se

$$E_a \approx R_f I_f$$

isto é, o ponto final da auto-excitação paralela é dado pela *intersecção entre a curva de magnetização* ( $E_a \times I_f$ ) e a *reta de tensão campo*  $V_f = R_f I_f$ , como mostrado na Figura 4.18(a) (ponto de coordenadas  $E_a^*$  e  $I_f^*$ ). Note que acima deste ponto a tensão gerada é limitada pela característica a vazio da máquina e, assim sendo, a tensão exigida pelo campo não pode ser alcançada.

Em carga e em regime permanente, a tensão aplicada aos terminais do campo é dada por

$$V_f = E_a - r_a I_a$$

o que significa que ao aumento de carga corresponde uma tensão aplicada no campo menor e, conseqüentemente, ocorre a diminuição da corrente de campo, como ilustrado na Figura 4.18(b).

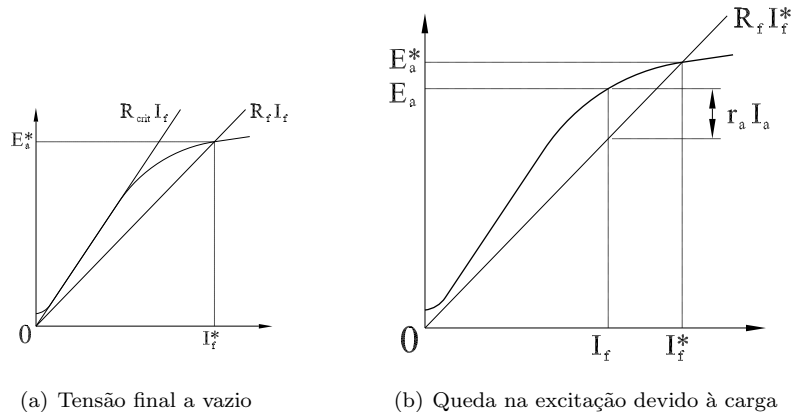


Figura 4.18: Gerador de corrente contínua autoexcitado.

### Excitação série

Diferentemente do gerador paralelo, a vazio não se tem a excitação porque  $I_s = 0$  e, portanto, as tensões gerada e de terminal são iguais à tensão residual. Ao se conectar uma carga entre os terminais externos, uma corrente de armadura flui ( $I_s = I_a$ ) e, se o fluxo gerado é no sentido de aumentar o fluxo residual, ocorre o aumento da tensão gerada e, conseqüentemente, da tensão sobre a carga. A característica interessante do gerador série é a de aumentar automaticamente a excitação à medida que a carga aumenta e, assim sendo, pode-se compensar possíveis quedas de tensão.

A equação de tensão, se a carga é caracterizada pelos parâmetros  $r_c$  e  $L_c$ , é dada por

$$E_a = (r_a + r_s + r_c)I_a + (L_a + L_s + L_c)\frac{dI_a}{dt}.$$

### Excitação composta

Os geradores compostos combinam a característica do campo paralelo de tensão relativamente constante com o aumento de excitação do campo série à medida que a carga aumenta. Na análise de seu funcionamento emprega-se o conceito de corrente de campo paralelo equivalente  $I_{feq}$ , tal como foi feito para os motores compostos.

**Exemplo 4.5** *A máquina do Exemplo 4.4 deve ser usada no modo gerador com velocidade constante de 1.800 rot/min, a partir da tensão a vazio ajustada para 220 V. Pretende-se projetar um campo série, que deve atuar juntamente com o campo paralelo (gerador composto longo e aditivo), com o objetivo de obter regulação de tensão nula com a carga elétrica de 20 hp. Com este objetivo, determine o número de espiras por pólo do campo série em relação ao do campo paralelo, se o fluxo mútuo entre campo e armadura diminui 5%, devido à reação de armadura. Para os objetivos deste exemplo, a resistência do enrolamento de campo série pode ser desprezada.*

#### Solução

Regulação de tensão é definida como a variação da tensão de terminal da armadura quando a corrente de carga muda, a partir da condição a vazio e é calculada por

$$RV = \frac{V_{ta}(\text{vazio}) - V_{ta}(\text{carga})}{V_{ta}(\text{carga})} 100\%$$

Portanto, nas condições pedidas do exemplo, a tensão de terminal da armadura deve ser 220 V, seja a vazio ou com carga.

A vazio,

$$G_{af}I_f = \frac{220 \cdot 30}{1800 \pi} = 1,167 \text{ V/rad/s}$$

que corresponde a  $I_f = 0,85 \text{ A}$ .

Com a carga externa de 20 hp, a corrente de armadura é

$$I_a = \frac{20 \times 746}{220} + 0,85 = 68,70 \text{ A}$$

e

$$E_a = 220 + 0,22 \times 68,7 \frac{20 \times 746}{220} + 0,85 = 235,10 \text{ V}.$$

Para que esta tensão seja gerada deve-se ter

$$G'_{af}I_f = \frac{235,10 \cdot 30}{1800 \pi} = 1,247 \text{ V/rad/s}$$

que corresponderia a  $I_f = 1,0 \text{ A}$ , se não houvesse a reação de armadura; como esta não é a situação, é necessário gerar

$$G_{af}I_f = 1,05 \times 1,247 = 1,310 \text{ V/rad/s}$$

por causa da reação de armadura de 5%; a correspondente corrente é obtida por interpolação linear, o que resulta

$$I_a = 1,16 \text{ A}$$

e não  $I_f = 1,0 \text{ A}$ , como calculado anteriormente.

$$\frac{N_s}{N_a} = \frac{1,16 - 1,0}{68,7}$$

$$\Rightarrow \frac{N_s}{N_a} = \frac{2,32}{1.000}$$

isto é, 2,32 espiras de campo série por pólo para cada 1.000 espiras do campo paralelo por pólo.

## 4.4 Princípio do controle de velocidade

A análise da equação fundamental da velocidade dos motores de corrente contínua mostra que velocidade pode ser controlada pela alteração de duas grandezas elétricas: a tensão terminal de armadura  $V_{ta}$  e o fluxo do campo indutor  $\phi_f$ . A variação do fluxo indutor é obtida ao se variar a corrente  $I_f$  ou equivalentemente a partir da variação da tensão  $V_f$ . As variáveis pelas quais se obtém o controle de velocidade –  $V_{ta}$ ,  $V_f$  e  $I_f$  – são denominadas *variáveis de atuação*, enquanto a *velocidade* é a *variável controlada ou de saída*. Por que a tensão de armadura e a corrente de campo são definidas em circuitos eletricamente desacoplados, tornam o controle dos motores de corrente contínua de fácil implementação, além do fato de ser em corrente contínua – sabe-se que em corrente alternada o fluxo é função do valor da corrente bem como da frequência elétrica.

Em vez do controle direto das tensões  $V_{ta}$  e  $V_f$ , pode-se utilizar resistências variáveis em série com os circuitos de armadura e de campo, o que permite, de forma indireta, o controle das tensões efetivas sobre estes circuitos. Observe que o uso de resistências significa perdas por efeito Joule, o que torna ineficiente, sob o ponto de vista de aproveitamento de energia, a operação do motor.

### 4.4.1 Controle por tensão de armadura

Para os motores de excitação independente, o *controle da velocidade pela variação da tensão de armadura é realizado mantendo-se o fluxo de excitação constante*, geralmente no seu valor nominal. A tensão de armadura pode assumir valores positivos ou negativos de até 100% do seu valor nominal. Embora haja a variação da tensão de armadura, a inclinação da característica estática torque-velocidade é constante, pois a mesma só depende da resistência total de armadura (Equação (4.8)). Desta forma, ao variar-se a tensão terminal de armadura, as características velocidade-torque formam uma família de retas paralelas entre si, como ilustrado na Figura 4.19. A velocidade pode ser alterada dentro do intervalo  $-\omega_n \leq \omega_m \leq \omega_n$ , na qual

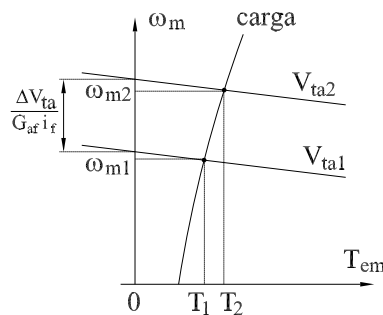


Figura 4.19: Característica estática do controle de velocidade por variação da tensão de armadura:  $V_{ta1} < V_{ta2}$ .

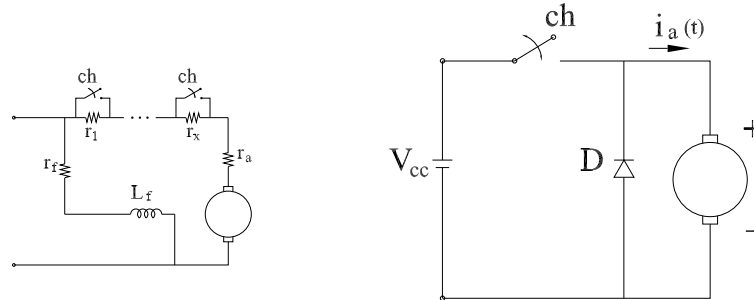
$\omega_n$  designa a velocidade nominal, que é a velocidade do rotor quando a tensão de armadura e a corrente de campo são nominais (valores de placa). A variação da tensão terminal de armadura no motor excitação paralela não é indicada porque a corrente de campo seria também alterada; neste caso, mantém-se  $V_{ta}$  e se faz o chaveamento seqüencial de resistores conectados em série com o circuito de armadura, como ilustrado na Figura 4.20(a).

As equações que representam o controle de velocidade são

$$v_{ta} = r_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + G_{af} I_f \omega_m(t)$$

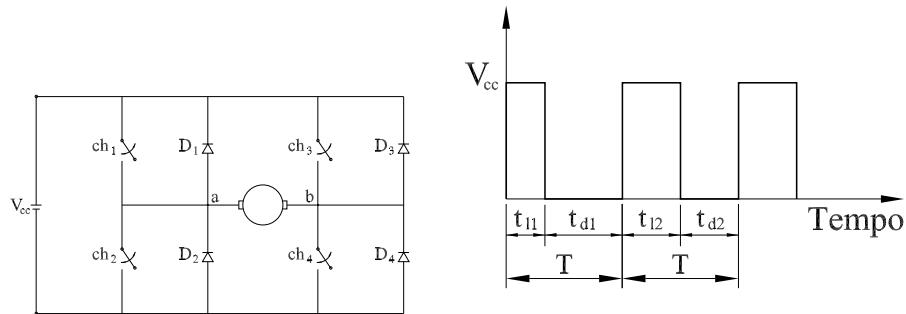
$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = G_{af} I_f i_a - T_c$$

nas quais  $v_{ta}$  e  $i_a$  são a tensão de terminal de armadura e corrente de armadura instantâneas.



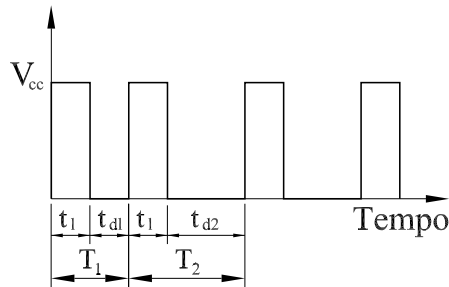
(a) Resistores em série com a armadura

(b) Recortador de um quadrante



(c) Recortador quatro quadrantes

(d) Modulação de largura de pulso:  $t_{11} + t_{d1} = t_{12} + t_{d2}$ .



(e) Modulação de frequência:  $t_{11} + t_{d1} \neq t_{12} + t_{d2}$

Figura 4.20: Controle de velocidade por variação de  $V_{ta}$ .

A fonte de tensão controlada da armadura do motor CC pode ser o clássico sistema *Ward-Leonard*, proposto em 1896, que consiste de um gerador de corrente contínua com excitação separada, acionado por um motor auxiliar de indução ou a diesel. A tensão do gerador que é aplicada ao motor de indução é regulada pela variação da tensão de seu campo. A necessidade do motor auxiliar bem como o uso do gerador

torna esta solução cara e complexa. Por esta razão, utilizam-se conversores a estado sólido, tais como os recortadores ("choppers") e os retificadores controlados.

Para fonte de tensão contínua e de valor constante, utiliza-se o recortador, que é uma chave de alta velocidade em série com a armadura do motor, como mostrados nas Figuras 4.20(b) e 4.20(c).

As variações do *tempo de condução*  $t_l$  e do *tempo de não-condução*  $t_d$  da chave controla o valor médio da tensão aplicada. Se  $t_l$  e  $t_d$  são variados de tal forma que o período de chaveamento

$$T = t_l + t_d$$

seja constante, tem-se a *modulação por largura de pulso*<sup>1</sup>; se  $t_l$  é constante e  $t_d$  é variável, o que significa período  $T$  variável, tem-se a *modulação por frequência*<sup>2</sup>. A tensão média de saída do recortador é dada por

$$v_{ta} = \left(\frac{t_l}{T}\right)V_{cc}$$

na qual  $t_l/T$  é a fração de tempo durante o qual a chave permanece fechada – é conhecido por *ciclo de trabalho da forma de onda*. Se o período de chaveamento for pequeno em relação à constante de tempo do circuito alimentado, a forma de onda da corrente resultante apresenta amplitudes pequenas de oscilação em torno de seu valor médio – diz-se, então, que a corrente tem baixo *ripple*.

Nas Figuras 4.20(d) e 4.20(e) estão ilustradas as tensões de saída obtidas, para os dois tipos de modulação comentadas e as linhas tracejadas indicam o valor médio da tensão para cada par  $(t_l, t_d)$ .

No caso da fonte ser alternada, a tensão média aplicada ao motor é controlada por retificadores controlados que são um conjunto combinado de chaves eletrônicas, como ilustrado na Figura 4.21.

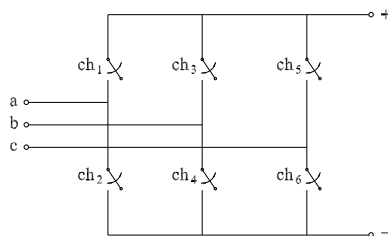


Figura 4.21: Retificador trifásico controlado.

#### 4.4.2 Controle por variação do fluxo indutor

O controle de velocidade do motor de corrente contínua *por variação do fluxo indutor é implementado, ao se variar a corrente de campo e deixar a tensão de armadura constante*. Geralmente, nesse modo de controlar a velocidade, diminui-se a tensão efetiva de campo para até 80% do seu valor nominal.

Para um dado torque, a corrente de armadura é inversamente proporcional ao fluxo e, deste modo, se o fluxo for diminuído, haverá um aumento da corrente de armadura na mesma proporção, isto é,

$$I_{a2} = \frac{\phi_{fg1}}{\phi_{fg2}} I_{a1}$$

e, conseqüentemente, um aumento também da reação de armadura, principalmente se o motor não possuir enrolamento de compensação. São por esses motivos que o controle por campo é mais adequado para cargas leves. A inclinação da característica estática torque-velocidade aumenta, como ilustrado na Figura 4.22, quando se diminui a corrente de campo e, portanto, uma queda de velocidade mais acentuada ocorre, quando comparada como o controle por tensão de armadura e, por esta razão, este controle apresenta uma regulação de velocidade pior do que aquela por tensão de armadura. Nos motores de excitação separada pode-se usar recortadores para variar a tensão de campo e nos motores "shunt", o controle da corrente de

<sup>1</sup>Pulse Width Modulation (PWM), em inglês .

<sup>2</sup>Pulse Frequency Modulation (PFM), em inglês .

campo é obtido por meio de uma resistência variável, colocada em série com o enrolamento de campo: esta resistência controla a tensão efetiva sobre o enrolamento de campo.

As equações que representam esse controle de velocidade são as seguintes:

$$\frac{d}{dt}i_f = -\frac{1}{\tau_f}i_f + \frac{v_f}{L_f}$$

$$V_{ta} = r_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + G_{af} i_f \omega_m(t)$$

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = G_{af} i_f i_a - T_c .$$

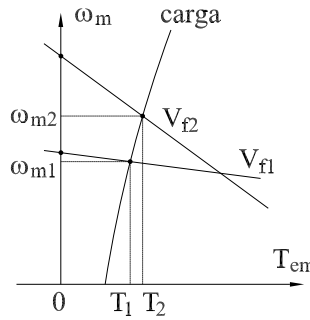


Figura 4.22: Característica do controle de velocidade por variação do fluxo indutor:  $V_{f2} < V_{f1}$ .

A capacidade de um determinado motor de produzir torque ou potência é restringida pelo aquecimento provocado por suas perdas elétricas. Como o motor é projetado para operar, em regime, com corrente máxima igual à nominal, a capacidade plena do motor é utilizada se o motor operar com a sua corrente nominal. A capacidade de um motor de corrente contínua em regime permanente é ilustrada por curvas de torque e potência, em função da velocidade.

Existem duas regiões de controle de velocidade: uma na qual os valores de velocidade ficam abaixo da nominal – controle por tensão de armadura – e outra na qual obtém-se velocidades acima da nominal, que é caso do controle do campo de excitação. No *controle por tensão de armadura*, se forem mantidas constantes a corrente de armadura e a do campo, o torque mecânico é constante e a potência eletromecânica desenvolvida aumenta linearmente com a velocidade.

Se o *controle através do campo* é realizado mantendo-se a tensão de armadura constante, tem-se a igualdade

$$E_{a2} + r_a I_{a2} = E_{a1} + r_a I_{a1}$$

ou, na forma alternativa,

$$G_{af2} I_{f2} \omega_2 - G_{af1} I_{f1} \omega_1 = r_a (I_{a1} - I_{a2}) . \quad (4.18)$$

Se na região de enfraquecimento de campo deseja-se trabalhar com a corrente e tensão de armadura nos seus valores nominais, tem-se  $I_a = I_{nominal}$  e, conseqüentemente, a tensão de velocidade é constante, o que permite escrever, a partir da Equação Equação (4.18), a relação entre as velocidades dada por

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{G_{af2} I_{f2}}{G_{af1} I_{f1}} .$$

Sendo assim, a potência eletromecânica desenvolvida  $P_{em} = E_a I_a$  é constante e o torque desenvolvido é inversamente proporcional à velocidade, porque  $T_{em} = P_{em} / \omega_m$ . Por essa razão é que os acionamentos CC que utilizam o controle de campo são denominados acionamentos de potência constante. Na Figura 4.23 são colocadas as curvas típicas de capacidade  $T - \omega$  e  $P - \omega$  de um motor excitação separada, para o controle por

tensão de armadura e por corrente de campo. O limite destas curvas é determinado pelos valores nominais de armadura e de campo, enquanto a velocidade máxima – aproximadamente duas vezes a velocidade nominal –, é limitada pela comutação e pela estrutura mecânica da máquina.

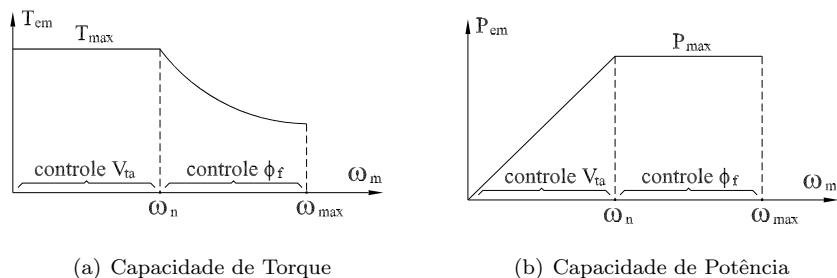


Figura 4.23: Curvas de capacidade de motores CC.

**Exemplo 4.6** A partir dos pontos da curva de magnetização  $G_{af} I_f \times I_f$  de um motor com excitação separada, obter a curva da velocidade em função da corrente de campo, se o motor funciona a vazio com tensão de armadura constante igual a 230 V. Despreze a resistência total de armadura e expresse a velocidade em rot/min.

$I_f$ [A]	0,82	0,96	1,22	1,61	1,89
$G_{af} I_f$ [V/rot/min]	0,150	0,166	0,183	0,200	0,208

**Solução**

Por que a resistência de armadura é desprezível, tem-se  $V_{ta} \approx E_a$  e, portanto,  $N_m = 230/G_{af} I_f$ , para  $G_{af} I_f$  expresso em V/rot/min. Ao se substituir nessa equação, os valores dados na característica a vazio, tem-se a velocidade em função da corrente de excitação apresentada na seguinte tabela:

$I_f$ [A]	0,82	0,96	1,22	1,61	1,89
[rot/min]	1.533,3	1.385,5	1.256,8	1.150,0	1.105,8

### 4.5 Frenagem elétrica

Na operação de motores de corrente contínua deseja-se, algumas vezes, realizar a sua frenagem elétrica ou a inversão de sua velocidade. A técnica mais usual é inverter a corrente de armadura, pois, desta maneira, o torque desenvolvido se inverte e, portanto, age no rotor de forma a freá-lo. Três métodos existem para realizar a frenagem elétrica, como ilustrados pelos circuitos equivalentes da armadura da Figura 4.24. Observe que na frenagem elétrica a máquina de corrente contínua opera sempre no modo gerador.

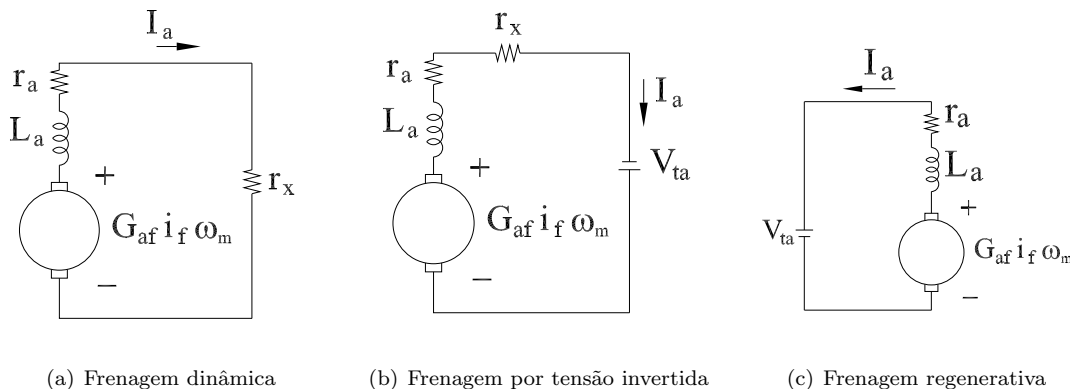


Figura 4.24: Circuito da armadura na frenagem elétrica.



### 4.5.1 Frenagem dinâmica

Se a fonte que alimenta a armadura do motor é retirada e uma resistência externa  $r_x$  é conectada aos terminais da armadura, com a excitação mantida, como ilustrado na Figura 4.24(a), tem-se a frenagem dinâmica. Como a tensão de velocidade passa a ser a única fonte de tensão no circuito de armadura, a corrente de armadura é invertida e, conseqüentemente, o torque desenvolvido também é invertido, e, portanto, a máquina passa a operar no modo gerador, ao utilizar a energia cinética armazenada nas partes girantes, como fonte primária de energia mecânica. A função da resistência externa em série com a armadura é limitar o valor da corrente de armadura. A polaridade da tensão de velocidade é mantida porque os sentidos da corrente de campo e da velocidade não se alteram. Se  $V_{ta} = 0$  é substituído na Equação (4.4) e se considera a resistência externa  $r_x$ , a equação da corrente elétrica de armadura torna-se

$$I_a = -\frac{G_{af}I_f\omega_m}{r_a + r_x}$$

e o sinal negativo indica que a corrente de armadura foi invertida em relação a ação motora. Ao se empregar a Equação (4.8) e considerar  $\omega_{m0} = 0$ , pois  $V_{ta} = 0$ , obtém-se a equação da velocidade

$$\omega_m = -\frac{r_a + r_x}{(G_{af}I_f)^2}T_{em}$$

que é a equação de uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas  $\omega - T_{em}$  e tem coeficiente angular negativo igual a  $(r_a + r_x)/(G_{af}I_f)^2$ , como ilustrado na Figura 4.25, para dois valores de resistência externa:  $r_{x2} > r_{x1}$ .

No motor série, a realização da frenagem elétrica é mais complexa, pelo fato do fluxo magnético de excitação depender diretamente da corrente de armadura. Se a inversão da corrente de armadura for acompanhada pela inversão do fluxo magnético, a frenagem desejada pela inversão do torque não ocorre, porque ele é diretamente proporcional a  $I_a^2$ ; seria, então, necessário inverter a conexão dos terminais do campo série em relação ao circuito de armadura. Uma estratégia que pode ser utilizada na frenagem dinâmica do motor série é aquela em que o enrolamento do campo é desconectado da armadura e ligado a uma fonte contínua independente, para então fechar o circuito de armadura através de uma adequada resistência externa. Neste caso, as equações que representam esta técnica de frenagem são as mesmas do motor excitação separada.

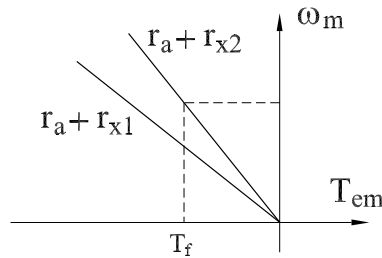


Figura 4.25: Frenagem dinâmica:  $r_{x2} > r_{x1}$ .

### 4.5.2 Frenagem por inversão da tensão terminal de armadura

Quando se desejam paradas rápidas, emprega-se a frenagem por inversão da tensão terminal de armadura, que é obtida pela inversão da polaridade da tensão aplicada à armadura, mas mantendo-se o circuito de campo ligado. A variação quase instantânea da corrente de armadura não é acompanhada pela velocidade, por causa da inércia das partes girantes. Como resultado, a máquina desenvolve um torque frenante que leva à diminuição da velocidade, de acordo com a característica mostrada na Figura 4.26. Para o caso de não se desejar a inversão de velocidade, desconecta-se a alimentação da armadura no instante em que o rotor parar. Ao se considerar, então, que a tensão aplicada aos terminais é invertida ( $-V_{ta}$ ), a partir de (4.4) tem-se a corrente, no instante da inversão, dada por

$$I_a = -\frac{V_{ta} + G_{af}I_f\omega_m}{r_a}.$$

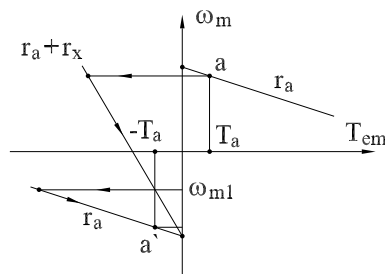


Figura 4.26: Frenagem por inversão de tensão.

Inicialmente a corrente pode ser muito maior que aquela que o enrolamento da armadura pode suportar, dado que a tensão terminal se soma a força eletromotriz gerada na armadura. Entretanto, este fato não ocasiona o super aquecimento nos condutores da armadura, porque essa corrente tem curta duração e, geralmente, o seu valor é limitado mediante a resistência externa colocada em série com a armadura. A relação velocidade e torque é expressa, então, por

$$\omega_m = -\omega_{m0} - \frac{r_a + r_x}{(G_{af} I_f)^2} T_{em} .$$

A partir do instante em que a velocidade é invertida, a polaridade da tensão de velocidade também é invertida e a máquina funciona novamente como motor, só que no terceiro quadrante do plano velocidade-torque. A partir de um determinado ponto de operação, por exemplo, quando se atinge a velocidade  $\omega_{m1}$ , pode-se retirar a resistência externa  $r_x$  e a característica do motor volta a ser a natural, mas agora com torque e velocidade invertidos, em relação a operação original – observe a simetria entre os pontos de operação  $a$  e  $a'$  na Figura 4.26.

No motor série, para que ocorra a frenagem por inversão da tensão aplicada aos terminais da armadura exige que o sentido da corrente no enrolamento série seja sempre mantido, para que os pólos principais não sejam também invertidos. Como a inversão da tensão de armadura inverte o sentido da corrente de campo, a conexão do enrolamento série deve ser invertida em relação a armadura.

### 4.5.3 Frenagem regenerativa

Sempre que o motor atingir velocidades acima da velocidade ideal a vazio, a tensão de velocidade torna-se maior que a tensão terminal, e, conseqüentemente, a corrente de armadura é invertida, tornado frenante o torque desenvolvido. Isso é possível, por exemplo, em veículos elétricos que descem um plano inclinado impulsionados pela ação da força peso do próprio veículo e da carga transportada; nesse caso, a carga passa a ser fonte primária de energia mecânica e, conseqüentemente, a máquina passa a operar no modo gerador, isto é, devolve energia à fonte de alimentação. Nesse caso, a curva velocidade-torque do motor se estende para o segundo quadrante, caracterizado por torques negativos e velocidades superiores à ideal a vazio  $\omega_{m0}$ , como mostrado na Figura 4.27. Um dos inconvenientes da frenagem regenerativa é que não se consegue parar o motor.

A frenagem regenerativa não pode ser realizada com o motor série pois a sua tensão de velocidade nunca excede a tensão terminal, pelo simples fato de que por mais que a velocidade aumente, ela não compensa a diminuição do fluxo.

## 4.6 Ponto de funcionamento e estabilidade

Em regime permanente, o ponto de operação do acionamento é definido pelo equilíbrio entre os torques do motor  $T_{em}$  e o da carga  $T_c$ . Graficamente este ponto de operação é determinado pela intersecção da característica estática velocidade-torque do motor com a da carga, conforme ilustrado nas Figuras 4.19 e (4.22).

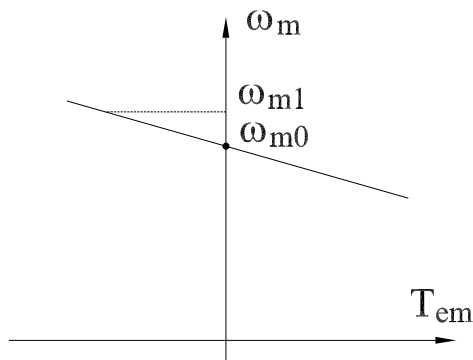


Figura 4.27: Frenagem regenerativa

Em termos matemáticos, pode-se obter a condição de estabilidade através da linearização da equação do movimento por série de Taylor em torno do ponto de operação  $\omega_0$ . Ao se admitir que o termo relativo aos torques seja não linear, se o desvio  $\Delta\omega = \omega_m - \omega_0$  é suficientemente pequeno, que permite desconsiderar os termos de segunda ordem em diante, a série representativa da equação eletromecânica torna-se

$$J \frac{d\Delta\omega_m}{dt} - \Delta\omega_m \left. \frac{d}{d\omega_m} [T_{em} - T_c] \right|_{\omega_m = \omega_0} = 0$$

O ponto de operação é estável globalmente se a raiz da equação característica é negativa, o que exige

$$\left. \frac{dT_{em}}{d\omega_m} \right|_{\omega_m = \omega_0} < \left. \frac{dT_c}{d\omega_m} \right|_{\omega_m = \omega_0}$$

isto é, tem-se a estabilidade quando a inclinação da característica torque-velocidade do motor é menor do que aquela da característica torque-velocidade da carga.

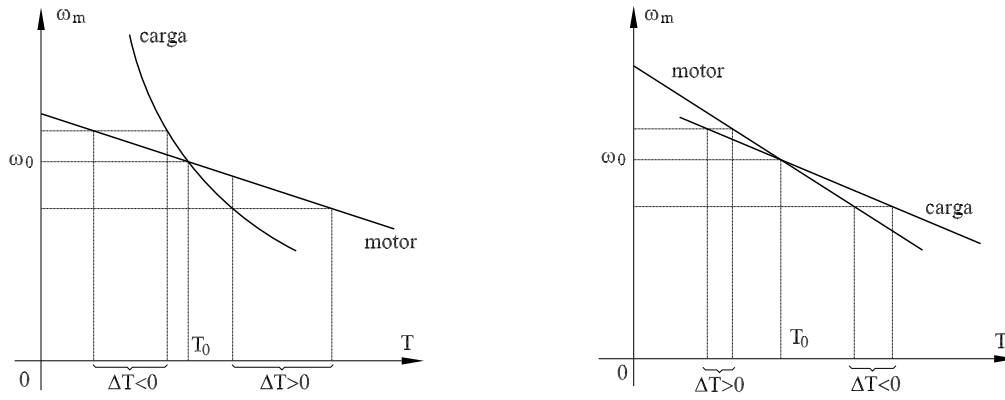
Graficamente, a análise de estabilidade estática é ilustrada, ao se supor uma pequena variação de velocidade, por uma causa qualquer, em torno do ponto de funcionamento. Na Figura 4.28(a), o aumento ou a diminuição da velocidade resulta em um torque líquido  $\Delta T = T_{em} - T_c$  que tende a restabelecer o ponto de operação inicial (ponto estável): no caso de um pequeno aumento na velocidade de eixo,  $\Delta T < 0$  e, portanto, o torque líquido é desacelerador; se a velocidade diminui, tem-se  $\Delta T > 0$ , isto é, o torque líquido tende a aumentar a velocidade na direção do ponto de operação inicial. Por sua vez, na Figura 4.28(b), o ponto de operação é instável: se ocorre uma pequena diminuição na velocidade, por um problema qualquer, o torque exigido pela carga é maior do que aquele que o motor pode disponibilizar e, portanto, a tendência é a do rotor parar; se ao contrário, a velocidade aumenta, a carga exige um torque que é menor do que o motor disponibiliza nesta nova velocidade e, conseqüentemente, o eixo do motor acelera, afastando-se do ponto de equilíbrio.

## 4.7 Generalidades sobre seleção de motores

<sup>3</sup> O conhecimento da característica velocidade-torque bem como a variação da velocidade e do torque da carga acionada com o tempo são informações imprescindíveis na seleção do motor. O motor, por sua vez, tem a sua operação circunstanciada pela temperatura de operação, principalmente os de grande potência e autoventilados; a temperatura de operação está relacionada com as perdas elétricas do motor, que provocam, além do aquecimento nas regiões onde elas estão presentes, a conseqüente diminuição da vida útil do motor bem com a sua capacidade de entregar a potência nominal.

Sendo assim, o motor tem que ser capaz de atender as exigências da carga – velocidade, torque, potência e aceleração –, e de alcançar a sua temperatura de regime, isto é, a temperatura que o motor atingiria, na operação contínua sob carga; nesta condição, o meio refrigerante absorve todo o calor transferido pelo

<sup>3</sup>Para maiores detalhes cf. CHILIKIN M., Electric Drive, Mir Publishers, Moscou, ano 1976, capítulo 6, página 246.



(a) Operação estável:  $(dT_{em}/d\omega_m)|_{\omega_0} < (dT_c/d\omega_m)|_{\omega_0}$     (b) Operação instável:  $(dT_{em}/d\omega_m)|_{\omega_0} > (dT_c/d\omega_m)|_{\omega_0}$

Figura 4.28: Estabilidade estática da operação de motores.

motor. Esta equilíbrio térmico torna-se crítico quando o ciclo da carga é variável no tempo e tem intervalos de tempo que são insuficientes para a devida refrigeração do motor. Portanto, as condições de ventilação e a natureza do regime de serviço – contínuo, de curta duração e intermitente – devem ser consideradas na escolha do motor.

*Regime de serviço*, neste texto, é o gráfico da velocidade, do torque ou da potência de carga, ao longo do tempo, quando a variação dessas grandezas são periódicas e repetitivas, como ilustrado na Figura 4.29. Embora a norma brasileira liste dez tipos regimes de serviço, no presente texto são abordados três: regime contínuo, regime intermitente e de tempo limitado (curta duração).

O *regime de serviço é contínuo* quando a carga permanece por um longo tempo acionada pelo motor, o suficiente para que seja alcançada a temperatura de regime; cargas desse tipo são os ventiladores, bombas e aparelhos de ar condicionado entre outras e a duração do regime de trabalho pode ser algumas horas ou mesmo dias, sendo que, primariamente, a potência de operação pode ser considerada constante (observe Figura 4.29(a)). O motor pode ser submetido à carga variável, mas de forma repetitiva, o que estabelece ciclos de carga constante no decorrer do período de serviço, como ilustrado na Figura 4.29(b). O regime de serviço é dito *intermitente* quando ocorrem variações de carga, tais que o motor alterna intervalos de tempo com carga com intervalos de repouso (velocidade nula e carga nula)– observe Figura 4.29(c). No caso de o ciclo de operação ser tão pequeno que o motor não consegue atingir a temperatura de regime, diz-se que o ciclo é de curta duração ou de tempo limitado, como ilustrado na Figura 4.29(d).

A *potência exigida pelas cargas em regime contínuo é, por definição, a potência nominal do motor* a ser escolhido – essa potência é discriminada na placa fixada na carcaça do motor. Um dado importante que se deve considerar na escolha do motor é o *fator de serviço*: é um multiplicador que quando aplicado à potência nominal do motor elétrico, indica a carga que pode ser acionada continuamente sob tensão e frequência nominais e com limite de elevação de temperatura do enrolamento.

Cargas tais como bombas e ventiladores têm a potência calculada teoricamente – expressões (??) e (??), respectivamente -, enquanto que para a maioria das cargas tem-se que realizar testes experimentais para determinar a potência envolvida em seu ciclo de trabalho.

Para cargas que operam continuamente ou variam pouco, a potência de entrada do motor é aproximadamente constante e nenhuma consideração de super aquecimento deve ser considerada, pois os motores são projetados para operarem nas condições nominais e, portanto, as restrições de temperatura foram consideradas. Os catálogos dos fabricantes podem ser empregados diretamente na seleção do motor.

Diferentes são os casos em que a carga apresenta, por exemplo, um regime de trabalho intermitente. A complexidade é maior quando ocorrem variações substanciais da potência ao longo do tempo, principalmente nos motores autoventilados, pois a capacidade de ventilação destes é ruim, quando a velocidade de eixo é nula ou mesmo quando é pequena.

Para cargas, cujo regime de serviço é constituído por intervalos de tempo, nos quais os valores da carga são desiguais, genericamente ilustradas na Figura 4.29(b), equivalentes rms de corrente, de torque e de

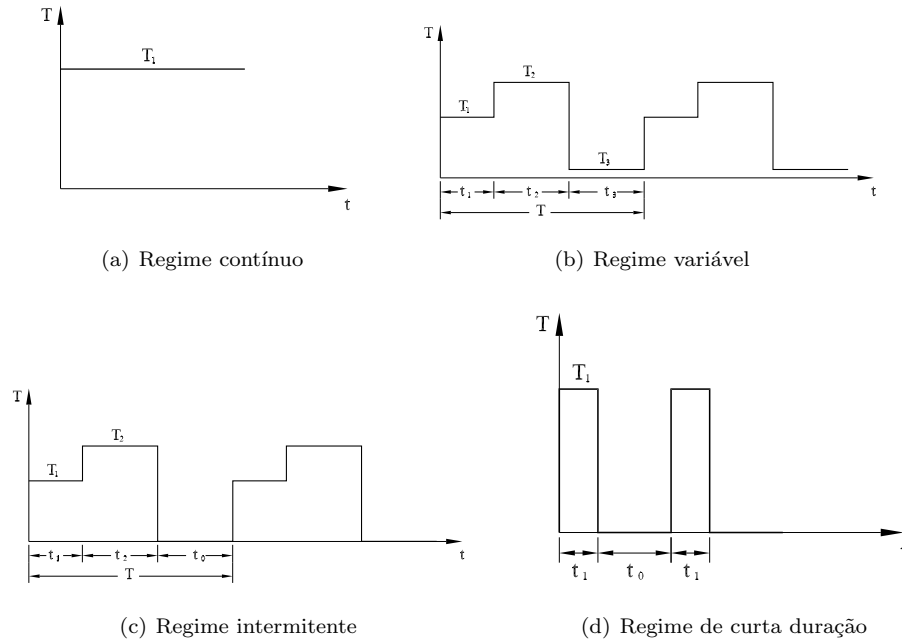


Figura 4.29: Diagramas de carga.

potência podem ser usados, como primeira estimativa, para a seleção de motores. A *corrente nominal* do motor tem que ser maior ou igual à *corrente equivalente*  $I_{rms}$ , que é calculada com a hipótese de que ela produza as mesmas perdas elétricas da corrente real variável ao longo do ciclo de trabalho. Ao se considerar os valores da corrente  $I_i$  relacionada ao intervalo de tempo  $t_i$ , e as condições de ventilação do motor para cada intervalos de tempo, por meio do fator  $k_i$ , o valor equivalente da corrente é calculado pela seguinte equação:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^T i^2 dt}{\sum_1^n k_i t_i}} \quad (4.19)$$

Os valores do fator  $k_i$  estão geralmente na faixa  $0 < k_i < 1$ , o que eleva o valor da corrente equivalente e, conseqüentemente, exige-se um valor nominal maior para a corrente do motor a ser selecionado; por esta razão, o motor pode funcionar com maior folga e, conseqüentemente, evita-se o seu superaquecimento. Para os intervalos de tempo nos quais têm-se aceleração/desaceleração adota-se  $0,5 < k_i < 0,75$ ; em baixa velocidade ou parado pode-se utilizar valores de  $k_i \leq 0,5$ <sup>4</sup>. Quando o motor é exigido para trabalhar com baixas velocidades ou com freqüentes acelerações e desacelerações, deve-se providenciar ventiladores externos (ventilação forçada) que refrigerem o motor e, neste caso, pode-se adotar  $k_i = 1$ .

Nos casos em que o torque desenvolvido pelo motor é diretamente proporcional à corrente de estator – que no caso dos motores de corrente contínua significa  $\phi_{fg}$  constante –, tem-se  $T_i \propto I_i$  e, ao se empregar a Equação (4.19), tem-se

$$T_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (T_i)^2 t_i}{\sum_1^n k_i t_i}} \quad (4.20)$$

<sup>4</sup>CHILIKIN M., Electric Drive, Mir Publishers, Moscou, 1976, página 290.

na qual  $T_i$  é torque em cada em cada intervalo de tempo  $t_i$  em que a carga está presente. O torque nominal do motor a ser selecionado tem que ser maior ou igual ao  $T_{rms}$ . Se a variação da velocidade de operação não é significativa, como  $P = T\omega$ , a potência equivalente ou potência contínua que o motor deve disponibilizar em seu eixo é dada por

$$P_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (P_i)^2 t_i}{\sum_1^n k_i t_i}}$$

Geralmente para cargas intermitentes, calcula-se o torque equivalente pela expressão (4.20) e a porcentagem do tempo ativo da carga em relação ao tempo total do regime de serviço, denominado *fator de duração do ciclo* e determinado pela relação

$$\text{fator de duração do ciclo} = \frac{\text{tempo total de carga}}{\text{tempo total do serviço}} = \frac{\sum t_i}{\sum t_i + t_0}$$

o qual tem que ser menor do que aquele fornecido pelo fabricante.

## Exercícios

**4.1** Considere que um motor de corrente contínua com excitação separada não tem carga externa conectada ao seu eixo; nesta condição o seu eixo gira a 1.700 rot/min e a fonte elétrica externa entrega nos terminais de armadura 1 kW. Nestas condições determine o valor aproximado do torque eletromecânico gerado.

**4.2** A máquina de corrente contínua do exercício anterior deve operar no modo gerador entregando nos terminais da armadura a potência de 1 kW, com velocidade de 1.700 rot/min. Determine a potência que a fonte mecânica externa tem que fornecer ao eixo?.

**4.3** É usual normalizar as grandezas das máquinas elétricas como uma fração de um valor de base correspondente, pois elas assumem valores típicos em função do tipo e da construção da máquina em questão. Tome como valores primários de base os valores nominais da tensão e da corrente de armadura ( $V_B = V_N$  e  $I_B = I_N$ ) e do fluxo por pólo ( $\phi_B = \phi_N$ ) e, a partir desses valores obtenha (a) os valores de base das demais grandezas da máquina de corrente contínua e (b) a equação de velocidade em p.u. de um motor excitação separada.

**4.4** Mostrar que, nas condições nominais, a queda de velocidade do motor excitação separada é igual à resistência total de armadura em p.u., isto é,  $\Delta\omega(p.u.) = -r_a(p.u.)$ .

**4.5** Um motor de corrente contínua com  $r_a = 0,10 \Omega$ , e  $r_f = 50 \Omega$  tem o seu circuito de campo conectado em paralelo com o circuito de armadura. A sua curva de magnetização obtida com velocidade de 1.000 rot./min e operando no modo gerador a vazio é a seguinte:

$I_f$ [A]	0,50	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
$G_{af} I_f$ [V/rad/s]	0,40	0,79	1,43	1,74	1,93	2,05

Com esses dados, foi pedido a um engenheiro que calculasse a velocidade que o motor com excitação separada teria se a sua carga exigisse uma corrente de armadura  $I_a = 100 A$ , quando a armadura e o campo fossem alimentados com 250 V, e o reostato de controle de campo ajustado para  $r_x = 12,5 \Omega$ .

- (a) Qual seria a velocidade calculada?
- (b) Para verificar se o valor calculado da velocidade estava correto, foi realizado em laboratório o teste com carga. Os seguintes resultados foram obtidos:

$V_{ta}$ [V]	$I_f$ [A]	$I_a$ [A]	$\omega_m$ [rad/s]
250	4,00	100,00	130,00

Por que a velocidade calculada é diferente daquela medida em laboratório?

**4.6** Refaça o Exemplo 4.4, considerando que a carga exige potência desenvolvida constante, em vez de o torque desenvolvido.

**4.7** Um motor de corrente contínua excitação paralela de 4 pólos,  $J_m = 1,2 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $L_f = 90 \text{ H}$ ,  $L_a$  desprezível,  $r_a = 0,10 \Omega$ ,  $r_f = 225 \Omega$ , possui os seguintes dados nominais:  $V_{ta} = 250 \text{ V}$ ,  $I_a = 95 \text{ A}$  e perdas rotacionais constantes de  $920 \text{ W}$ . A característica a vazio, obtida na velocidade de  $900 \text{ r.p.m}$ , é a seguinte:

$I_f \text{ [A]}$	0,11	0,22	0,44	0,53	0,66	0,87	1,11
$G_{af} I_f 10^{-2} \text{ [V/rot/min]}$	5,6	13,8	16,6	19,4	22,2	25,1	27,7

Com a tensão terminal de armadura mantida no seu valor nominal ajusta-se a excitação variando um reostato em série com o enrolamento de campo. Determinar ( $G_{af} I_f$ ),  $E_a$ ,  $N_m$  em rot/min,  $P_m$ ,  $T_{em}$ ,  $P_{ent}$ ,  $P_{eixo}$  e a eficiência do motor funcionando com a corrente de plena carga nos seguintes casos:

- Corrente de excitação igual a 100% do seu valor nominal;
- Corrente de excitação igual a 80% do seu valor nominal.

Esboçar em um mesmo gráfico as características de regime velocidade-corrente de armadura e velocidade-torque desenvolvido.

**4.8** Com o motor do Exercício 4.7 funcionando com correntes de armadura e de campo nominais, suponha que ocorra a reação de armadura, tornando o fluxo por pólo 3% menor. Nestas condições, determine a velocidade do motor.

**4.9** Suponha que um motor de corrente contínua tenha a sua tensão terminal variada por um recortador que é ligado a uma fonte de tensão constante igual a  $V_{cc}$ , como ilustrado na Figura 4.20(b). Se o tempos de condução são iguais a  $t_{lig}$  e os de não-condução  $t_{deslig}$ , escreva a expressão da tensão média.

**4.10** Realiza-se a frenagem elétrica de um motor CC,  $32 \text{ kW}$ ,  $440 \text{ V}$ ,  $80 \text{ A}$ ,  $1.000 \text{ rot/min}$ ,  $r_a = 0,284 \Omega$ , funcionando com excitação separada e fluxo nominal, a partir do seu ponto de operação nominal. Pergunta-se:

- Qual é o valor da resistência  $r_x$  que deve ser colocada em série com a armadura da máquina funcionando com frenagem dinâmica, para que a corrente de armadura seja a nominal no instante inicial imediato da frenagem ( $t = 0^+$ ). Calcule os respectivos valores máximos do torque desenvolvido e da potência dissipada na resistência externa.
- Se agora é feita a frenagem por inversão da tensão aplicada, com a resistência externa o item anterior, determine a corrente da armadura resultante e o torque desenvolvido, no instante  $t = 0^+$ .
- Qual é o torque frenante de eixo, em cada um dos dois casos descritos anteriormente.

**4.11** Um motor de corrente contínua, excitação série,  $r_a = 0,3 \Omega$ ,  $r_s = 0,1 \Omega$ ,  $40 \text{ A}$ ,  $9 \text{ kW}$  e  $V_{ta} = 250 \text{ V}$ , tem a seguinte característica a vazio, obtida no modo gerador, excitação separada, acionado a  $300 \text{ rot/min}$ :

$I_s \text{ [A]}$	20	30	40	50	55
$G_{af} I_s \text{ [V/rot/min]}$	0,540	0,717	0,833	0,910	0,950

Deseja-se descer uma carga com o motor operando na frenagem por inversão da tensão aplicada à armadura, com corrente de armadura igual a 150% do seu valor nominal, nas velocidades de  $200 \text{ rot/min}$  (caso 1) e  $100 \text{ rot/min}$  (caso 2). Determinar a resistência que deve ser colocada em série com a armadura e esboçar as respectivas curvas características de regime velocidade-torque, para cada um dos dois casos citados.

**4.12** Obtenha as equações da corrente de armadura correspondente aos intervalos de tempo em que a chave está fechada ( $T_l$ ) e aberta ( $t_d$ ), no caso do recortador de um quadrante. Assuma que a velocidade é constante para a frequência de chaveamento empregada.

**4.13** Um motor de potência nominal igual a  $8\text{ kW}$  é selecionado para acionar uma carga com o seguinte regime de serviço:

$\Delta t$ [s]	$P$ [kW]
60	6
120	10
60	8

O motor selecionado conseguirá acionar a carga sem sobreaquecimento?





## Capítulo 5

# Dinâmica da Máquina de Corrente Contínua de Excitação Separada

### 5.1 Introdução

Variações separadas ou simultâneas das grandezas elétricas dos motores, tais como tensão, e, adicionalmente, frequência elétrica para os motores de corrente alternada, bem como da carga, estabelecem transitórios de natureza eletromecânica. As correspondentes variações nas correntes elétricas, no torque desenvolvido e na velocidade de eixo do motor podem ser avaliadas a partir das equações dinâmicas do motor e das máquinas acionadas. Em relação ao modelo de regime permanente, deve-se adicionar os termos de tensões elétricas do tipo  $L di/dt$  e de torque de aceleração do tipo  $J d\omega/dt$ .

Nas máquinas elétricas rotativas a energia armazenada está associada aos campos magnéticos e às partes rotativas. Sendo assim, o seu modelo matemático escrito na forma de espaço de estado tem como *variáveis de entrada* as tensões da armadura  $V_{ta}$  e de campo  $V_f$  e o torque de carga referido ao eixo do motor ( $T_c$ ), enquanto as *variáveis de estado* são as correntes  $i_a(t)$ ,  $i_f(t)$  e a velocidade  $\omega_m(t)$ . A partir dessas equações, as funções de transferência que relaciona cada entrada a cada variável de saída são obtidas.

### 5.2 Motor de excitação separada

Neste capítulo é assumido que a carga referida ao eixo do motor é dada por  $T_{carga} = b_c \omega_m + T_c$  e que a sua inércia  $J_c$  é constante; o coeficiente de atrito viscoso  $b_t$  e inércia  $J_t$  designam respectivamente os valores totais do atrito viscoso e da inércia de todas as partes girantes, referidos também ao eixo de rotação da máquina de corrente contínua. Ao se escolher como variáveis de estado as correntes de armadura  $i_a(t)$  e de campo  $i_f(t)$ , e a velocidade de eixo do motor  $\omega_m$ , as equações que descrevem a dinâmica do acionamento com motor de excitação separada são as seguintes:

(a) Equação de tensão do circuito de armadura:

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{1}{\tau_a} i_a - \frac{1}{L_a} G_{af} i_f \omega_m(t) + \frac{V_{ta}}{L_a} \quad (5.1)$$

na qual  $\tau_a = L_a/r_a$  é a constante de tempo de armadura.

(a) Equação de tensão do circuito de campo:

$$\frac{di_f}{dt} = -\frac{1}{\tau_f} i_f + \frac{V_f}{L_f} \quad (5.2)$$

na qual  $\tau_a = L_f/r_f$  é a constante de tempo do circuito de campo.

(b) Equação do movimento de rotação:

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_t} G_{af} i_f \dot{i}_a - \frac{b_t}{J_t} \omega_m(t) - \frac{T_c}{J_t} \quad (5.3)$$

A presença do termo velocidade nas equações de armadura e do movimento caracteriza um acoplamento entre estas equações. Adicionalmente, o sistema de equações apresenta não-linearidades devido à dependência não linear entre o fluxo de excitação e a corrente de campo  $i_f$ , como também pelo fato das equações da armadura e da velocidade apresentarem termos resultantes do produto de variáveis de estado; por esta razão o sistema é dito acoplado e não linear. Diante de pequenas perturbações, a análise do comportamento dinâmico da máquina é feita a partir da linearização do sistema de equações em torno do ponto de operação.

Tome o caso para o qual a corrente de campo principal é constante, dada por  $I_{f0}$ , e a reação de armadura é nula ou compensada quando existir; com estas condições, a indutância do circuito de campo  $L_f$  e a mútua mocional  $G_{af}$  assumem valores constantes e o modelo do acionamento torna-se linear. Então, a partir do emprego da transformação de Laplace nas Equações (5.1) e (5.3) têm-se que o sistema escrito na forma matricial é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} sI_a(s) \\ s\omega_m(s) \end{bmatrix}}_{sX(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{\tau_a} & \frac{-G_{af}I_{f0}}{L_a} \\ \frac{G_{af}I_{f0}}{J_t} & \frac{-b_t}{J_t} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} I_a(s) \\ \omega_m(s) \end{bmatrix}}_{X(s)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{-J_t} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} V_{ta}(s) \\ T_c(s) \end{bmatrix}}_{U(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} I_a(s) \\ \omega_m(s) \end{bmatrix}$$

na quais  $X$  e  $U$  são os vetores de estado e de entrada, respectivamente, e  $A$ ,  $B$  e  $C$  são as matrizes do sistema, da entrada e da saída.

A matriz função de transferência  $G_p(s)$  correspondente é determinada por

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \underbrace{\frac{Adj(sI - A)}{|sI - A|}}_{p(s)} B \quad (5.4)$$

na qual  $Adj$  indica que se deve tomar a adjunta da matriz que se segue e  $|sI - A|$  é o polinômio característico  $p(s)$ . A forma geral da matriz função de transferência é dada por

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} G_{I,V} & G_{I,T} \\ G_{\omega,V} & G_{\omega,T} \end{bmatrix}$$

na qual os seus elementos designam funções-transferência entre entradas e saídas específicas e são identificados pelo sub-índice; por exemplo,  $G_{\omega-T}$  é a função que relaciona a velocidade do motor (variável de saída) e o torque externo (variável de entrada).

No caso sob análise, a matriz adjunta e a equação característica são respectivamente

$$Adj [sI - A] = \begin{bmatrix} s + \frac{b_t}{J_t} & \frac{G_{af}I_{f0}}{L_a} \\ \frac{G_{af}I_{f0}}{J_t} & s + \frac{1}{\tau_a} \end{bmatrix}$$

$$p(s) = s^2 + s\left(\frac{1}{\tau_a} + \frac{b_t}{J_t}\right) + \frac{1}{\tau_a} \frac{1}{\tau_{em}}$$

na qual

$$\tau_{em} = \frac{J_t r_a}{(G_{af}I_{f0})^2 + r_a b_t}$$

é a constante de tempo eletromecânica.

A resposta transitória do motor é determinada pelas raízes da equação característica que são também os pólos da função transferência  $G_p(s)$ . Para máquinas típicas tem-se

$$\frac{1}{\tau_a} = \frac{r_a}{L_a} \gg \frac{b_t}{J_t}$$

o que permite adotar

$$\frac{1}{\tau_a} + \frac{b_t}{J_t} \cong \frac{1}{\tau_a}.$$

Ao se empregar essas aproximações, tem-se a equação característica dada por

$$p(s) = s^2 + s\frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_{em}\tau_a}. \quad (5.5)$$

Como os sistemas de 2ª ordem podem ser estudados empregando-se a equação característica padrão

$$p(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad (5.6)$$

cujas raízes são dadas por

$$s_1, s_2 = \omega_n \left( -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

na qual  $\xi$  é o fator de amortecimento e  $\omega_n$  é a frequência natural, a comparação entre as Equações (5.5) e (5.6) resulta nas seguintes relações:

$$\omega_n = \sqrt{1/(\tau_a\tau_{em})}$$

$$\xi = \sqrt{\tau_{em}/(4\tau_a)}.$$

Os valores assumidos pelo fator de amortecimento  $\xi$  determinam três tipos diferentes de resposta, como dados na seqüência:

(a) *Resposta superamortecida:*  $\xi > 1$ .

Na maioria das máquinas de corrente contínua  $\tau_{em} > 4\tau_a$ , o que resulta  $\xi > 1$ . Portanto, as raízes são reais, distintas e negativas, o que define uma resposta exponencial lenta e cujos valores nunca ultrapassam o valor de regime:

$$s_1, s_2 = 1/(2\tau_a) \left[ -1 \pm \sqrt{1 - 4\tau_a/\tau_{em}} \right]$$

Geralmente o coeficiente  $4\tau_a/\tau_{em}$  tem um valor muito pequeno e a série de Maclaurin para o termo  $\sqrt{1 - 4\tau_a/\tau_{em}}$  pode ser aproximada por  $1 - 2\tau_a/\tau_{em}$ ; então, as raízes são

$$s_1 = -\frac{1}{\tau_{em}}$$

$$s_2 = -\frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_{em}} \cong -\frac{1}{\tau_a}$$

e o polinômio característico torna-se

$$p(s) = \left( s + \frac{1}{\tau_a} \right) \left( s + \frac{1}{\tau_{em}} \right).$$

(b) *Resposta subamortecida:*  $0 < \xi < 1$ .

No caso de  $\tau_{em} < 4\tau_a$  tem-se  $0 < \xi < 1$  e as raízes são complexas conjugadas, o que define uma resposta oscilatória que chega a ultrapassar o valor de regime; as raízes são dadas por

$$s_1, s_2 = -1/(2\tau_a) \left( 1 \pm j\sqrt{4\tau_a/\tau_{em} - 1} \right).$$

(c) *Resposta criticamente amortecida:*  $\xi = 1$

Neste caso, a resposta de regime permanente é alcançada no menor tempo e sem oscilações; ao contrário do caso superamortecido, esta resposta dificilmente ocorre para as máquinas de corrente contínua.

No caso da resposta amortecida, o emprego da matriz função transferência dada pela Equação (5.4) resulta em

$$G_p(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau_a}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \left(s + \frac{b_t}{J_t}\right) & \frac{G_{af} I_{f0}}{J_t L_a} \\ \frac{G_{af} I_{f0}}{J_t L_a} & \frac{1}{J_t} \left(s + \tau_a\right) \end{bmatrix}$$

que define as seguintes expressões da corrente de armadura e da velocidade:

$$I_a(s) = \frac{\frac{1}{L_a} \left(s + \frac{b_t}{J_t}\right)}{\left(s + \frac{1}{\tau_a}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)} V_{ta}(s) + \frac{\frac{G_{af} I_{f0}}{J_t L_a}}{\left(s + \frac{1}{\tau_a}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)} T_c(s) \quad (5.7)$$

$$\omega_m(s) = \frac{\frac{G_{af} I_{f0}}{J_t L_a}}{\left(s + \frac{1}{\tau_a}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)} V_{ta}(s) - \frac{\frac{1}{J_t}}{\left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)} T_c(s). \quad (5.8)$$

Como é admitido que as equações que descrevem o motor e a carga são lineares, pode-se aplicar o princípio da superposição, isto é, considerar separadamente as respostas às variações da tensão de armadura e do torque de carga. Se, por exemplo, deseja-se estudar somente a regulação de velocidade diante das variações do torque de carga, toma-se a Equação (5.8) com  $V_{ta} = 0$ .

O estudo do efeito dos parâmetros indutância, coeficiente de atrito viscoso e da inércia nos transitórios da corrente e da velocidade é útil para a compreensão do processo transitório que se estabelece quando ocorrem mudanças na tensão de armadura e no torque de carga. Para os casos em que a carga apresenta oscilações rápidas de torque, a consideração da indutância de armadura pode ser necessária, *mas na maioria das aplicações, pode-se considerar  $L_a \simeq 0$  e, conseqüentemente, o modelo do sistema passa a ser de primeira ordem, definido somente pela constante de tempo eletromecânica e o transitório é superamortecido.* As condições iniciais do transitório são dadas pelos valores de regime permanente imediatamente anteriores às mudanças de tensão e/ou de torque de carga e, conseqüentemente, o comportamento da corrente e da velocidade no tempo é o resultado da superposição dessas condições iniciais àquelas que se desenvolvem no transitório. Ao se considerar a hipótese de  $L_a \simeq 0$  nas Equações (5.7)-(5.8), o regime transitório causado pelas variações de  $\Delta V_{ta}$  e  $\Delta T_c$  é descrito pelas seguintes equações:

$$\Delta I_a(s) = \left( \frac{s + \frac{b_t}{J_t}}{s + \frac{1}{\tau_{em}}} \right) \frac{1}{r_a} \Delta V_{ta}(s) + \left( \frac{\frac{G_{af} I_{f0}}{J_t r_a}}{s + \frac{1}{\tau_{em}}} \right) \Delta T_c(s) \quad (5.9)$$

$$\Delta \omega_m(s) = \left( \frac{\frac{G_{af} I_{f0}}{J_t r_a}}{s + \frac{1}{\tau_{em}}} \right) \Delta V_{ta}(s) - \left( \frac{\frac{1}{J_t}}{s + \frac{1}{\tau_{em}}} \right) \Delta T_c(s). \quad (5.10)$$

Uma vez determinado o transitório no domínio do tempo, a resposta instantânea completa é

$$i_a(t) = i_a(0^-) + \Delta i_a(t)$$

$$\omega_m(t) = \omega_m(0^-) + \Delta \omega_m(t)$$

nas quais  $i_a(0^-)$  e  $\omega_m(0^-)$  são as condições iniciais do transitório.

### 5.2.1 Variação abrupta da tensão de armadura com torque de carga constante

No controle de velocidade por tensão de armadura procura-se operar o motor com fluxo de excitação constante, o que exige primariamente corrente de excitação constante. Na verdade, se a reação de armadura existir e não for compensada, mesmo que  $I_f$  seja constante, o fluxo de entreferro diminui. Então, para o caso de efeito desmagnetizante desprezível da reação de armadura, as equações que descrevem o comportamento dinâmico do motor são dadas pelas Equações (5.9) e (5.10) e as variáveis de entrada são a tensão de armadura e torque de carga, e as variáveis de saída são a corrente de armadura e a velocidade.

Suponha, então, que o motor funciona em regime permanente e que a partir de um determinado instante a tensão de armadura sofre uma variação do tipo degrau ( $\Delta V_{ta}(s) = \Delta V_{ta}/s$ , enquanto  $\Delta T_c(s) = 0$ ). Essas condições levadas em consideração nas Equações (5.9) e (5.10) resultam nas correspondentes equações do transitório

$$\Delta I_a(s) = \left( \frac{s + \frac{b_t}{J_t}}{s + \frac{1}{\tau_{em}}} \right) \frac{1}{r_a} \frac{\Delta V_{ta}}{s}$$

$$\Delta \omega_m(s) = \left( \frac{\frac{G_{af} I_{f0}}{J_t r_a}}{s + \frac{1}{\tau_{em}}} \right) \frac{\Delta V_{ta}}{s}.$$

A transformada inversa de Laplace dessas equações resulta nos seguintes transitórios da corrente de armadura e da velocidade, em função do tempo:

$$\Delta i_a(t) = \frac{\Delta V_{ta}}{r_a} \left[ \frac{b_t \tau_{em}}{J_t} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{em}}\right) \right) + \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right) \right]$$

$$\Delta \omega_m(t) = \frac{G_{af} I_{f0}}{J_t r_a} \Delta V_{ta} \tau_{em} \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right) \right]$$

cujos valores de regime são

$$\Delta i_a(\infty) = \frac{b_t}{(G_{af} I_{f0})^2 + r_a b_t} \Delta V_{ta}$$

$$\Delta \omega_m(\infty) = \frac{G_{af} I_{f0}}{(G_{af} I_{f0})^2 + r_a b_t} \Delta V_{ta}.$$

Observe que, pelo fato da carga ter o componente de atrito viscoso  $b_t$ , a corrente de armadura de regime permanente tem uma variação proporcional ao coeficiente  $b_t$ .

### 5.2.2 Variação abrupta do torque de carga com tensão de armadura constante

Se o motor opera em regime permanente com  $V_{ta}$  constante e, a partir de um determinado instante é submetido a uma variação abrupta do torque de carga  $\Delta T_c(s) = \Delta T_c/s$ , a partir do emprego das Equações (5.9) e (5.10) obtêm-se as correspondentes variações da corrente de armadura e da velocidade

$$\Delta I_a(s) = \frac{\frac{G_{af} I_{f0}}{J_t r_a}}{\left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)} \frac{\Delta T_c}{s}$$

$$\Delta\omega_m(s) = -\frac{\frac{1}{J_t}}{\left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)} \frac{\Delta T_c}{s}$$

que resultam, após a aplicação da transformação inversa de Laplace, em

$$\Delta i_a(t) = \frac{\Delta T_c}{G_{af} I_{f0}} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right)\right)$$

$$\Delta\omega_m(t) = -\underbrace{\frac{r_a}{(G_{af} I_{f0})^2 + b_t r_a}}_{\Delta\omega_m(\Delta T)} \Delta T_c \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right)\right)$$

na qual  $\Delta\omega_m(\Delta T) = r_a/(G_{af} I_{f0}^2 + b_t r_a)$  é a queda na velocidade causada pela variação  $\Delta T_c$  do torque de carga.

Os correspondentes valores de regime das variações da corrente e da velocidade são

$$\Delta i_a(\infty) = \frac{\Delta T_c}{G_{af} I_{f0}}$$

$$\Delta\omega_m(\infty) = -\Delta\omega_m(\Delta T).$$

Como esperado, a análise destas duas últimas equações indica que aumento do torque está associado ao aumento da corrente e da queda de velocidade.

### 5.2.3 Partida do motor com carga

Se o torque de carga só é visto pelo motor no instante em que se aplica o degrau de tensão, a resposta no tempo é a combinação das respostas dos dois casos anteriores – variação da tensão de armadura e do torque de carga:

$$i_a(t) = \frac{\Delta V_{ta}}{r_a} \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right) + \frac{\Delta T_c}{G_{af} I_{f0}} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right)\right)$$

$$\omega_m(t) = \left[ \frac{\Delta V_{ta}}{G_{af} I_{f0}} - \Delta\omega_m(\Delta T) \right] \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right)\right).$$

No caso de não ter torque de carga ( $\Delta T_c = 0$ ), as expressões da corrente de armadura e da velocidade na partida são

$$i_a(t) = \frac{\Delta V_{ta}}{r_a} \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right)$$

$$\omega_m(t) = \frac{\Delta V_{ta}}{G_{af} I_{f0}} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right)\right)$$

### 5.2.4 Modelo para Pequenas Variações

Pequenas perturbações em torno do ponto de funcionamento do motor podem ocorrer por causa de flutuações da carga e de oscilações dos cabos transmissores. Seja o caso de um motor de excitação separada funcionando em regime permanente e que, por um motivo qualquer, ocorram pequenas mudanças em suas correntes e tensões elétricas, bem como no torque de carga. A resposta transitória do motor é vista, então, como o resultado da superposição da pequena perturbação no ponto de operação de regime. Por exemplo, uma pequena mudança na tensão de campo  $\Delta V_f$ , torna  $V_f = V_{f0} + \Delta V_f$  e, por conseqüência, a nova corrente de campo torna-se  $I_f = I_{f0} + \Delta I_f$ . Como está sendo admitido a relação linear entre o fluxo e a corrente, o que significa  $L_f$  constante, a partir da Equação (5.2) escreve-se

$$V_{f0} + \Delta V_f = \frac{1}{\tau_f} (1 + L_f \frac{d}{dt}) (I_{f0} + \Delta i_f) \quad (5.11)$$

que leva à seguinte equação em função das termos associados às pequenas variações:

$$\frac{d}{dt}\Delta i_f = -\frac{1}{\tau_f}\Delta i_f + \frac{\Delta V_f}{L_f} .$$

Para as outras variáveis, as pequenas variações em torno do ponto de equilíbrio estabelecem os novos valores

$$V_{ta} = V_{ta0} + \Delta V_{ta}$$

$$i_a = I_{a0} + \Delta i_a$$

$$\omega_m = \omega_{m0} + \Delta\omega_m,$$

$$T_c = T_{c0} + \Delta T_c$$

e

$$T_{em} = T_{em0} + \Delta T_{em} .$$

Ao se considerar esses incrementos nas equações da corrente de armadura (5.1), do torque gerado (4.6) e da equação eletromecânica (5.3), com o mesmo procedimento empregado na obtenção de (5.11) têm-se

$$\frac{d}{dt}\Delta i_a = -\frac{G_{af}\omega_{m0}}{L_a}\Delta i_f - \frac{1}{\tau_a}\Delta i_a - \frac{G_{af}I_{f0}}{L_a}\Delta\omega_m + \frac{1}{L_a}\Delta V_{ta} \quad (5.12)$$

$$\Delta T_e = G_{af}(I_{f0}\Delta i_a + I_{a0}\Delta i_f)$$

e

$$\frac{d}{dt}\Delta\omega_m = \frac{G_{af}I_{a0}}{J_t}\Delta i_f + \frac{G_{af}I_{f0}}{J_t}\Delta i_a - \frac{b_t}{J_t}\Delta\omega_m - \frac{\Delta T_c}{J_t} . \quad (5.13)$$

A transformada de Laplace de (5.11), de (5.12) e (5.13) escritas na forma de espaço de estado resulta nas seguintes matrizes:

$$X = [\Delta I_f(s) \quad \Delta I_a(s) \quad \Delta\omega(s)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_f} & 0 & 0 \\ -\frac{G_{af}\omega_{m0}}{L_a} & -\frac{1}{\tau_a} & -\frac{G_{af}I_{f0}}{L_a} \\ \frac{G_{af}I_{a0}}{J_t} & \frac{G_{af}I_{f0}}{J_t} & -\frac{b_t}{J_t} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{J_t} \end{bmatrix}$$

$$U = [\Delta V_f(s) \quad \Delta V_{ta}(s) \quad \Delta T_c(s)]^T .$$



Os elementos da correspondente matriz função transferência  $G(s)$  designam a função transferência entre cada uma das entradas e saídas do sistema, como indicado na seguinte expressão:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G(s)_{I_f-V_f} & G(s)_{I_f-V_{ta}} & G(s)_{I_f-T_c} \\ G(s)_{I_a-V_f} & G(s)_{I_a-V_{ta}} & G(s)_{I_a-T_c} \\ G(s)_{\omega-V_f} & G(s)_{\omega-V_{ta}} & G(s)_{\omega-T_c} \end{bmatrix}.$$

Para descobrir uma particular função de transferência, por exemplo, o efeito na velocidade do motor causado pela variação na tensão de armadura, faz-se  $\Delta I_f = 0$ ,  $\Delta T_c = 0$  e  $\Delta V_{ta} \neq 0$ , para obter

$$G(s)_{\omega-V_{ta}} = \frac{\Delta \omega_m}{\Delta V_{ta}}.$$

Geralmente, no estudo da dinâmica dos motores de corrente contínua tem-se interesse nas três seguintes situações:

- (a) Variação na tensão de armadura, corrente de campo e torque de carga constantes  $\Rightarrow \Delta V_{ta} \neq 0$ ,  $\Delta V_f = 0$  e  $\Delta T_c = 0$ .

$\Rightarrow$  empregar as Equações (5.7) e (5.8).

- (b) Variação no torque de carga, com a tensão de armadura e a corrente de campo constantes  $\Rightarrow \Delta T_c \neq 0$ ,  $\Delta V_{ta} = 0$  e  $\Delta V_f = 0$ .

$\Rightarrow$  empregar Equações (5.7) e (5.8).

- (c) Variação na corrente de campo, torque de carga e tensão de armadura constantes  $\Rightarrow \Delta V_f \neq 0$ ,  $\Delta T_c = 0$  e  $\Delta V_{ta} = 0$ .

Com essas condições mais a hipótese de  $b_t = 0$ , a partir da Equação (??) obtém-se, após alguns rearranjos, as equações

$$\Delta I_a(s) = -\frac{\Delta V_f}{r_f} \frac{1}{1 + s\tau_f} \frac{G_{af}^2 I_{f0} I_0 + sJG\omega_{m0}}{G_{af} I_{f0}^2 (s^2 \tau_a \tau_{em} + s\tau_{em} + 1)}$$

$$\Delta \omega_m(s) = -\frac{\Delta V_f}{r_f} \frac{1}{1 + s\tau_f} \frac{G_{af}^2 I_{f0} \omega_{m0} - G_{af} I_0 r_a (s\tau_a + 1)}{G_{af} I_{f0}^2 (s^2 \tau_a \tau_{em} + s\tau_{em} + 1)}$$

Claramente ao se diminuir a corrente de campo, por meio da tensão de campo, a corrente de armadura e a velocidade aumentam. Pelo fato da corrente de armadura aumentar - podendo chegar a valores muito altos -, e a constante de tempo da armadura ter valores baixos - o que pode definir amplitudes de correntes transitórias elevadas -, há a necessidade de se limitar o valor máximo da corrente de armadura.

### 5.2.5 Transitórios devidos à variação da Tensão de Excitação

A vantagem do controle de velocidade mediante a variação da excitação é que se atua na variável do circuito de pequena potência. As desvantagens são a resposta lenta do fluxo de excitação e a redução da capacidade de torque, pois a diminuição da corrente de campo leva à diminuição do torque por unidade de corrente de armadura. Se a corrente de armadura é constante e igual a  $I_{a0}$ , ao se combinar as Equações (5.2) e (5.3) e realizar a transformada de Laplace da equação resultante, tem-se

$$\omega_m(s) = \frac{G_{af} I_{a0}}{b_t(1 + s\tau_f)(1 + s\tau_m)} \frac{\Delta V_f(s)}{r_f} - \frac{1}{b_t(1 + s\tau_m)} T_c(s)$$

na qual  $\tau_m = J_t/b_t$  é a constante de tempo mecânica.

## 5.2.6 Transitórios na frenagem elétrica

### Frenagem dinâmica

Como já foi analisado no capítulo anterior, na frenagem dinâmica a alimentação de armadura é desconectada e uma resistência externa é conectada em série com o circuito de armadura para limitar a sua corrente e, portanto, a resistência total em série com a tensão  $E_a$  torna-se  $r_t = r_a + r_x$ . Se a excitação é paralela, desconectar a tensão terminal de armadura leva à perda da excitação do campo indutor e, conseqüentemente, o fluxo principal é o fluxo residual; como é conhecido, o valor deste fluxo é muito pequeno, o que torna a tensão  $E_a$  por unidade de velocidade muito pequena e, portanto, o torque frenante desenvolvido é desprezível. A frenagem dinâmica deve ser feita mantendo-se constante a excitação externa do enrolamento de campo. Nesta seção é analisada apenas a frenagem do motor com excitação separada e com  $b_t = 0$ .

Se o motor está em regime permanente antes do início da frenagem, as expressões da velocidade e da corrente podem ser obtidas com as seguintes considerações nas equações dinâmicas básicas do motor:

(a) *Condições no instante imediatamente anterior à frenagem:*

- Corrente de campo

$$i_f(0^-) = I_{f0}$$

- Constante de tempo eletromecânica:

$$\tau_{em} = \frac{J_t r_a}{(G_{af} I_{f0})^2}$$

- *Velocidade do eixo:*

$$\omega_m(0^-) = \omega_{m0} - \frac{r_a}{(G_{af} I_{f0})^2} T_{em}$$

- *Corrente de armadura:*

$$i_a(0^-) = \frac{T_{em}}{G_{af} I_{f0}}$$

(b) *Condições no instante imediatamente após a retirada da tensão de armadura e a inserção de  $r_x$ :  $t = 0^+$*

- Corrente de armadura:

$$i_a(0^+) = -\frac{G_{af} I_{f0} \omega_m(0)}{r_t}$$

- Velocidade do eixo:

$$\omega_m(0^-) = \omega_m(0) = \omega_m 0^+$$

- Constante de tempo eletromecânica:

$$\tau'_{em} = \frac{J_t r_t}{(G_{af} I_{f0})^2}$$

(c) *Equação da corrente de armadura durante a frenagem:*

$$i_a(t) = -\frac{G_{af} I_{f0}}{r_t} \omega_m(t) \quad (5.14)$$

Ao substituir-se a corrente de armadura, dada pela Equação (5.14), na Equação (5.3), obtém-se, após alguns rearranjos, a *equação de movimento do motor*

$$\frac{d}{dt}\omega_m(t) + \frac{(G_{af}I_{f0})^2}{J_t r_t}\omega_m(t) + \frac{T_c}{J_t} = 0$$

cuja solução é

$$\omega_m(t) = \omega_m(0)\exp\left(\frac{-t}{\tau'_{em}}\right) - \underbrace{\frac{r_t T_c}{(G_{af}I_{f0})^2}}_{\Delta\omega_m(T)} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau'_{em}}\right)\right). \quad (5.15)$$

Como assinalado nesta equação, o valor de regime da queda de velocidade em relação à velocidade ideal a vazio, por causa do torque de carga  $T_c$  e com  $r_t = r_a + r_x$ , é designado  $\Delta\omega_m(\Delta T)$  e, se é substituído na Equação (5.15), resulta em uma forma mais sintética e mais apropriada, para a determinação do tempo  $t$  que o motor leva para atingir a velocidade  $\omega_m(t)$ :

$$\frac{\omega_m(0) + \Delta\omega_m(T)}{\omega_m(t) + \Delta\omega_m(T)} = \exp\left(\frac{t}{\tau'_{em}}\right).$$

Então, ao se empregar a definição de logaritmo nessa equação, tem-se

$$t = \tau'_{em} \ln \frac{\omega_m(0) + \Delta\omega_m(T)}{\omega_m(t) + \Delta\omega_m(T)}.$$

A partir desta expressão analisam-se os seguintes casos:

(a) *Caso 1*: tempo  $t_1$  que o motor, com carga, leva para atingir a velocidade  $\omega_m(t_1)$ :

$$t_1 = \tau'_{em} \ln \frac{\omega_m(0) + \Delta\omega_m(T)}{\omega_m(t_1) + \Delta\omega_m(T)}$$

(b) *Caso 2*: tempo de parada do motor com carga

$$t_p = \tau'_{em} \ln \frac{\omega_m(0) + \Delta\omega_m(T)}{\Delta\omega_m(T)}$$

A equação do transitório de corrente na frenagem dinâmica é obtida ao se combinar as Equações (5.14) e (5.15):

$$i_a(t) = i_a(0^-) + [i_a(0^+) - i_a(0^-)] \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right).$$

### Frenagem por inversão da tensão de armadura

Se o motor estiver em regime permanente antes do início da frenagem, as expressões da velocidade e da corrente podem ser obtidas com as seguintes considerações:

(a) *Condições anteriores à frenagem*:  $t = 0^-$

- *Corrente de armadura*

$$i_a(0^-) = \frac{T_c}{G_{af}I_{f0}}$$

- *Velocidade do eixo*

$$\omega_m(0^-) = \omega_{m0} - \underbrace{\frac{\Delta\omega_m(T)}{J_t r_a T_c / (G_{af}I_{f0})^2}}$$

(b) *Frenagem a partir da aplicação do degrau de tensão:  $t = 0^+$*

- *Corrente de armadura e velocidade do eixo no instante imediatamente após a inversão de tensão*

$$i_a(0^+) = -\left(\frac{V_{ta} + G_{af} I_{f0} \omega_m(0^+)}{r_t}\right).$$

$$\omega_m(0^-) = \omega_m(0) = \omega_m(0^+)$$

- *Equação da corrente de armadura durante a frenagem*

$$i_a(t) = -\left(\frac{V_{ta} + G_{af} I_{f0} \omega_m(t)}{r_t}\right) \quad (5.16)$$

- *Equação da velocidade* Ao substituir-se a corrente, dada no item anterior, na equação básica do movimento (5.3) tem-se que a velocidade é

$$\frac{d}{dt} \omega_m(t) + \frac{\omega_m(t)}{\tau_{em}} + \frac{1}{J_t} \left( T_c + \frac{G_{af} I_{f0}}{r_t} V_{ta} \right) = 0$$

cuja solução pode ser escrita na forma

$$\omega_m(t) = \omega_m(0) \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right) - \frac{\tau_{em}}{J_t} \left( T_c + \frac{G_{af} I_{f0}}{r_t} V_{ta} \right) \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right) \right] \quad (5.17)$$

Combinando-se as Equações (5.16) e (5.17) obtém-se a expressão da corrente

$$i_a(t) = i_a(0^+) - [i_a(0^+) + i_a(0^-)] \exp\left(\frac{-t}{\tau_{em}}\right).$$

### Frenagem regenerativa

Sempre que a tensão de velocidade é maior que a tensão terminal de armadura ( $E_a > V_{ta}$ ) ocorre a frenagem regenerativa, pois a corrente de armadura tem o seu sentido invertido e, conseqüentemente, o torque desenvolvido também é invertido.

A frenagem regenerativa pode ocorrer nos seguintes processos transitórios:

- (a) *Diminuição da tensão terminal de armadura*

Com o rotor girando e excitação constante, se a tensão de armadura é diminuída bruscamente de  $\Delta V_{ta}$ , tal que a nova tensão terminal seja menor que a tensão de velocidade  $E_a$ , nos primeiros instantes, por causa da inércia das partes girantes, a velocidade não se altera, a corrente de armadura é invertida e a máquina funcione como gerador, enquanto a condição

$$G_{af} I_{f0} \omega_m > V_{ta} - \Delta V_{ta}$$

for verdadeira.

- (b) *Aumento da corrente de excitação*

Com o rotor girando e tensão de armadura constante, aumenta-se a corrente de excitação; enquanto a velocidade não se altera, tem-se  $E_a > V_{ta}$  e a máquina opera no modo gerador.

- (c) *Aumento da velocidade do rotor*

É o caso, por exemplo, de um veículo, acionado por motor elétrico, desce um plano inclinado; o componente do peso (veículo mais a carga) na direção do movimento acelera o rotor, que pode alcançar velocidades superiores à velocidade ideal a vazio  $\omega_{m0}$ . As equações da frenagem regenerativa são obtidas ao se considerar que o torque de carga, que era resistente, torna-se motriz, e o torque desenvolvido, que era motriz, torna-se resistente.

### 5.3 Equações dinâmicas do motor com excitação série

Se a resistência e a indutância do circuito de armadura são, respectivamente,  $r_t = r_a + r_s$  e  $L_t = L_a + L_s$ , o modelo do motor com excitação série é dado por

$$\frac{d}{dt}i_a(t) + \frac{1}{\tau}i_a(t) + \frac{1}{L_t}G_{af}i_a(t)\omega_m(t) = \frac{V_{ta}}{L_t}$$

$$J\frac{d}{dt}\omega_m(t) = G_{af}i_a^2(t) - T_c.$$

Como se observa, o modelo do motor série é não linear por causa da presença em suas equações dos termos  $\omega_m(t) \cdot i_a(t)$  e  $i_a^2(t)$ .

### Exercícios

**5.1** Um motor de corrente contínua, excitação separada, 220 V,  $L_a = 0$  H,  $b_m = 0$ ,  $r_a = 0,5 \Omega$ ,  $G_{af}I_f = 2$  N · m/A, aciona uma carga de torque igual a

$$T_{carga} = 4\frac{d\omega_m(t)}{dt} + 6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

referido ao eixo de motor. Se a tensão de armadura for reduzida a 95% de seu valor nominal, calcular  $i_a(t)$  e  $\omega_m(t)$ , para corrente de excitação constante e reação de armadura nula. Considerar coeficiente de atrito viscoso desprezível.

**5.2** No resultado do exercício anterior, assuma  $t = 0$  no instante em que a tensão de armadura é diminuída e determine o sentido de circulação da corrente de armadura. Explique o resultado obtido.

**5.3** Um sistema Ward-Leonard consiste de um gerador CC acionado por um motor de indução. Na maioria dos casos considera-se que a velocidade do motor de indução é constante e, conseqüentemente, a tensão interna de armadura do gerador  $E_{ag}$  só pode ser alterada pela variação da sua tensão de excitação  $V_{fg}$ . Em operação, os terminais da armadura deste gerador CC são conectados aos terminais da armadura de um motor de excitação separada CC, que deve ter a sua velocidade  $\omega_m$  controlada pela variação da tensão aplicada à sua armadura. Se a variável de entrada é a tensão de campo do gerador  $V_{fg}$  e a de saída a velocidade do motor é  $\omega_m$ , obter a função de transferência  $G(s) = \omega_m/V_{fg}$ .

**5.4** Suponha que um motor de corrente contínua é alimentado por uma bateria, cuja tensão é  $V_{cc}$ , através de um recortador, como ilustrado na Figura 4.20(b). Suponha ainda que o sistema de acionamento tenha atingido o regime permanente, com a corrente de armadura variando entre  $I_{min}$  (valor mínimo) e  $I_{max}$  (valor máximo). Nessas condições, escreva a equação da corrente instantânea em função de  $I_{min}$ ,  $I_{max}$ ,  $V_{cc}$ ,  $E_a$ ,  $r_a$ ,  $L_a$  e o tempo  $t$ , nas seguintes condições:

(a) Bateria ligada aos terminais de armadura do motor durante o intervalo de tempo  $\Delta(t_a) = t_{lig}$

(b) Bateria desligada e terminais de armadura curto-circuitados durante o intervalo de tempo  $\Delta(t_{da}) = t_{deslig}$ .

Assumir que em  $t = 0$  a corrente tem o seu valor mínimo  $I_{min}$ , no final do intervalo de tempo  $\Delta(t_a) = t_{lig}$  ela assume o seu valor máximo  $I_{max}$  e no final do intervalo  $\Delta(t_{da}) = t_{deslig}$  retorna ao seu valor mínimo.

**5.5** Ignore a resistência de armadura e refaça o exercício anterior.

**5.6** Um motor de corrente contínua com excitação separada, cuja corrente de armadura nominal é 54 A, é alimentado por um recortador que utiliza uma bateria de 72 V; na partida, o recortador funciona no modo condução até atingir a corrente limite de  $2,5 I_n$  e, a partir desse ponto, passa a funcionar com frequência de chaveamento constante de 1 kHz. Suponha que a velocidade é nula até que o torque desenvolvido exceda o torque da carga. Determine:

(a) Depois de quanto tempo, a corrente atinge o seu valor limite?

- (b) A partir de que instante a carga passa a ser acelerada?
- (c) A velocidade e a tensão interna induzida, no instante em que a corrente de armadura alcança o seu valor limite
- (d) A corrente de armadura correspondente ao torque de carga
- (e) A velocidade final do eixo do motor e
- (f) O correspondente tempo que se leva para alcançar este valor de velocidade.

Dados da carga: torque é constante e igual a  $220 \text{ V}$ ,  $L_a = 0 \text{ H}$ ,  $b_m = 0$ ,  $r_a = 0,5 \Omega$ ,  $G_{af}I_f = 2 \text{ N} \cdot \text{m/A}$ ,  $J_t = 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**5.7** Servomotor é a denominação dada ao motor que realiza o controle de posição do rotor  $\theta_r$ , como são, por exemplo, os casos do controle do braço de robô ou da posição de antenas que rastreiam a posição de aviões. Geralmente, quando os motores são contínuos, o campo é constituído de ímãs permanentes e controle é feito pela tensão de armadura  $V_{ta}$ . Obter a função de transferência

$$G(s) = \theta_r(s)/V_{ta} .$$

**5.8** Uma carga puramente inercial (inércia  $J_c$ ) é subitamente acoplada diretamente ao eixo de um motor funcionando a vazio e na velocidade  $N \text{ rot/min}$ . Obtenha a expressão matemática da velocidade de eixo do motor em função do tempo.

**5.9** Os parâmetros de um motor de ímã permanente são dados na seguinte tabela:

$r_a$ [ $\Omega$ ]	$L_a$ [ $\text{mH}$ ]	$G_{af}I_f$ [ $\text{V/rad/s}$ ]	$J_m$ [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]	$b_m$ ( $\text{Hff}$ )
6,5	110	$1,40 \times 10^{-2}$	$1,12 \times 10^{-6}$	$6,0 \times 10^{-6}$

A velocidade e corrente da armadura com o motor a vazio são iguais a  $3.369 \text{ rot/min}$  e  $0,15 \text{ A}$  respectivamente. Se  $\Delta V_{ta} = 6 \text{ V}$ , determinar (a)  $i_a(t)$  e  $\omega_m(t)$  com o motor sem carga; (b)  $\Delta i_a(t)$  e  $\Delta \omega_m(t)$ , quando o motor passa a acionar uma carga de torque constante de  $3,50 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ . Obter as soluções analíticas e apresentar os resultados através de simulação digital.

**5.10** Os parâmetros de um servomotor são dados na seguinte tabela:

$r_a$ [ $\Omega$ ]	$L_a$ [ $\text{mH}$ ]	$G_{af}I_f$ [ $\text{V/rad/s}$ ]	$J_m$ [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]
045	2,1	0,20	$0,690 \times 10^{-3}$

Determine:

(a) a relação  $\tau_a/\tau_{em}$ , o fator de amortecimento  $\xi$ , a frequência natural  $\omega_n$ , a frequência amortecida  $\omega_d$ . Se ocorre uma variação abrupta na tensão terminal de armadura, determine (b) o instante  $t_p$  para o qual ocorre o máximo valor transitório de velocidade, o valor desta máxima velocidade e o tempo de acomodação  $t_s$ , quando se admite um erro de regime de 2% na velocidade.

**5.11** Se o servomotor do Exercício 5.10 opera sem carga e com tensão de armadura igual à  $10 \text{ V}$ , obter as curvas instantâneas da corrente de armadura e da velocidade, quando a tensão de armadura tem uma queda brusca de  $5 \text{ V}$ .

**5.12** Para os motores 1 e 2, (a) calcular os autovalores para a operação do motor com 100% do fluxo nominal e com 50% deste mesmo fluxo, assumindo que o torque de carga é independente da velocidade; (b) é dada a partida do motor aplicando-se a tensão nominal na armadura, a corrente de campo nominal previamente estabelecida. Calcular, então, (i) Os tempos  $t_p$  e  $t_r$  que o motor leva para atingir a máxima velocidade transitória e a de regime, respectivamente; (ii) Determinar as velocidades do item (i).

Motor 1	Motor 2
5 Hp, 240 V, 1.220 rot/min	200 Hp, 250 V, 600 rot/min
$r_a = 0,6 \Omega$ , $L_a = 0,012 \text{ H}$	$r_a = 0,6 \Omega$ , $L_a = 0,012 \text{ H}$
$r_f = 240 \Omega$ , $L_f = 120 \text{ H}$	$r_f = 240 \Omega$ , $L_f = 120 \text{ H}$
$G_{af}I_f = 54454 \text{ V/rad/s}$ , $J_m = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$G_{af}I_f = 54454 \text{ V/rad/s}$ , $J_m = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**5.13** Se o motor 1 está funcionando a vazio, com fluxo e tensão de armadura nos seus valores nominais, é conectada uma carga que exige torque nominal do motor. Nestas condições obter (a)  $\omega_m(t)$  e  $i_a(t)$ ; se após o motor ter atingido a sua velocidade de regime permanente, o torque de carga é diminuído para 50% do seu valor nominal, obter (b)  $\omega_m(t)$  e  $i_a(t)$ .



## Capítulo 6

# Produção de Campo Magnético Girante em Máquinas de Corrente Alternada

### 6.1 Introdução

Máquinas de indução e síncronas são conversores eletromecânicos rotativos de energia que têm o princípio de funcionamento na geração de campos girantes e, por esta razão, às vezes são denominadas *máquinas de campo girante*. A corrente e a tensão elétricas são alternadas nos enrolamentos do estator e do rotor nas máquinas de indução e, por sua vez, nas máquinas síncronas o estator é excitado em corrente alternada e o rotor em corrente contínua.

Enrolamentos polifásicos produzem forças magnetomotrizes girantes (fmms) em relação à estrutura física na qual está colocado e essas têm distribuição aproximadamente senoidal ao longo do entreferro; já os enrolamentos do tipo usado no rotor das máquinas síncronas duplamente excitadas produzem forças magnetomotrizes estacionárias em relação à estrutura física do rotor, pois são excitadas com corrente contínua, mas são girantes no espaço, por conta da rotação do rotor. O importante nesses dois tipos de conversores eletromecânicos de energia é que as ondas de fmm girantes são estacionárias entre si.

Procura-se projetar os enrolamentos das máquinas de campo girante para que produzam fluxo magnético com distribuição no espaço a mais próxima possível da forma senoidal, porque, assim, pode-se obter tensões praticamente senoidais no tempo. Para as máquinas de entreferro uniforme, os enrolamentos de estator e de rotor têm as suas bobinas convenientemente distribuídas em ranhuras; particularmente, no caso dos rotores de máquinas síncronas de pólos salientes, que são excitados por corrente contínua, o enrolamento é forçadamente concentrado e, por este fato, o comprimento do entreferro sob o pólo tem que ter variação senoidal.

#### Máquinas de indução

O enrolamento polifásico de estator ligado a uma fonte polifásica estabelece uma distribuição de campo magnético que gira, em relação a este enrolamento, com velocidade síncrona  $\omega_s$  que depende da frequência  $f_1$  da fonte polifásica e do número de pares de pólos  $p$  desse mesmo enrolamento. Essa distribuição de campo magnético, gerada pela onda de fmm do estator concatena o enrolamento do rotor, o que *induz tensões polifásicas* que estabelecem correntes polifásicas; estas correntes de rotor, por sua vez, produzem fmm e, portanto, estabelecem uma distribuição de fluxo magnético que interage com o fluxo do estator e, conseqüentemente, torques são desenvolvidos. A frequência elétrica das tensões induzidas e das correntes elétricas estabelecidas no rotor são determinadas pela velocidade relativa entre as velocidades  $\omega_s$  do campo síncrono e  $\omega_r$  do rotor, como analisado na seção (6.3.2). Por depender da indução de tensões no enrolamento do rotor, *a máquina de indução não funciona na velocidade síncrona*.

Diferentemente das máquinas de corrente contínua, as máquinas de indução não tem um enrolamento específico de campo; o seu estator tem a forma cilíndrica com ranhuras igualmente espaçadas entre si que acomodam as bobinas dos enrolamentos das fases, como ilustrado na Figura 6.1(a) para um enrolamento trifásico de camada simples. No que diz respeito ao rotor, dois tipos de enrolamentos são encontrados: o



*bobinado* no qual as espiras das bobinas estão distribuídos em ranhuras, à semelhança dos enrolamentos utilizados no estator, e o *gaiola de esquilo* que consiste de barras únicas, geralmente de alumínio, fundidas nas ranhuras do rotor, como ilustrados nas Figuras 6.1(b) e 6.1(c).

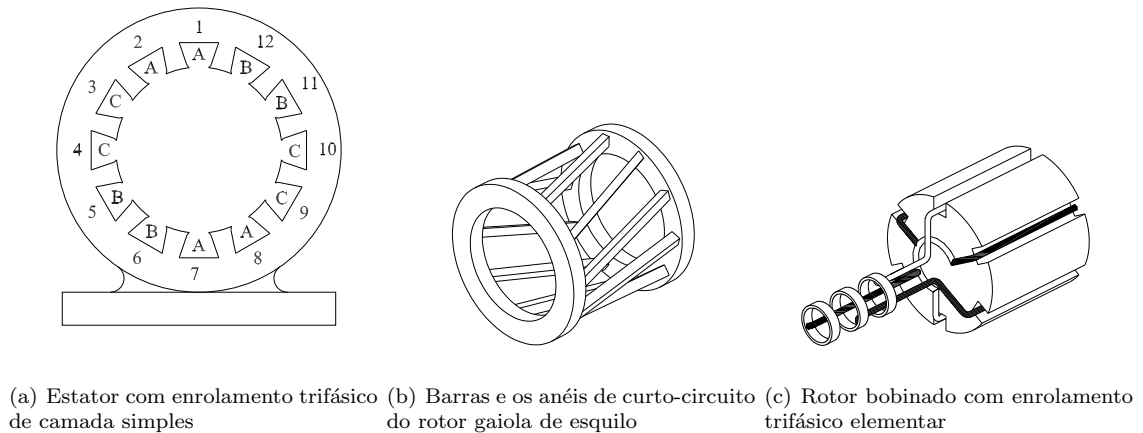


Figura 6.1: Geometria básica do estator e dos rotores das máquinas de indução.

No rotor de enrolamento do tipo bobinado, os seus terminais são ligados a anéis fixados no eixo que, em contato com escovas, permite o acesso externo ao enrolamento das fases e, desse modo, aos seus terminais podem ser conectados resistências elétricas e fontes de alimentação controladas, sendo que neste último caso a máquina de indução é dita ser *duplamente alimentada*.

O rotor em gaiola, por ter as barras permanentemente curto-circuitadas, não permite o seu acesso externo; o número de pólos é igual ao de estator, por causa do fenômeno da indução eletromagnética e o número de fases  $m_r$ , pode ser tomado, para efeitos práticos, igual ao número de barras e, portanto, igual ao número de ranhuras do rotor. As correntes em ranhuras adjacentes estão defasadas entre si de  $2\pi/m_r$  e cada fase tem  $1/2$  espira ou equivalentemente um condutor. Procura-se projetar o rotor com um número de ranhuras diferente do número de ranhuras de estator, para evitar o desenvolvimento de conjugado de relutância; além disso, as ranhuras são geralmente inclinadas de uma ranhura, em relação à direção axial, com o objetivo de enfraquecer as harmônicas espaciais de fmm causadas pela abertura das ranhuras e, dessa forma, diminuir o torque pulsante: com a inclinação das barras evita-se que o fluxo tenha caminhos definidos somente pelo dentes ou somente pelas ranhuras. Para minimizar as perdas elétricas do tipo  $ri^2$  nas barras da gaiola, nas máquinas de grande potência elas são preferencialmente de cobre.

## Máquinas síncronas

Enquanto os enrolamentos de estator das máquinas síncronas e de indução são idênticos, os seus rotores diferem entre si tanto na forma geométrica quanto no tipo de enrolamento. Enquanto o rotor da máquina de indução é cilíndrico com enrolamento polifásico, o rotor da máquina síncrona com bobinas de excitação pode ser de pólos lisos ou de pólos salientes: o primeiro é um enrolamento distribuído, enquanto o segundo é concentrado; geralmente, mas não obrigatoriamente, os ímãs do rotor são estabelecidos pela excitação em corrente contínua dos enrolamentos de rotor, a partir de uma fonte externa. Estes ímãs podem ser também estabelecidos por materiais de ímãs permanentes fixados na estrutura do rotor, em conseqüentemente, não há a necessidade da fonte externa de corrente contínua.

A distribuição de fluxo de rotor estabelecida por excitação contínua ou por ímãs permanentes é estacionária em relação ao rotor e, por este fato, a máquina síncrona só desenvolve torque, quando a velocidade de rotor é igual à síncrona, como analisado na seção (6.3.2).

Na Figura 6.2 estão ilustrados os tipos de rotor das máquinas síncronas. Observa-se que o entreferro é constante para o rotor de pólos lisos e variável para o de pólos salientes.

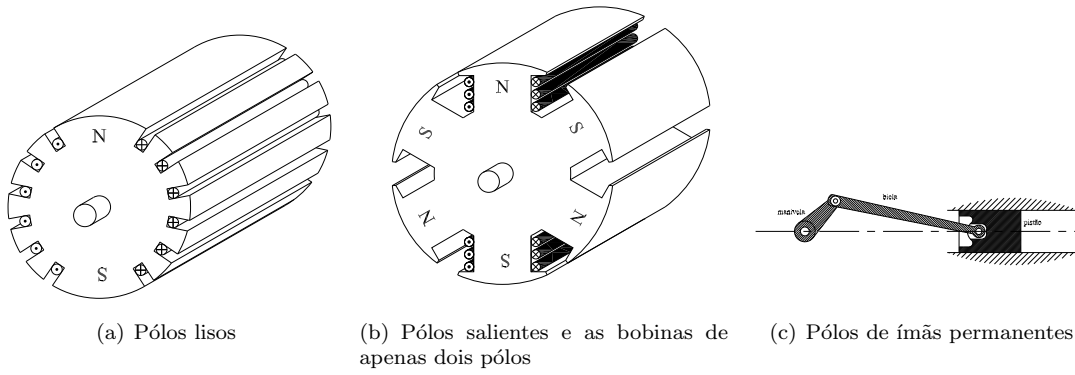


Figura 6.2: Geometria básica dos rotores de máquinas síncronas.

## 6.2 Campo magnético e força magnetomotriz gerados por excitação monofásica

A propriedade que uma fonte possui de magnetizar um meio qualquer é descrita pelo fasor intensidade de campo magnético  $\vec{H}$ . O emprego de correntes elétricas, que circulam em bobinas acomodadas em estruturas compostas de materiais magnéticos, se constitui na principal técnica de obtenção campos magnéticos intensos.

A relação entre a corrente elétrica e o correspondente *fasor campo magnético*  $\vec{H}$  em torno do condutor é dada pela lei de Ampère. Ela estabelece que para um percurso fechado  $C$ , a *circuitação do campo* é igual a soma algébrica das correntes que fluem através da superfície definida por este percurso. A soma algébrica das correntes é a força magnetomotriz  $fmm$  necessária para criar o campo magnético  $\vec{H}$  e, nos casos em que não há radiação eletromagnética, a expressão matemática dessa lei é dada por

$$fmm = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i \quad \text{Ampère espiras}$$

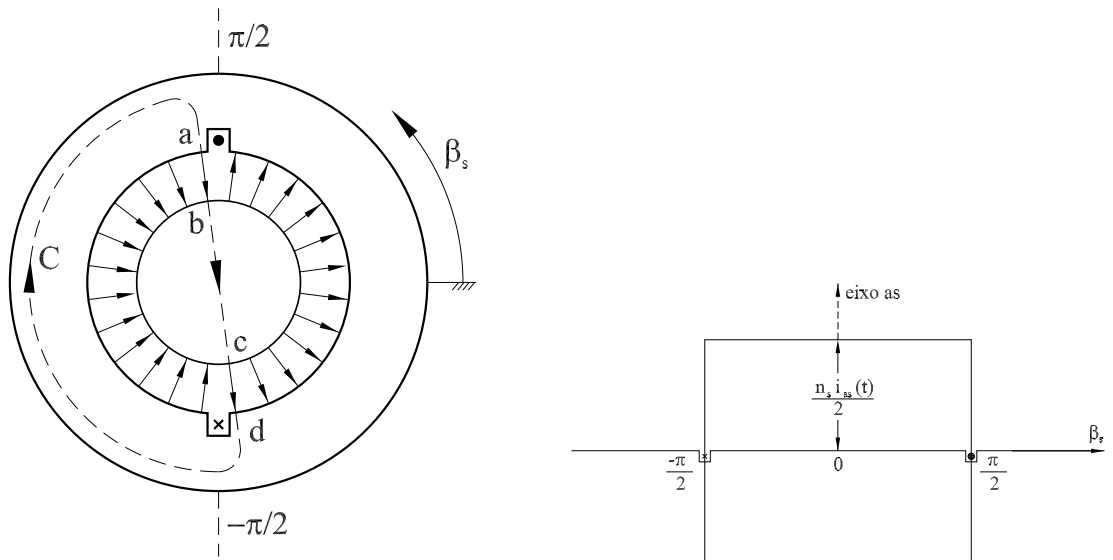
na qual  $d\vec{l}$  é o fasor comprimento tomado na direção da trajetória e o produto indicado na integral significa que se deve tomar o componente de  $\vec{H}$  na direção  $d\vec{l}$ .

Tome, como exemplo, o estator de uma máquina de indução de entreferro uniforme que aloja um enrolamento de uma única bobina, cujos lados estão deslocados entre si de  $\pi$  radianos elétricos – o equivalente ao ângulo coberto pelo pólo magnético, como ilustrada na Figura 6.3(a); por ter apenas uma bobina o enrolamento é denominado enrolamento concentrado e, pelo fato dos lados da bobina distanciarem de um passo polar, ela é denominada bobina de passo pleno; a bobina tem  $n_s$  espiras e é excitada pela corrente  $i_{as}(t)$ . As linhas de campo magnético que saem da superfície do estator definem o pólo norte do estator e, portanto, linhas que entram definem o pólo sul.

Para tomar vantagem da geometria e tornar fácil o cálculo da integral de linha, escolhe-se o percurso de integração  $C$  que no entreferro coincida com uma linha típica de campo, como mostrado na Figura 6.3(a); assume-se que a  $fmm$  é positiva, quando a linha de campo e a trajetória têm o mesmo sentido. Em geral o comprimento do entreferro é muito menor que o raio médio do entreferro e, portanto, as linhas de campo podem ser consideradas radiais e uniformes. Considera-se ainda que o campo magnético necessário para magnetizar o material magnético utilizado no estator e no rotor seja desprezível em relação ao exigido no entreferro, o que significa que os campos magnéticos nos segmentos de trajetória  $bc$  e  $da$  são nulos; assim, a força magnetomotriz total é

$$fmm = \int_a^b \vec{H}_g(t) \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{H}_g(t) \cdot d\vec{l} . \quad (6.1)$$

Ao se deslocar a trajetória de  $\beta_s = -\pi/2$  a  $\beta_s = \pi/2$  a corrente enlaçada é constante e positiva, porque as linhas de campo coincidem com a trajetória escolhida. Se o valor instantâneo do campo magnético no entreferro é  $H_g(t)$ , e o *comprimento efetivo do entreferro* é  $g$  – assim denominado porque considera o efeito



(a) Linhas de campo magnético no entreferro e uma trajetória para o cálculo da fmm

(b) fmm ao longo do entreferro

Figura 6.3: Linhas de campo magnético e fmm instantâneas produzidas no entreferro por excitação de uma única bobina.

das ranhuras de estator e do rotor –, obtém-se, a partir da Equação (6.1),

$$f_{mm} = H_g 2g = n_s i_{as}(t) \quad \text{Ampère espiras} . \quad (6.2)$$

Como a fmm total de estator é a corrente enlaçada pelo contorno fechado que compreende os dois entreferros, a força magnetomotriz  $f_{g,s}$  exigida para magnetizar cada entreferro ou equivalentemente a fmm por pólo é descrita por

$$f_{g,s} = \frac{f_{mm}}{2} = \frac{n_s i_{as}(t)}{2} \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} < \beta_s < \frac{\pi}{2}$$

$$f_{g,s} = -\frac{n_s i_{as}(t)}{2} \quad \text{para} \quad \frac{\pi}{2} < \beta_s < \frac{3\pi}{2} .$$

A distribuição de fmm em torno do entreferro, como mostrado na Figura 6.3(b), tem a forma retangular, cujo desenvolvimento em série trigonométrica de Fourier contém somente harmônicas ímpares em cosseno:

$$f_{g,s}(t, \beta_s) = \frac{4}{\pi} \frac{n_s}{2} i_{as}(t) \left[ \cos \beta_s - \frac{1}{3} \cos 3\beta_s + \frac{1}{5} \cos 5\beta_s \dots + \frac{1}{h} \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) \cos(h\beta_s) \right] \quad (6.3)$$

na qual  $h$  é a ordem da harmônica espacial.

### 6.2.1 Deslocamento da onda de força magnetomotriz

Embora a amplitude de fmm dependa dos valores instantâneos da corrente, qualquer ponto de sua distribuição espacial é fixo em relação à bobina que a produziu, o que equivale dizer que a onda de fmm associada a uma bobina do estator é estacionária no espaço. É comum referir-se a ela como uma onda pulsante para descrever o fato de sua amplitude pulsar na frequência  $f_1$  da corrente elétrica. A linha mediana entre os lados da bobina define o eixo magnético da bobina ou equivalentemente o eixo de simetria de distribuição da fmm; no enrolamento de uma única bobina, o eixo magnético da bobina está localizado em  $\beta_s = 0$  (Figura 6.3(b)).

Se a corrente na bobina é  $i_{as}(t) = I_s \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{i1})$ , de acordo com a Equação (6.3) a componente espacial fundamental de fmm é

$$f_{g,s}(t, \beta) = \frac{2}{\pi} n_s I_s \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{i1}) \cos \beta_s$$

e, ao se considerar a identidade trigonométrica

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

a distribuição fa fundamental de fmm passa a ser descrita por

$$f_{g,s}(t, \beta_s) = \underbrace{\frac{n_s I_s}{\pi} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{i1} - \beta_s)}_{f_{g,s}^+(t, \beta_s)} + \underbrace{\frac{n_s I_s}{\pi} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{i1} + \beta_s)}_{f_{g,s}^-(t, \beta_s)}. \quad (6.4)$$

A componente fundamental da onda estacionária de fmm é vista, então, como o resultado da soma de duas ondas senoidais girantes  $f_{g,s}^+(t, \beta_s)$  e  $f_{g,s}^-(t, \beta_s)$ , como assinalado na Equação (6.4): a componente  $f_{g,s}^+(t, \beta_s)$  gira no sentido anti-horário (sentido de  $\beta_s$  positivo) e a componente  $f_{g,s}^-(t, \beta_s)$  gira no sentido horário (sentido de  $\beta_s$  negativo); a amplitude de cada uma dessas ondas é igual à metade da amplitude da fundamental estacionária, ou seja,  $(n_s I_s / \pi)$ .

A *velocidade de deslocamento em relação à estrutura física do estator de cada uma dessas ondas de fmm é denominada de velocidade síncrona  $\omega_s$* . Considere o deslocamento do ponto máximo da onda  $f_{g,s}^+(t, \beta_s)$ , o que significa ter a seguinte condição na Equação (6.4):

$$\beta_s = \omega_1 t + \varphi_{i1}.$$

Para um intervalo de tempo correspondente a um ciclo da corrente elétrica, por exemplo, entre  $t_1 = 0$  e  $t_2 = T_1 = 1/f_1$ , tem-se

$$\beta(0) = \varphi_{i1} \quad e \quad \beta(T_1) = 2\pi + \varphi_{i1}$$

e, portanto, o deslocamento angular da onda correspondente é

$$\Delta\beta_s = 2\pi.$$

Conseqüentemente, a velocidade síncrona associada ao enrolamento de dois pólos é

$$\omega_s = \frac{\Delta\beta_s}{\Delta t} = 2\pi f_1 = \omega_1 \quad \text{radianos elétricos/segundo}.$$

Como o estator é de dois pólos, o ângulo elétrico é igual ao ângulo geométrico e, portanto, para o intervalo de tempo igual a um período da corrente, as ondas  $f_{g,s}^+(t, \beta_s)$  e  $f_{g,s}^-(t, \beta_s)$  completaram uma rotação em torno do entreferro, o correspondente a  $2\pi$  radianos geométricos.

Em vez de o enrolamento de um par de pólos, considere o enrolamento de dois pares de pólos formado por duas bobinas idênticas  $A$  e  $B$ , de passo pleno e ligadas em série, como ilustrado na Figura 6.4. A descrição matemática da distribuição espacial de fmm deve ser escrita em radianos elétricos, uma vez que se tem ao longo do entreferro dois comprimentos de onda; dessa forma, o ângulo geométrico  $\beta_s$ , expresso em radianos, é substituído pelo ângulo elétrico

$$\theta = 2\beta_s.$$

Note ainda na Figura 6.4(b) que as bobinas por serem de passo pleno tem os seus lados colocados em ranhuras deslocadas no espaço de  $\pi/2$  radianos, o que equivale a  $\pi$  radianos elétricos. Como a bobina  $B$  está ligada em série com a bobina  $A$ , ela gera uma distribuição retangular de fmm igual à da bobina  $A$ , mas deslocada no espaço do ângulo elétrico  $2\pi$  radianos elétricos, como ilustrado na Figura 6.4(c).

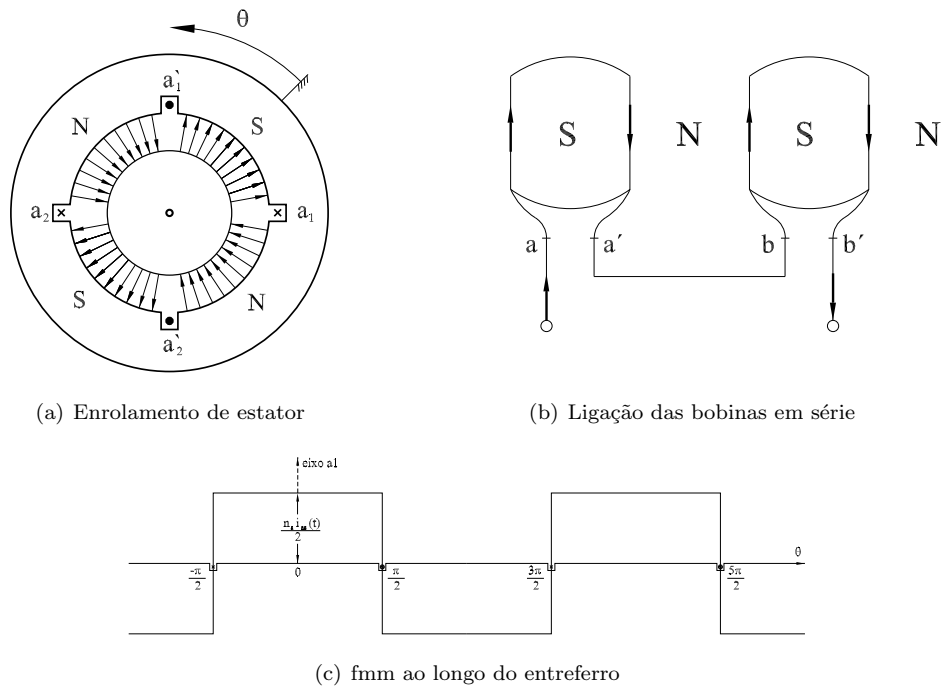


Figura 6.4: Enrolamento elementar de 4 pólos e duas bobinas de passo pleno.

A série trigonométrica de Fourier dessa distribuição retangular de fmm de quatro pólos tem só harmônicas espaciais ímpares e, de acordo com a Equação (6.3), sua expressão é

$$f_{g,s}(t, \theta) = \frac{2}{\pi} n_s i_{as}(t) \sum_{h=1,3,5,\dots} \frac{1}{h} \operatorname{sen}\left(h\frac{\pi}{2}\right) \cos(h\theta). \quad (6.5)$$

Ao se considerar apenas a componente fundamental desta distribuição espacial de fmm ( $h = 1$ ), as correspondentes expressões das ondas girantes são dadas por

$$f_{g,s}^+(t, \theta) = \frac{1}{\pi} n_s I_s [\cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - \theta)]$$

$$f_{g,s}^-(t, \theta) = \frac{1}{\pi} n_s I_s [\cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} + \theta)].$$

O deslocamento angular de cada uma dessas ondas de fmm do enrolamento de dois pares de pólos é calculada da mesma forma que foi calculada para o caso da bobina única de um par de pólos; no intervalo de tempo  $\Delta t = T_1 = 1/f_1$ , o deslocamento angular é

$$\Delta\theta = 2\pi \quad \text{radianos elétricos}$$

que corresponde a meia rotação, ou equivalentemente,  $\pi$  radianos geométricos; como se conclui, para o mesmo intervalo de tempo, a onda de quatro pólos tem um deslocamento angular geométrico que é a metade daquele da onda de dois pólos. A correspondente velocidade síncrona da onda de quatro pólos é

$$\omega_s = \omega_1 \quad \text{radianos elétricos por segundo}.$$

De forma alternativa, a velocidade dessa onda pode ser descrita em radianos por segundo, bastando para isso considerar o seu deslocamento em radianos geométricos

$$\Delta\beta_s = \Delta\theta/2 = \pi$$

e empregar a definição de velocidade, para obter

$$\omega_{sm} = \pi f_1 = \frac{\omega_1}{2} \quad \text{radianos geométricos/segundo .}$$

Ao se dobrar o número de pares de pólos, a velocidade da onda descrita em radianos elétricos se manteve, enquanto a velocidade da onda em radianos reduziu-se à metade: a corrente elétrica deve completar dois ciclos completos para que a onda de fmm complete uma rotação em torno do entreferro. É conveniente, então, generalizar a expressão da velocidade da onda de fmm, descrita em radianos geométricos, para o enrolamento de  $p/2$  pares de pólos:

$$\omega_{sm} = \frac{\Delta\theta/(p/2)}{\Delta t}$$

$$\omega_{sm} = \frac{\omega_1}{p/2} \quad \text{radianos geométricos/segundo .}$$

*Para o caso do enrolamento de  $p/2$  pares de pólos, a onda de fmm realiza uma rotação mecânica – deslocamento de  $2\pi$  radianos geométricos – quando a corrente elétrica completa  $p/2$  ciclos completos.*

## 6.3 Força magnetomotriz de enrolamentos polifásicos e multipolares

É evidente que não é uma boa solução concentrar as bobinas de enrolamentos em um único par de ranhuras, como visto na seção anterior; as ranhuras deveriam ser grandes para poderem acomodar as espiras das bobinas bem como as distribuições de fmm obtidas se afastariam muito da forma senoidal; estas restrições são eliminadas, se forme distribuídas as espiras do enrolamento em diversas ranhuras idênticas.

Como os enrolamentos do estator das máquinas de indução e síncronas convencionais de pólos lisos são do mesmo tipo, a análise que se segue para a fmm de estator é válida para estas duas máquinas.

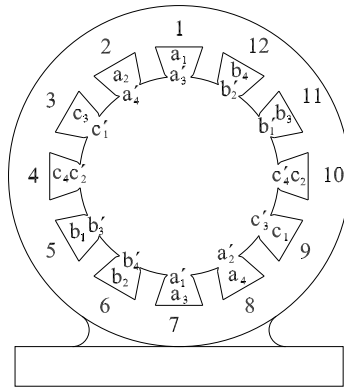
No que diz respeito ao rotor, as máquinas de indução sempre têm rotores cilíndricos, enquanto as síncronas podem ter o rotor cilíndrico (pólos lisos) ou saliente (pólos salientes). A corrente elétrica que circula nos condutores do rotor das máquinas de indução são correntes alternadas e nas síncronas são contínuas.

### 6.3.1 Estator

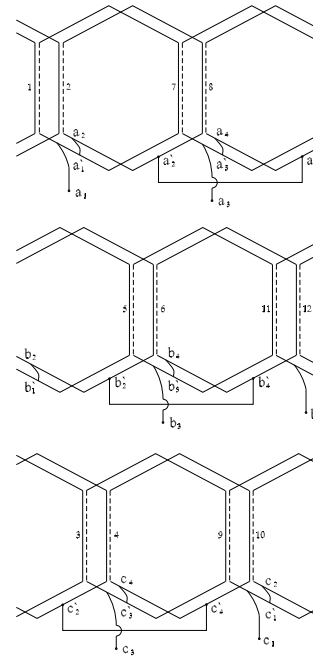
Considere, inicialmente, o enrolamento básico de estator de dois pólos, trifásico ( $m_s = 3$ ), constituído por bobinas em passo pleno e distribuídas em  $S_1 = 12$  ranhuras; considere ainda que cada ranhura aloje dois lados de bobinas diferentes: um lado na parte inferior e o outro na parte superior da ranhura; por ter dois lados de bobina por ranhura, o enrolamento é denominado enrolamento em dupla camada. Os enrolamentos das fases devem estar deslocados entre si de  $2\pi/3$  radianos elétricos e, dado que o ângulo entre ranhuras vizinhas é  $\alpha = 2\pi/12$  radianos elétricos, os enrolamentos distanciam-se o equivalente a 4 ranhuras, como ilustrado na Figura 6.5, na qual os enrolamentos das fases estão colocados separadamente com o objetivo de tornar mais fácil a visualização dos mesmos; a posição desses enrolamentos é convenientemente escolhida para que os eixos das respectivas fases estejam na sequência *abc* no sentido crescente dos ângulos positivos (sentido anti-horário) e observe que cada fase tem para cada pólo o conjunto de duas bobinas.

A distribuição instantânea de fmm produzida no entreferro por cada uma das fases está ilustrada na Figura 6.6(a), para o instante  $t_x$  em que a corrente na fase  $a_1$  é máxima ( $i_{as}(t_x) = I_s$ ) e  $i_{bs}(t_x) = i_{cs}(t_x) = (-\sqrt{3}/2)I_s$ ; como se observa, tem-se uma distribuição aproximadamente senoidal, podendo-se inferir que quanto maior o número de bobinas por conjunto pólo-fase mais a distribuição se aproximaria da senoidal. A distribuição de fmm foi obtida graficamente, a partir do seguinte procedimento:

- Associa-se, de forma arbitrária, o sentido de circulação das correntes nos enrolamentos das fases aos valores instantâneos das correntes. No caso sob análise, convencionou-se que, para valores instantâneos positivos de corrente, as correntes "entram" pelos terminais externos *as*, *bs* e *cs*.
- Determinam-se os "Ampère-condutores" de cada ranhura, ao se somar algebricamente as correntes das camadas superior e inferior, isto é,  $C_{sup}i_{sup}(t) + C_{inf}i_{inf}(t)$ , sendo  $C_{sup}$  e  $C_{inf}$  o número total de condutores das camadas superior e inferior, respectivamente. Em seguida, desenha-se uma barra



(a) Enrolamento de dupla camada

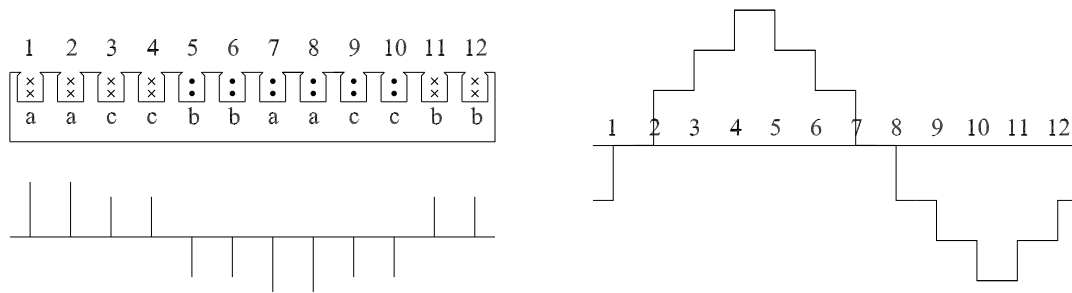


(b) Enrolamentos das fases

Figura 6.5: Estator trifásico de 12 ranhuras, 2 pólos e com bobinas de passo pleno.

vertical proporcional a essa soma, na linha da ranhura sob análise, adotando-se a convenção de que correntes positivas geram fmm's positivas. Para o exemplo sob análise, em cada ranhura  $C_{sup} = C_{inf}$  condutores e como a corrente nestes é a mesma, tem-se em cada uma das ranhuras com bobinas da fase  $a$  o total de  $C_{total}I_s$  "Ampère-condutores" e naquelas com bobinas das fases  $b$  e  $c$  tem-se  $\sqrt{3}(C_{total}/2)I_s$  "Ampère-condutores".

- (c) A distribuição de entreferro, gerada pela excitação simultânea dos enrolamentos das fases, é obtida incorporando-se, às trajetórias de passos crescentes, os  $C_{total}i(t)$  de todas as ranhuras, o que resulta na distribuição aproximadamente senoidal mostrada na Figura 6.6(b).



(a) Ampère-condutores das ranhuras

(b) Onda da fmm trifásica

Figura 6.6: Esboço idealizado da fmm do enrolamento trifásico-exemplo, no instante em que  $i_{as}(t) = I_{max}$ .

O conjunto de ranhuras por pólo-fase ou, equivalentemente, o número de bobinas por pólo-fase é a base dos enrolamentos de corrente alternada. O número de bobinas em série que cada fase tem para cada pólo –

o denominado número de bobinas do *conjunto pólo-fase* – é determinado por

$$q = \frac{S_1}{m_s p} \quad \text{bobinas/pólo-fase.}$$

No caso do enrolamento de dupla camada,  $q$  pode ser inteiro maior que a unidade ou um número fracionário, mas apenas o primeiro é introduzido neste texto <sup>1</sup>. Se o número total de espiras do conjunto é  $n_{conj}$ , cada bobina tem  $n_{bob} = n_{conj}/q$  espiras; para o enrolamento exemplo discutido nesta seção, tem-se  $q = 2$  bobinas de mesma forma e de mesmo número de espiras.

De acordo com o que foi analisado na seção anterior, a distribuição espacial de fmm de cada uma dessas bobinas tem a mesma forma retangular, a mesma amplitude e estão defasadas espacialmente entre si do *ângulo elétrico de ranhura*  $\alpha$ . A componente espacial da fundamental da série de Fourier de cada uma das fmm correspondentes às  $q$  bobinas é

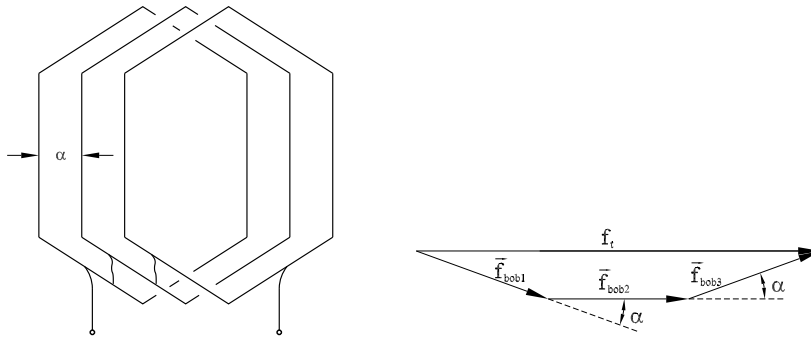
$$f_{bob}(t) = \frac{2}{\pi} \frac{n_{conj}}{q} i_{as}(t) \quad (6.6)$$

e a expansão em *série trigonométrica de Fourier da fmm de cada uma das  $q$  bobinas, que compõem o conjunto pólo-fase*, é expressa por

$$f_{bobq}(t, \theta) = f_{bob}(t) \sum_{h=1}^{3,5,\dots} \frac{1}{h} \text{sen}\left(h \frac{\pi}{2}\right) \cos h[(q-1)\alpha - \theta].$$

A distribuição resultante do conjunto pólo-fase é a soma no espaço das fmm das bobinas. Considere, inicialmente, apenas a harmônica fundamental de cada bobina do conjunto pólo-fase composto por três bobinas, como mostrado na Figura 6.7(a):

$$\begin{aligned} f_{bob1}(t, \theta) &= f_{bob}(t) \cos(-\theta) \\ f_{bob2}(t, \theta) &= f_{bob}(t) \cos(\alpha - \theta) \\ f_{bob3}(t, \theta) &= f_{bob}(t) \cos(2\alpha - \theta). \end{aligned}$$



(a) Conjunto pólo-fase de três bobinas:  $q = 3$

(b) Obtenção gráfica da fmm resultante

Figura 6.7: Fmm do conjunto pólo-fase.

Porque cada uma dessas ondas fundamentais de fmm têm variação senoidal no espaço, elas podem ser designadas no plano complexo, à semelhança dos fasores empregados para grandezas que variam senoidalmente no tempo. O número complexo que descreve cada uma dessas grandezas de variação senoidal no espaço

<sup>1</sup>Para maiores detalhes sobre enrolamentos de máquinas elétricas CA, consulte, por exemplo, KOSTENKO M. e PIOTROVSKY L. *Electrical Machines*, Mir Publisher, Vol. 2, 1977.



recebe o nome de *vetor espacial*<sup>2</sup>, cujo módulo é igual à amplitude da onda e a direção e o sentido definidos pelo eixo magnético da semi-onda positiva, como ilustrado na Figura ???. Assim, os vetores espaciais das fmm's das bobinas que compõem o conjunto pólo-fase em questão são descritos por

$$\bar{f}_{bob1} = f_{bob}(t)e^{j0}$$

$$\bar{f}_{bob2} = f_{bob}(t)e^{j\alpha}$$

$$\bar{f}_{bob3} = f_{bob}(t)e^{j2\alpha}.$$

Observe que o operador  $e^{j\alpha}$  expressa a defasagem espacial relativa entre as fmm's das bobinas do conjunto. A fmm resultante do conjunto pólo-fase é a soma desses vetores espaciais, como ilustrado graficamente na Figura 6.7(b); verifica-se que essa soma desses vetores é menor que a soma aritmética das fmm's e isto ocorre por causa da defasagem espacial existente entre elas.

No caso geral, o conjunto pólo-fase é constituído por  $q$  bobinas e o vetor da fundamental de cada uma dessas bobinas é descrito por

$$\bar{f}_{bobq} = f_{bob}(t)e^{j(q-1)\alpha}$$

e, conseqüentemente, a fmm total do conjunto é

$$\bar{F}_{conj} = f_{bob}(t) \left[ 1 + e^{j\alpha} + e^{j2\alpha} + \dots + e^{j(q-1)\alpha} \right].$$

Essa expressão designa uma progressão geométrica de razão  $e^{j\alpha}$ , cuja soma é

$$\bar{F}_{conj} = f_{bob}(t) \frac{1 - e^{jq\alpha}}{1 - e^{j\alpha}}$$

e o correspondente módulo é

$$F_{conj} = f_{bob}(t) \frac{\text{sen} \left( q \frac{\alpha}{2} \right)}{\text{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right)}. \quad (6.7)$$

Se todas as bobinas do conjunto estivessem concentradas em uma única bobina, a fmm resultante seria  $qf_{bob}$ . Define-se, então, que o quociente entre o valor da fmm resultante da soma vetorial e aquela da soma aritmética das fmm's individuais é o *fator de distribuição do enrolamento*  $K_d$ , dado por

$$K_d = \frac{\text{soma vetorial das fmm's}}{\text{soma aritmética das fmm's}} = \frac{\text{sen} \left( q \frac{\alpha}{2} \right)}{q \text{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Portanto, a expressão (6.7) torna-se

$$F_{conj} = K_d q f_{bob}(t).$$

Geralmente, com o objetivo de diminuir ou mesmo eliminar harmônicas espaciais de fmm, diminui-se o passo de distribuição das bobinas, como ilustrado na Figura 6.8, na qual o passo da bobina foi encurtado de uma ranhura (o equivalente a  $30^\circ$  elétricos), o que resulta no passo de 5 ranhuras (150 graus elétricos). Observe no enrolamento de bobinas de passo pleno que cada ranhura tem somente condutores da mesma fase e no de passo encurtado algumas ranhuras alojam condutores de fases diferentes. *Ao se encurtar o passo das bobinas de  $\delta$  radianos elétricos*, pode-se demonstrar que as amplitudes dos componentes da série de Fourier da distribuição retangular de fmm são multiplicadas pelo fator  $K_c$ , denominado *fator de encurtamento*:

$$K_c = \cos \frac{\delta}{2}.$$

---

<sup>2</sup>Às vezes, é encontrado também, na literatura relativa às máquinas elétricas, o termo *fator espacial* para designar essas grandezas.

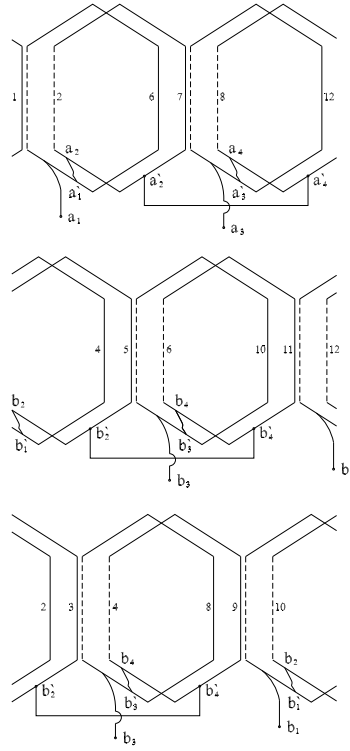


Figura 6.8: Enrolamento trifásico de 12 ranhuras, 2 pólos e passo encurtado de uma ranhura.

Tem-se, então, ao se distribuir as bobinas em ranhuras e encurtar o passo das mesmas, que as amplitudes das distribuição de fmm do conjunto pólo-fase são multiplicadas pelos fatores  $K_d$  e  $K_c$ . O produto desses dois fatores define o chamado *fator de enrolamento*

$$K_e = K_d K_c$$

e, então,

$$F_{\text{conj}} = K_e q f_{\text{bob}}(t). \quad (6.8)$$

Para o enrolamento de estator básico da Figura 6.8, o fator de enrolamento da fundamental é 0,933, o que significa que a distribuição da fundamental de fmm tem a redução de 6,7%, quando comparada com aquela de enrolamento concentrado.

Ao se combinar as expressões (6.6) e (6.8), obtém-se a *amplitude de fmm do conjunto pólo-fase*:

$$F_{\text{conj}} = \frac{2}{\pi} \underbrace{K_e n_{\text{conj}}}_{N_s} i_{\text{fase}}(t)$$

na qual a corrente  $i_{\text{fase}}(t)$  é a corrente instantânea da fase em questão. O produto do fator de enrolamento pelo número de espiras é o *número efetivo de espiras*  $N_s$  do conjunto pólo-fase.

Para o caso geral de enrolamentos simétricos trifásicos, distribuídos, de passo encurtado e excitados por correntes equilibradas, a partir do emprego da Equação (6.5) a *descrição matemática da distribuição de fmm por pólo de cada fase* é descrita por

$$f_{as}(t, \theta) = \frac{2}{\pi} N_s i_{as}(t) \cos \theta$$

$$f_{bs}(t, \theta) = \frac{2}{\pi} N_s i_{bs}(t) \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$$

$$f_{cs}(t, \theta) = \frac{2}{\pi} N_s i_{cs}(t) \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right)$$

nas quais  $\theta = (p/2)\beta_s$ . Se o sistema trifásico de correntes é equilibrado, o desenvolvimento dessas fm.ms. estacionárias em suas componentes girantes resulta em

$$\begin{aligned} f_{as}(t, \theta) &= \frac{1}{\pi} N_s I_s [\cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - \theta) + \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} + \theta)] \\ f_{bs}(t, \theta) &= \frac{1}{\pi} N_s I_s \left[ \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - \theta) + \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} + \theta - \frac{4\pi}{3}) \right] \\ f_{cs}(t, \theta) &= \frac{1}{\pi} N_s I_s \left[ \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - \theta) + \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} + \theta - \frac{2\pi}{3}) \right]. \end{aligned}$$

A fmm resultante do estator trifásico de  $p/2$  pares de pólos é determinada ao se somar as contribuições individuais das fases; como as componentes girantes no sentido horário formam três ondas de fmm deslocadas entre si de  $2\pi/3$  radianos elétricos, a sua soma é nula e, portanto, em qualquer posição  $\theta$  do entreferro e instante  $t$ , a fmm resultante é

$$f_{abcs}(t, \theta) = \frac{3}{\pi} N_s I_s \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - \theta).$$

Verifica-se, então, que a excitação do enrolamento trifásico simétrico de  $p/2$  pares de pólos por correntes trifásicas equilibradas e puramente senoidais gera uma *onda de fmm resultante de amplitude constante e girante, com velocidade  $\omega_1$  radianos elétricos por segundo no sentido positivo do ângulo  $\theta$*  – o nome dado a essa velocidade é *velocidade síncrona*. Equivalentemente, essa velocidade pode ser expressa em radianos geométricos por segundo, isto é,

$$\omega_{sm} = \frac{2\omega_1}{p} \quad \text{radianos/segundo}$$

ou ainda em rotações por minuto:

$$n_{sm} = \frac{120f_1}{p} \quad \text{rot/min.}$$

O número de fases não influencia a velocidade da onda resultante de fmm, mas altera a sua amplitude; não é difícil demonstrar que, no caso de  $m_s$  fases excitadas por correntes defasadas entre si de  $2\pi/m_s$ , a distribuição resultante de fmm torna-se

$$f_s(t, \theta) = \frac{m_s}{\pi} N_s I_s \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - \theta). \quad (6.9)$$

*O enrolamento de estator multipolar simétrico e multifásico equilibrado* têm as seguintes propriedades:

- (a) O enrolamento de  $p$  pólos, distribuído em  $2\pi$  radianos, gera  $p/2$  comprimentos de onda de fmm em  $2\pi$  radianos;
- (b) A distribuição resultante de fmm de estator é uma *onda que gira em torno do entreferro com amplitude constante*, cujo valor é  $F_1 = m_s/\pi N_s I_s$ .
- (c) O valor máximo de fmm ocorre em

$$\theta = \omega_1 t + \varphi_{i1}.$$

- (d) A velocidade com que esta onda se desloca, em relação à estrutura física do estator, é proporcional à frequência da corrente elétrica  $\omega_1$  e inversamente proporcional ao número de pólos  $p$ ;
- (e) A distribuição espacial de fmm resultante do enrolamento polifásico de  $p$  de pólos completa uma rotação em torno do entreferro ( $\Delta\beta_s = 2\pi$ ) após ter ocorrido  $p/2$  ciclos completos da corrente elétrica.

Na Equação (6.9) somente a distribuição espacial da fundamental é considerada. Em um passo polar da fundamental existem  $h$  passos polares das harmônicas e, isto significa que o ângulo  $\alpha$  corresponde a  $h\alpha$ , quando se trata das harmônicas da distribuição de fmm. Pode-se mostrar, então, que os fatores de distribuição e de encurtamento tornam-se, respectivamente,

$$K_{d,h} = \frac{\text{sen } q \frac{h\alpha}{2}}{q \text{sen } \frac{h\alpha}{2}} \quad (6.10)$$

$$K_{c,h} = \cos \frac{h\delta}{2}$$

e, portanto, o fator de encurtamento da harmônica de ordem  $h$  é

$$K_{e,h} = K_{d,h} K_{c,h} .$$

A correspondente onda de distribuição da fmm torna-se

$$f_s(t, h\theta) = \frac{m_s}{\pi} \frac{1}{h} K_{e,h} n_{conj} I_s \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - h\theta)$$

e, assim, a velocidade da onda espacial de fmm de ordem  $h$ , em relação à fundamental, é

$$\omega_{hs} = \frac{\omega_1}{h} .$$

### 6.3.2 Rotor

#### Máquinas de indução

Na análise de máquinas de indução é conveniente reduzir o enrolamento gaiola a um equivalente polifásico de mesmo número de fases e pólos do estator; assim, é admitido que a distribuição de fmm é gerada pela excitação de um enrolamento de  $m_r$  fases, de  $p$  pólos e excitados por correntes senoidais equilibradas. É esperado que a fundamental da fmm do rotor seja descrita por uma expressão semelhante àquela do estator, se for admitida a equivalência entre as barras do rotor e o enrolamento polifásico idealizado. Analogamente à Equação (6.9), se a frequência angular das correntes de rotor é  $\omega_2 = 2\pi f_2$ , a correspondente distribuição de fmm tomada ao longo do ângulo elétrico  $\theta_2 = (p/2)\beta_2$ , medido a partir do eixo magnético  $a_2$ , como mostrado na Figura 6.9, é dada por

$$f_r(t, \theta_2) = \underbrace{\frac{m_r}{\pi} N_r I_r}_{F_r} \cos(\omega_2 t + \varphi_{i2} - \theta_2) . \quad (6.11)$$

na qual  $I_r$  é a amplitude da corrente do rotor e  $\varphi_{i2}$ , a sua fase no instante  $t = 0$ , e  $N_r$  é o número efetivo de espiras por par de pólos e por fase do rotor equivalente, definido para a harmônica fundamental.

A onda de distribuição de fmm do rotor tem amplitude constante  $F_2$  e gira com velocidade angular  $\omega_2$  radianos elétricos por segundo em relação ao rotor ou, equivalentemente,  $\omega_{2m} = \omega_2/(p/2)$  radianos por segundo. Pelo fato do rotor girar, a posição da fmm do rotor em relação à referência tomada no eixo magnético estacionário da fase  $as$  é descrita por

$$\theta = \theta_2 + \theta_r \quad (6.12)$$

na qual  $\theta_r$  é a posição, expressa em ângulo elétrico, do eixo magnético  $ar$  em relação ao eixo  $as$ . Se  $\omega_r = (p/2)\omega_m$  radianos elétricos por segundo, em relação à estrutura física do estator, a equação horária do rotor é

$$\theta_r = \frac{p}{2} \omega_m t + \theta_{r0} \quad (6.13)$$

na qual  $\theta_{r0}$  é a posição do rotor em  $t = 0$ .

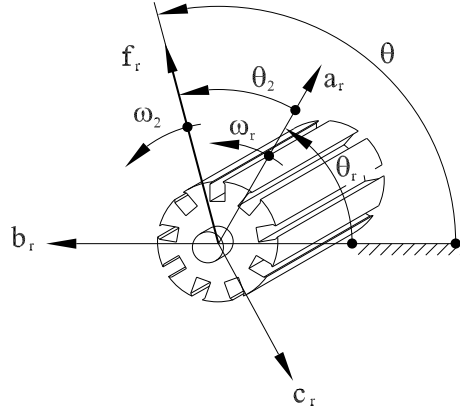


Figura 6.9: Ângulos espaciais elétricos da fmm de rotor em relação aos eixos magnéticos  $ar$  e  $as$ .

Ao se combinar as Equações (6.13) e (6.12) e explicitar  $\theta_2$ , tem-se

$$\theta_2 = \theta - \frac{p}{2}\omega_m t - \theta_{r0}$$

que substituída na Equação (6.11), resulta na onda de fmm de rotor, descrita no sistema de coordenada angular  $\theta$  do estator:

$$f_r(t, \theta) = F_r \cos \left[ \left( \frac{p}{2}\omega_m + \omega_2 \right) t + \theta_{r0} + \varphi_{i2} - \theta \right] . \quad (6.14)$$

A geração de torque útil em máquinas elétricas rotativas é obtida se a onda de fmm do estator tem a mesma velocidade da onda de fmm do rotor em relação a um sistema de referência comum, por exemplo, em relação ao sistema de referência fixado na estrutura física do estator. Assim sendo, a comparação dos termos referentes às velocidades das Equações (6.9) e (6.14) resulta na relação básica

$$\omega_1 = \omega_2 + \frac{p}{2}\omega_m \quad \text{radianos elétricos por segundo} . \quad (6.15)$$

A condição para que haja o desenvolvimento de torque útil e, portanto, conversão eletromecânica de energia, é dada pela Equação (6.15): a velocidade da onda de fmm resultante de rotor  $\omega_2$ , em relação à estrutura física do rotor, somada à velocidade  $\omega_r = (p/2)\omega_m$  dessa estrutura física, em relação ao referencial fixado no estator, é igual à velocidade da onda de fmm resultante de estator  $\omega_1$ . Então, *ao observador colocado no estator, a onda da fmm do rotor gira com velocidade  $\omega_1$  radianos elétricos por segundo, enquanto para aquele observador colocado no rotor esta mesma onda gira com velocidade  $\omega_2$  radianos elétricos por segundo.* A Equação (6.15) expressa em radianos torna-se

$$\frac{2}{p}\omega_1 = \frac{2}{p}\omega_2 + \omega_m \quad \text{radianos por segundo} .$$

ou, de forma alternativa,

$$\omega_{sm} = \omega_{2m} + \omega_m \quad \text{radianos por segundo}$$

na qual  $\omega_{sm} = 2/p\omega_1$  é a velocidade síncrona do campo e  $\omega_{2m} = 2/p\omega_2$  é a velocidade mecânica do campo do rotor em relação ao rotor.

Há tensões induzidas nas fases do rotor sempre que os valores das velocidades do rotor e da onda de fmm gerada pelas correntes das fases do estator sejam desiguais; é dito que o *rotor escorrega em relação à onda de fmm síncrona* e, dessa forma, define-se o *escorregamento* pela relação

$$s = \frac{\omega_1 - (p/2)\omega_m}{\omega_1}$$

ou equivalentemente

$$s = \frac{\omega_{sm} - \omega_m}{\omega_{sm}} .$$

A partir de definição do escorregamento tem-se a relação entre a frequência angular das tensões induzidas no rotor – denominada frequência de escorregamento – e a frequência elétrica da alimentação:

$$\omega_2 = s\omega_1 .$$

Vale lembrar que  $\omega_2$  designa a velocidade do campo do rotor em relação ao rotor bem como a frequência elétrica no enrolamento do rotor. Por depender diretamente do escorregamento é denominada, no primeiro caso *velocidade de escorregamento* e, no segundo, *frequência de escorregamento*.

Uma vez conhecida a frequência de alimentação  $\omega_1$ , a partir da Equação ((6.15)), obtêm-se as velocidades básicas de funcionamento das máquinas de campo girante, ao se analisar as combinações possíveis entre as frequências  $\omega_2$  e  $\omega_1$ . Se a seqüência de fases do estator é tal que a fmm de estator gire no sentido positivo de rotação (sentido anti-horário), têm-se, a partir da Equação (6.15), as seguintes situações típicas de desenvolvimento de torque:

(i) *Rotor parado*:  $\omega_m = 0 \Rightarrow s = 1$ .

Pelo fato do eixo estar parado, os circuitos elétricos do rotor enxergam o fluxo magnético, gerado pelos enrolamentos de estator, girando com velocidade síncrona e, pela lei da indução eletromagnética, a frequência da tensões induzidas no circuito do rotor é igual ao do estator – a máquina de indução parada pode ser considerada um *transformador de campo girante*:

$$\omega_1 = \omega_2 .$$

As ondas de fmm de estator e do rotor giram no mesmo sentido e com a mesma velocidade em torno do entreferro. Esta é a situação instantânea que se tem na partida do motor de indução, como ilustrado na 6.10(a).

(ii) *Rotor com velocidade subsíncrona e no mesmo sentido da onda de fmm do estator*:  $\omega_m < 2\omega_1/p \Rightarrow 0 < s < 1$ .

A onda de fmm de rotor, em relação à estrutura do rotor, gira no mesmo sentido da onda de fmm de estator e é, neste caso, sempre menor que  $\omega_1$ :

$$\omega_{2m} = \omega_{sm} - \omega_m > 0 .$$

Esta é a faixa de funcionamento usual da máquina de indução no modo motor, como ilustrado na 6.10(b).

(iii) *Rotor com velocidade síncrona e no mesmo sentido da onda de fmm do estator*:  $\omega_m = 2\omega_1/p \Rightarrow s = 0$ .

Pelo fato de o rotor girar na mesma velocidade da onda de fmm de estator não há a indução de tensão no circuito de rotor e, portanto não se tem correntes por efeito de indução. Se correntes são estabelecidas no rotor por fontes externas, elas devem ter frequência nula, ou seja, devem ser correntes contínuas:

$$\omega_2 = 0 .$$

Em vez de o rotor ter enrolamento e ser excitado por corrente contínua, pode-se fixar ímãs permanentes na sua estrutura física; em ambos os casos o fluxo magnético do rotor é estacionário em relação à estrutura física do rotor. Por funcionar somente na velocidade síncrona, a máquina é denominada máquina síncrona.

(iv) *Rotor com velocidade supersíncrona e no mesmo sentido da onda fmm do estator*:  $\omega_m > 2\omega_1/p \Rightarrow s < 0$ .

Pelo fato de a velocidade de rotor ser maior que a do campo girante de estator, tem-se

$$\omega_{2m} = \omega_{sm} - \omega_m < 0$$

e, desse modo, em relação à estrutura do rotor, a onda de fmm de rotor gira no sentido oposto ao da onda de fmm de estator – esta é a faixa usual de funcionamento da máquina de indução no modo gerador, como ilustrado na Figura 6.10(c).

(v) Rotor com velocidade oposta ao da onda de fmm do estator:  $\omega_m < 0 \Rightarrow 1 < s < 2$ .

Neste caso, para que as ondas de fmm de rotor e de estator sejam estacionárias entre si é necessário que

$$\omega_{2m} = \omega_{sm} + \omega_m > 0.$$

A onda de fmm de rotor gira no mesmo sentido da fmm de estator mas, diferentemente dos casos analisados anteriormente, a sua velocidade é maior que a velocidade da onda de fmm de estator – esta é faixa usual de funcionamento da máquina de indução no modo freio, como ilustrado na Figura 6.10(d).

Na Figura 6.10 estão ilustradas, para  $\omega_1$  no sentido horário – campo síncrono girando no sentido anti-horário –, as combinações típicas entre as velocidades dos campos magnéticos e a velocidade de eixo das máquinas de campo girante; observe que as velocidades estão expressas em radianos por segundo.

Convém generalizar a relação matemática entre as velocidades, ao se considerar também  $\omega_1$  no sentido horário, o que significa, em relação ao caso dela ser anti-horária, que o estator é alimentado com seqüência de fases invertida; assim sendo, a partir da Equação (6.15), tem-se

$$\omega_1 = \pm(\omega_2 \pm \frac{2}{p}\omega_m) \quad \text{radianos elétricos por segundo}$$

ou, equivalentemente,

$$\omega_{sm} = \pm(\omega_{2m} \pm \omega_m) \quad \text{radianos por segundo}.$$

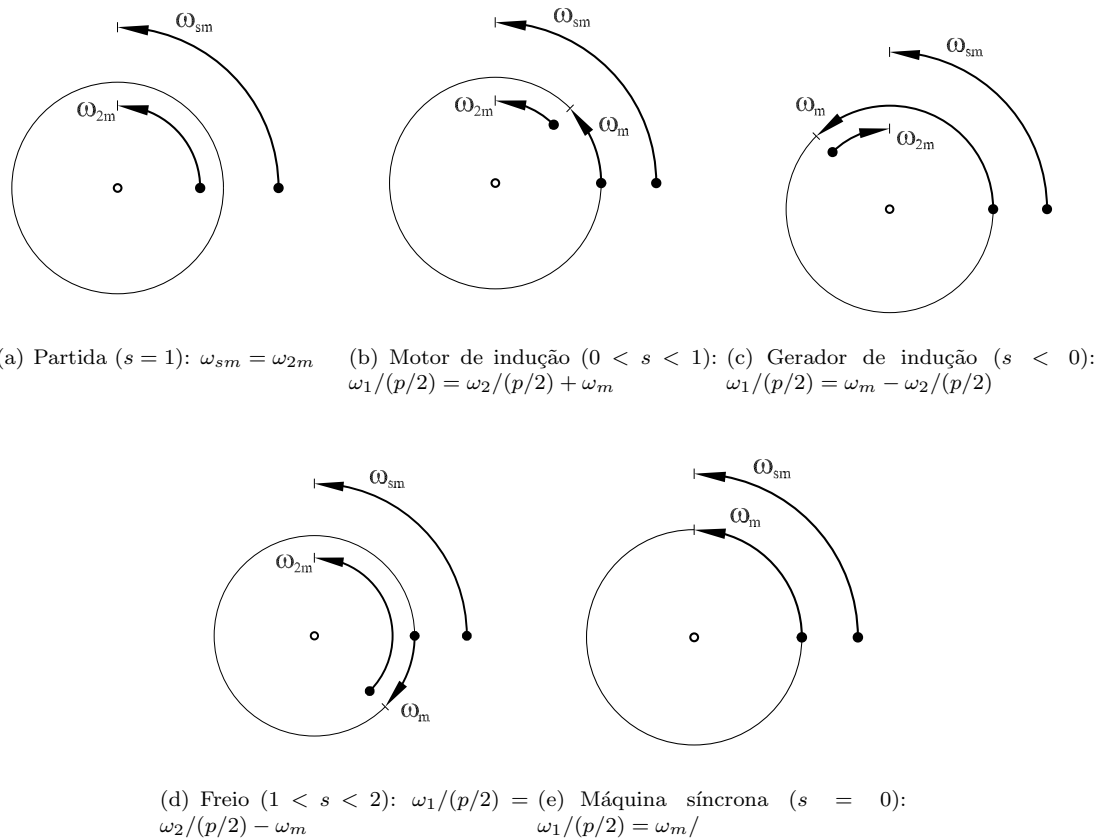


Figura 6.10: Ilustração gráfica da relação matemática entre as velocidades  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_m$ .

## 6.4 Fmm resultante de entreferro

Embora, até agora, tenha-se considerado as fmm's de estator e rotor separadamente, nas condições normais de funcionamento da máquina de corrente alternada o sistema magnético está sob o efeito combinado dessas fmm's. Assim sendo, ao se adicionar as distribuições espaciais de fmm de estator e de rotor, obtém-se a onda de fmm resultante de entreferro, também denominada *força magnetomotriz magnetizante*. Embora as fmm's sejam grandezas escalares, pelo fato de terem distribuição senoidal em  $\theta$  podem ser designadas por *vetores espaciais* – semelhante aos fasores para grandezas senoidais no tempo.

Os fasores espaciais das fm.ms. descritas pelas expressões (6.9) e (6.14) são, respectivamente, dados por

$$\overline{F}_s = F_s e^{j(\omega_1 t + \varphi_{i1})}$$

e

$$\overline{F}_r = F_r e^{j(\omega_1 t + \theta_{r,0} + \varphi_{i2})}$$

nas quais  $F_s$  e  $F_r$  são os valores de pico das fmm's de estator e de rotor. O correspondente vetor fmm magnetizante de entreferro  $\overline{F}_g$  é a soma desses vetores, isto é,

$$\overline{F}_g = \overline{F}_s + \overline{F}_r = F_m e^{j(\omega_1 t + \varphi_g)}$$

na qual  $\varphi_g$  é a posição espacial da fmm de entreferro.

### Máquinas síncronas

A denominação máquina síncrona vem do fato de que a rotação do rotor é sincronizada com a velocidade da onda de fmm de estator ( $p\omega_m = \omega_1$ ), como foi analisado anteriormente.

No enrolamento do rotor de pólos lisos (Figura 6.2(a)) os condutores são distribuídos em ranhuras que ocupam parcialmente a superfície do rotor, enquanto no de pólos salientes (Figura 6.2(b)) o enrolamento é concentrado nas peças polares. A corrente que circula nestes enrolamentos deve ser contínua ( $\omega_2 = 0$ ) e, conseqüentemente, a onda espacial de fmm associada é estacionária em relação ao rotor, como analisado anteriormente.

Pelo fato de existir nos rotores de pólos lisos uma região sem ranhuras, a distribuição de fmm de rotor pode ser aproximada por um trapézio, com degraus constantes, como ilustrado na Figura 6.11; por sua vez, a distribuição de fmm produzida pelo rotor de pólos salientes é retangular porque o enrolamento é concentrado, embora a distribuição da densidade de fluxo associada seja aproximadamente senoidal, por conta do entreferro sob o pólo variar senoidalmente na direção radial. Como analisado anteriormente, a intensidade de campo magnético  $H$  é inversamente proporcional ao comprimento do entreferro para uma dada fmm e, portanto, a intensidade da densidade de fluxo  $B = \mu_0 H$  ao longo dos pontos tomados na direção angular do entreferro também será. Na Figura 6.12(a) estão destacadas duas trajetórias diferentes para as quais a mesma fmm estabelece intensidades desiguais de campo magnético, isto é,  $H_0 > H_1$ .

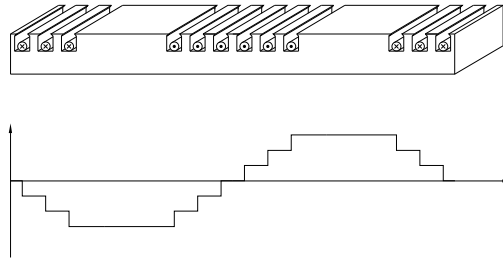


Figura 6.11: Esboço da distribuição de fmm de rotor de pólos lisos.

Os rotores salientes podem ser projetados com um enrolamento especial de barras feitas de cobre acomodadas em ranhuras da face polar. Estas barras são curto-circuitadas nas extremidades por um anel, como



ilustrado para um pólo na Figura 6.12(b), à semelhança do gaiola de esquilo dos rotores das máquinas de indução. A função precípua deste enrolamento é amortecer as oscilações do rotor no regime transitório e por esta razão é denominado de *enrolamento amortecedor* e se é projetado para ter resistência elétrica alta, há a geração de torque de partida, tal como ocorre para o motor de indução. Pode também ser utilizado para produzir torque de partida nos motores e, neste caso, a sua resistência elétrica deve ser alta, ao contrário do caso em que o enrolamento se destina somente a amortecer as oscilações do rotor. A relação entre o comprimento axial do núcleo de ferro e o diâmetro interno do estator é aproximadamente 6 nas máquinas de pólos lisos e de 1/6 a 1/5 nas de pólos salientes; enquanto os rotores de pólos lisos giram geralmente com velocidades típicas de 1.200 a 3.600 *rpm* (é o caso dos turbo-geradores), os de pólos salientes giram com velocidades baixas (número grande de pólos), como é o caso dos hidrogeradores, por exemplo, das da usina hidrelétrica de Itaipu: suas unidades geradoras de 60 *Hz* possuem 78 pólos e giram a 92,30 *rpm*.

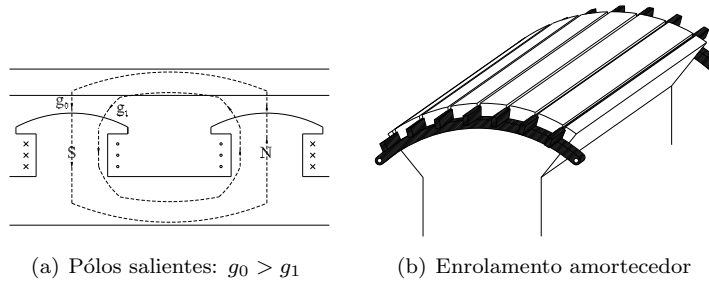


Figura 6.12: Pólos salientes e enrolamento amortecedor.

Como na excitação em corrente contínua tem-se  $f_2 = 0$ , ao se assumir  $m_r = 1$  e  $\varphi_{i2} = 0$ , a descrição da onda de distribuição de fmm, gerada pela excitação do enrolamento de rotor de pólos lisos, girando com velocidade  $(p/2)\omega_m$ , é obtida se a partir da Equação (6.14):

$$f_r(t, \theta) = \frac{1}{\pi} N_r I_r \cos\left(\frac{p}{2}\omega_m t - \theta_{r0} - \theta\right)$$

A velocidade com a qual esta onda se desloca no espaço é a do rotor  $(p/2)\omega_m$  radianos elétricos por segundo e a comparação com àquela da onda de fmm de estator (Equação (6.9)) resulta em

$$\omega_s = \omega_1 = \frac{p}{2}\omega_m \quad \text{radianos elétricos por segundo.}$$

Ao contrário do motor de indução, que só desenvolve torque nas velocidades diferentes de sua velocidade síncrona, o motor síncrono produz torque apenas na velocidade síncrona.

No caso das máquinas síncronas de pólos lisos ou salientes pode-se utilizar o mesmo procedimento adotado para as máquinas de indução, para mostrar que a fmm resultante de entreferro apresenta uma distribuição aproximadamente senoidal e se desloca com a velocidade síncrona, ao longo do entreferro.

## Exercícios

**6.1** Para o enrolamento de estator trifásico de 8 pólos, alimentado por uma fonte senoidal de 60 *hz*, calcule o deslocamento da onda de fmm de estator em um quarto de ciclo da corrente.

**6.2** Uma motor de indução rotor gaiola, estator com 8 pólos funciona com freqüência de estator igual a 50 *Hz* e rotor com velocidade de  $-600$  *rot/min*. Calcule a freqüência angular das correntes de rotor.

**6.3** Para o enrolamento elementar de duas bobinas e quatro pólos, apresentado na seção (6.2), como elas poderiam ser conectadas entre si de tal forma que resultem dois pólos?

**6.4** Esboce um enrolamento trifásico de passo completo, de 12 ranhuras e 4 pólos.

**6.5** Ondas de fmm distribuídas senoidalmente no espaço estabelecem fluxos magnéticos, também distribuído senoidalmente no espaço. Uma vez, que as ondas de fluxo magnético giram relativamente às bobinas de um estator trifásico, tensões são induzidas nestas bobinas. Estas tensões são defasadas entre si do ângulo espacial de ranhura  $\alpha$  e têm a mesma amplitude  $V_{bob}$ . Considerando um conjunto pólo-fase de  $q$  bobinas e tomando a tensão induzida na primeira bobina como referência, a tensão total do conjunto é

$$V_{conj} = V_{bob}[1 + e^{j\alpha} + e^{j2\alpha} + \dots + e^{j(q-1)\alpha}] .$$

Mostre que :

(a) A tensão resultante entre os terminais do conjunto pólo-fase de  $q$  bobinas é

$$V_{conj} = \frac{1 - e^{jq\alpha}}{1 - e^{j\alpha}} V_{bob} .$$

(b) O fator de distribuição das harmônicas de tensão de ordem  $n$  é dado pela expressão matemática (6.10).

**6.6** Calcule a redução, em relação à amplitude da fundamental da tensão, que ocorre nas harmônicas de ordem 3, 5, 7 e 9, de um enrolamento de passo completo em um estator de 48 ranhuras e 6 pólos, nos seguintes casos:

- (a) Estator monofásico
- (b) Estator bifásico
- (c) Estator trifásico

**6.7** Se nos três enrolamentos da questão anterior, a máquina tem as dimensões geométricas, mesmo material magnético e enrolamentos que suportam a mesma corrente nominal, em qual deles se tem a maior tensão induzida? Determine o quanto de potência o sistema trifásico pode ter em relação ao bifásico e em relação ao monofásico.

**6.8** Um estator trifásico, 2 pólos e 12 ranhuras tem enrolamento distribuído de camada simples e de passo igual a 150 graus elétricos. Determine os valores da 3<sup>a</sup>, 5<sup>a</sup> e 7<sup>a</sup> harmônicas da tensão induzida.

**6.9** Um motor de indução de 12 pólos, rotor gaiola de esquilo alimentado por uma fonte de 60 hz, tem seu eixo girando com velocidade de 620 rot/min. Calcular a frequência de escorregamento, nos modos de funcionamento gerador e freio, e indique o sentido de rotação da fmm do rotor em relação às estruturas físicas do rotor e do estator.

**6.10** Suponha que a máquina do exercício anterior é agora utilizado no modo gerador, conectado a um sistema que mantém constante a frequência e o módulo das tensões de terminal de seu estator. Se a turbina que o aciona tem velocidade de 610 rot/min, calcule a sua frequência de escorregamento e indique o sentido de rotação da fmm do rotor em relação às estruturas físicas do rotor e do estator.

**6.11** Uma máquina de indução, rotor bobinado, 4 pólos e 60 Hz deve funcionar na velocidade de 1.800 rot/min no modo motor. Responda:

- (a) Se é possível a máquina funcionar no modo desejado;
- (b) Se for possível, qual deve ser a frequência de rotor e como você viabilizaria o seu funcionamento? Ilustre graficamente as ligações das fontes de tensão aos circuitos da máquina?



# Capítulo 7

## Fluxo Magnético, Indutância e Resistência Elétrica de Enrolamentos

### 7.1 Introdução

Neste capítulo, são definidas a densidade de fluxo magnético  $\bar{B}$ , o fluxo magnético  $\phi$  e o fluxo concatenado  $\psi$ . Uma vez conhecidas essas grandezas magnéticas e as dimensões físicas do entreferro determinam-se as indutâncias relativas aos enrolamentos do estator e do rotor. É discutida a influência da frequência elétrica nos valores da resistência elétrica e indutância de dispersão, bem como o efeito da temperatura no valor da resistência elétrica..

O modelo matemático de uma máquina elétrica é composto de equações diferenciais cujos coeficientes são definidos pelos parâmetros elétricos e mecânicos tais como indutâncias, resistências elétricas, momento de inércia e coeficientes de atrito. Os valores das resistências elétricas dos enrolamentos dependem da temperatura e da frequência elétrica da corrente, enquanto as indutâncias são fortemente dependentes da saturação magnética, especialmente quando as ranhuras são fechadas. Esses parâmetros podem ser determinados a partir das dimensões e propriedades físicas dos materiais magnéticos e elétricos utilizados. Em geral, a despeito de alguns erros, prefere-se determinar os parâmetros através de testes experimentais, pois estes consideram os efeitos secundários geralmente não considerados na teoria.

### 7.2 Fluxo magnético

A propriedade de magnetizar um meio é expressa pelo fasor campo magnético  $\bar{H}$ , como apresentado no capítulo anterior. Os valores assumidos por este fasor é a f.m.m. por unidade de comprimento e, dependendo do meio, os efeitos desta magnetização são de magnitudes diferentes. É dito, então, que o campo magnético define uma densidade de fluxo magnético (fasor densidade de fluxo magnético  $\bar{B}$ ) que depende do meio e do valor de  $\bar{H}$  neste ponto. Essa propriedade, válida para qualquer ponto do meio, é expressa matematicamente por

$$\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H} \quad \frac{Wb}{m^2}$$

na qual  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo e  $\mu_r$  é a permeabilidade magnéticas relativa do meio em questão, respectivamente. Os materiais magnéticos exigem um baixo valor de campo magnético para a sua magnetização quando comparado com o ar e isto se traduz em um alto valor de permeabilidade magnética relativa  $\mu_r$  que, dependendo do grau de magnetização, pode ter o seu valor alterado, em consequência do fenômeno da saturação magnética. É conhecido que a conversão de energia mecânica e, portanto, o mecanismo de produção de força está associada à energia magnética armazenada e, sendo assim, tem-se o interesse em se obter valores elevados de densidade de fluxo, uma vez que o seu valor influencia diretamente a densidade de energia magnética armazenada por unidade de volume ( $W_{arm}/vol. = (BH)/2$ ).

O fluxo magnético  $\phi$  que atravessa uma área  $\bar{A}$  define a densidade de fluxo e é determinado através da

integral de superfície do componente normal da densidade de fluxo magnético  $\overline{B}$ :

$$\phi = \int_S \overline{B} \cdot d\overline{A}$$

na qual  $d\overline{A}$  é o elemento de área pela qual tem-se o fluxo. As linhas de fluxo magnético são linhas fechadas e no caso de  $\overline{B}$  ser uniforme e normal à superfície escolhida, essa expressão resume-se à

$$\phi = B.A \quad (7.1)$$

A distribuição espacial aproximadamente senoidal da f.m.m., produzida pela excitação dos enrolamentos das máquinas elétricas de campo girante, faz com que o fasor campo magnético  $\overline{H}$  apresente também uma distribuição espacial aproximadamente senoidal em  $\theta$ , pois o campo magnético é f.m.m por unidade de entreferro. Neste texto, a posição angular  $\theta$  é tomada a partir do eixo magnético da fase  $a$  e no sentido anti-horário. Considerando que a densidade de  $\overline{B}$  se relaciona com  $\overline{H}$  pela permeabilidade do meio, pode-se afirmar que  $\overline{B}$  tem a mesma natureza de  $\overline{H}$  e, portanto, ao campo magnético com distribuição senoidal é associada a distribuição também senoidal da densidade de fluxo.

Suponha uma máquina com estator trifásico simétrico,  $p$  pólos, rotor cilíndrico e alimentado por um sistema trifásico equilibrado. As densidades de fluxo produzidas pelos enrolamentos das fases  $as$ ,  $bs$  e  $cs$  no entreferro de permeabilidade  $\mu_0$  são

$$B_{g,as}(t, \theta) = \mu_0 H_{as}(t) \cos -\theta \quad (7.2)$$

$$B_{g,bs}(t, \theta) = \mu_0 H_{bs}(t) \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) \quad (7.3)$$

$$B_{g,cs}(t, \theta) = \mu_0 H_{cs}(t) \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right) \quad (7.4)$$

nas quais os valores instantâneos do campo magnético produzidos por correntes equilibradas circulando nos enrolamentos das fases  $as$ ,  $bs$  e  $cs$  de  $n_s$  efetivo de espiras por par de pólos são respectivamente

$$H_{as}(t) = \frac{N_s}{2g} I_s \underbrace{\cos(\omega_1 t + \varphi_{i1})}_{i_{as}(t)}$$

$$H_{bs}(t) = \frac{N_s}{2g} I_s \underbrace{\cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - \frac{2\pi}{3})}_{i_{bs}(t)}$$

$$H_{cs}(t) = \frac{N_s}{2g} I_s \underbrace{\cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - \frac{4\pi}{3})}_{i_{cs}(t)}$$

nas quais  $(N_s/2g)I_1$  é o valor de pico do campo magnético.

A correspondente onda de distribuição resultante da densidade de fluxo magnético por pólo no entreferro, devida à excitação simultânea dos enrolamentos das três fases de estator, é a soma espacial das densidades de fluxo das três fases, dadas respectivamente pelas Equações (7.2), (7.3), (7.4), o que resulta, após algumas simplificações, na expressão

$$B_{g,s}(t, \theta) = \frac{3}{2}\mu_0 \frac{N_s}{2g} \cos(\omega_1 t - \varphi_{i1} - \theta) .$$

Os valores de pico característicos por pólo da densidade de fluxo no entreferro nas máquinas de indução são limitados pela saturação magnética dos dentes, que geralmente estão na faixa  $1.4 - 1,9 T$ . Nas máquinas de indução monofásicas de pequena potência, os valores de pico da densidade de fluxo no entreferro estão na faixa  $0.35 - 0.55 T$ , enquanto que nas trifásicas estes valores situam-se na faixa  $0,7 - 0.9 T$ . Nas máquinas síncronas com pólos salientes e de grande potência, o valor típico da densidade de fluxo no entreferro é aproximadamente  $0,9 T$ , enquanto o comprimento do entreferro pode atingir dezenas de  $mm$ . Por sua vez,

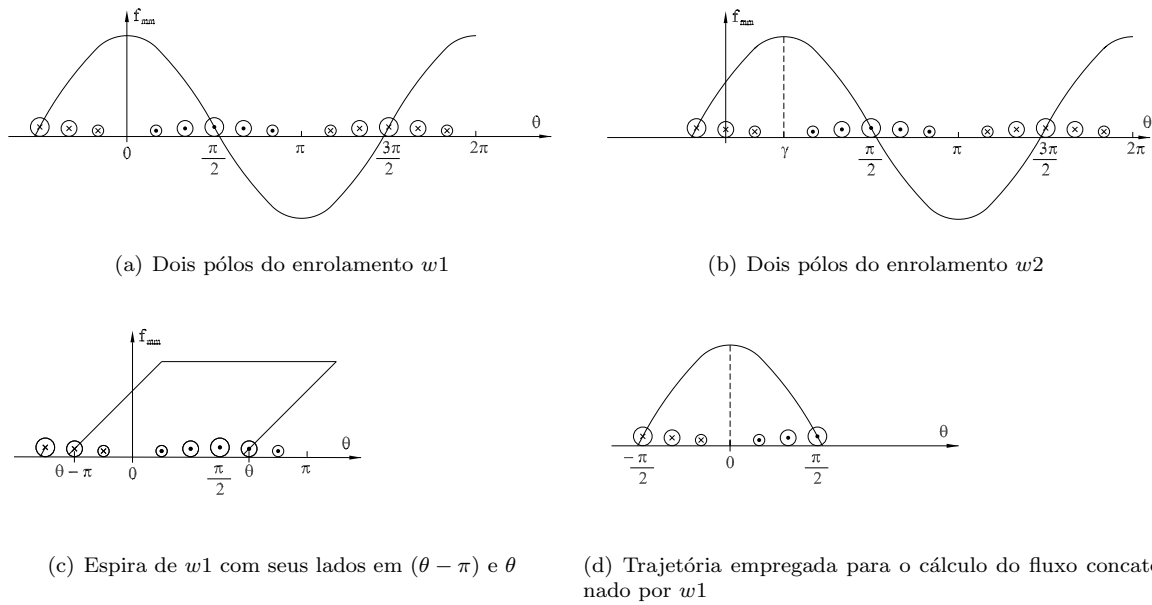


Figura 7.1: Enrolamentos  $w_1$  e  $w_2$  deslocados no espaço de  $\gamma$  radianos elétricos.

as máquinas síncronas de ímãs permanentes são projetadas para alcançarem valores de densidade de fluxo próximos aos obtidos nas máquinas de indução.<sup>1</sup>

Enrolamentos presentes em regiões nas quais se têm fluxo magnético são enlaçados pelas linhas desse fluxo, definindo-se o que é chamado de *fluxo enlaçado ou concatenado*  $\psi$  com o enrolamento.

Na determinação das indutâncias de enrolamentos é necessário conhecer os fluxos concatenados com os enrolamentos, pois indutância é o quociente entre o fluxo concatenado e a corrente elétrica. Suponha dois enrolamentos  $w_1$  e  $w_2$  de distribuição senoidal de condutores, de  $N_{w_1}$  e  $N_{w_2}$  espiras por par de pólos respectivamente – o que significa o total de  $(p/2)N_{w_1}$  e  $(p/2)N_{w_2}$  espiras –, e deslocados espacialmente entre si de  $\gamma$  radianos elétricos, conforme mostrados na Figura 7.1. Se for tomada uma pequena porção de cada um desses enrolamentos têm-se os seguintes elementos de condutores, escritos em função do ângulo elétrico  $\theta$ :

$$dC_{w_1} = \frac{p}{2} \frac{N_{w_1}}{2} \text{sen} \theta d\theta \quad (7.5)$$

$$dC_{w_2}(\theta) = \frac{p}{2} \frac{N_{w_2}}{2} \text{sen}(\gamma - \theta) d\theta .$$

Se somente o enrolamento  $w_1$  é excitado por uma corrente senoidal  $i_{w_1}(t)$ , estabelece-se a densidade de fluxo no entreferro  $B_{w_1}(t)$ , que de acordo com (7.2) é dada por

$$B_{w_1}(t) = \mu_0 H_{w_1}(t) \cos \theta \quad (7.6)$$

na qual  $H_{w_1}(t) = (N_{w_1}/2g)i_{w_1}(t)$ .

Se  $L$  é o comprimento axial do núcleo magnético,  $D$  o diâmetro interno do estator,  $d\beta = d\theta/p/2$  é o elemento de ângulo do pólo e as linhas de fluxo que atravessam o entreferro são radiais, o elemento de área do pólo é

$$dA_p = \frac{DL}{p} d\theta .$$

<sup>1</sup>SLEMON G.R., *Electrical Machines for Variable-Frequency Drives*, Special Issue on Power Electronics and Motion Control, Proceedings of IEEE, pg. 1130, august 1994.

que combinada às expressões (7.1) e (7.6) resulta no elemento diferencial de fluxo magnético do enrolamento  $w1$  gerado pela corrente  $i_{w1}$ , dado por

$$d\phi_{w1} = \mu_0 \frac{DL}{p} \frac{N_{w1}}{2g} i_{w1}(t) \cos \theta d\theta . \quad (7.7)$$

O *fluxo próprio concatenado com uma espira de passo completo* do enrolamento  $w1$ , com seus lados em  $(\theta - \pi)$  e  $\theta$ , é calculado pela integração de  $1 \cdot d\phi$ , isto é,

$$\begin{aligned} \psi_{espira\ w1} &= \int_{\theta-\pi}^{\theta} 1 \cdot \underbrace{\mu_0 \frac{DL}{p} \frac{N_{w1}}{2g} i_{w1}(t) \cos \theta' d\theta'}_{d\phi_{w1}} \\ \psi_{espira\ w1} &= \mu_0 \frac{DL}{p} \frac{N_{w1}}{g} i_{w1}(t) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Como o enrolamento  $w1$  possui distribuição senoidal de condutor sobre o passo polar, o fluxo concatenado com esse enrolamento, quando somente ele é excitado (*fluxo próprio do enrolamento  $w1$* ), é dado por

$$\psi_{w1,w1} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi_{espira\ w1} dC_{w1} . \quad (7.9)$$

que combinada às Equações (7.5) e (7.8) resulta no *fluxo magnético concatenado pelo enrolamento  $w1$  de estator de  $p$  pólos e  $N_{w1}$  espiras por pólo por fase*, dado por

$$\psi_{w1,w1} = \mu_0 \frac{\pi}{8} \frac{DL}{g} (N_{w1})^2 i_{w1}(t) .$$

O fluxo magnético concatenado pelo enrolamento  $w2$ , quando somente ele é excitado por uma corrente  $i_{w2}(t)$ , é determinado de maneira análoga ao do enrolamento  $w1$ ; sendo assim, tem-se

$$\psi_{w2,w2} = \mu_0 \frac{\pi}{8} \frac{DL}{g} (N_{w2})^2 i_{w2}(t) .$$

Na determinação do fluxo concatenado com  $w2$  quando somente o enrolamento  $w1$  é excitado, isto é, o *fluxo mútuo entre o enrolamento  $w2$  e  $w1$* , emprega-se um procedimento semelhante ao da obtenção de  $\psi_{w1,w1}$ . Determina-se primeiramente o fluxo concatenado por uma espira do enrolamento  $w2$ , cujos lados estão posicionados em  $(\theta - \gamma) - \pi$  e  $(\theta - \gamma)$ . Então, uma vez que o elemento de fluxo magnético produzido pelo enrolamento  $w1$ , em qualquer posição  $\theta$  do entreferro, é definido pela equação (7.7), tem-se

$$\psi_{espira\ w2} = \int_{(\gamma-\theta)-\pi}^{(\gamma-\theta)} 1 \cdot d\phi_{w1} = \mu_0 \frac{DL}{p} \frac{N_{w1}}{g} i_{w1}(t) \text{sen}(\gamma - \theta) .$$

Como a distribuição dos condutores do enrolamento  $w2$  é descrita pela Equação (7.9), o fluxo concatenado por  $w2$  devido a  $w1$  é calculado pela expressão <sup>2</sup>

$$\psi_{w2,w1} = \int_{\gamma-\pi/2}^{\gamma+\pi/2} \underbrace{\mu_0 \frac{DL}{p} \frac{N_{w1}}{g} i_{w1}(t) \text{sen}(\gamma' - \theta)}_{\psi_{espira\ w2}} \cdot \underbrace{\frac{p}{2} \frac{N_{w2}}{2} \text{sen}(\gamma' - \theta) d\theta}_{dC_{w2}}$$

que após as devidas simplificações e cálculo da integral obtém-se

$$\psi_{w2,w1} = \mu_0 \frac{\pi}{8} \frac{DL}{g} N_{w2} N_{w1} i_{w1}(t) \cos \gamma . \quad (7.10)$$

Por simetria, pode-se escrever

$$\psi_{w1,w2} = \mu_0 \frac{\pi}{8} \frac{DL}{g} N_{w2} N_{w1} i_{w2}(t) \cos \gamma .$$

<sup>2</sup>Lembre-se que  $\int \text{sen}^2 ax dx = x/2 - \text{sen}2ax/4a + C$ .

### 7.3 Indutâncias de enrolamentos

Considerando os dois enrolamentos  $w1$  e  $w2$ , estudados na seção anterior, são definidas as seguintes indutâncias:

- (a) *Indutância própria de um enrolamento* é o quociente entre o fluxo concatenado por este enrolamento quando somente ele é excitado. Portanto,

$$\begin{cases} L_{w1,w1} = \frac{\psi_{w1,w1}}{i_{w1}} \Big|_{i_{w2}=0} \\ L_{w2,w2} = \frac{\psi_{w2,w2}}{i_{w2}} \Big|_{i_{w1}=0} \end{cases} \quad (7.11)$$

- (b) *Indutância mútua entre os dois enrolamentos* é o quociente entre o fluxo concatenado por um desses enrolamentos quando somente o outro enrolamento é excitado. Portanto,

$$\begin{cases} L_{w1,w2} = \frac{\psi_{w1}}{i_{w2}} \Big|_{i_{w1}=0} \\ L_{w2,w1} = \frac{\psi_{w2}}{i_{w1}} \Big|_{i_{w2}=0} \end{cases} \quad (7.12)$$

#### Indutâncias das fases de estator

Seja o estator de uma máquina de indução trifásica de  $p$  pólos, com seus condutores distribuídos senoidalmente e com cada entreferro de comprimento efetivo constante  $g$ . A densidade de fluxo  $B_{m,as}$ , estabelecida pela f.m.m. da fase  $as$  que tem  $N_s$  espiras por par de pólos ao longo do entreferro – revise a Equação (7.6) – é

$$B_{g,as} = \mu_0 H_{as}(t) \cos \theta = \mu_0 \frac{N_{as}}{2g} i_{as}(t) \cos \theta$$

e, portanto, o emprego da definição de indutância própria, dada por (7.11), resulta em

$$L_{as,as} = \frac{\psi_{as,as}(t)}{i_{as}(t)} = \mu_0 \frac{\pi DL}{8g} (N_s)^2.$$

Em geral, as máquinas convencionais de indução podem ser consideradas simétricas e magneticamente lineares, e, conseqüentemente, os fluxos próprios concatenados por cada fase são determinados pela expressão (??), definindo dessa forma, valores iguais e constantes para as indutâncias, em função da geometria, da característica magnética do entreferro e do número de espiras da máquina. Essas indutâncias são determinadas a partir do fluxo de estator que atravessa o entreferro (concatenam os enrolamentos de estator e de rotor) e por esta razão são denominadas de *indutância de magnetização por fase de estator*. Adotando-se a denominação comum  $l_{ms}$  para cada uma das indutâncias de magnetização das três fases de estator, tem-se

$$l_{ms} = L_{as,as} = L_{bs,bs} = L_{cs,cs} = \mu_0 \frac{\pi DL}{8g} (N_s)^2. \quad (7.13)$$

Na realidade, nem todo fluxo produzido pelas correntes do estator atravessa o entreferro. A parcela do fluxo próprio que não concatena o rotor é denominado de fluxo de dispersão e a indutância associada a ele é denominada de indutância de dispersão  $L_{ls}$ . Portanto, a *indutância própria de cada fase do estator* torna-se

$$l_s = L_{ls} + l_{ms} \quad (\text{própria de estator}).$$

No cálculo da indutância mútua entre as fases  $bs$  e  $as$ , retome a Equação (7.10) e escolha  $\gamma = 2\pi/3$  radianos elétricos, pois este é o ângulo de defasagem entre os enrolamentos da fase  $bs$  e  $as$  da fase  $as$ . Então, o fluxo concatenado pelo enrolamento  $bs$ , devido à excitação do enrolamento  $as$ , é

$$\psi_{bs,as}(t) = -\mu_0 \frac{1}{16} \frac{DL}{g} N_s^2 i_{as}(t)$$



e a correspondente indutância mútua é dada por

$$L_{bs,as} = \frac{\psi_{bs,as}(t)}{i_{as}(t)} = -\frac{\mu_0 DL}{16g} N_s^2 ; \quad (7.14)$$

que combinada à Equação (7.13) resulta em

$$L_{bs,as} = -\frac{l_{ms}}{2} . \quad (7.15)$$

O sinal negativo na indutância mútua vem do fato dos eixos estarem defasados de um ângulo maior que  $\pi/2$  radianos elétricos, o que torna o fluxo concatenado por um enrolamento ser negativo, quando corrente positiva está presente no outro enrolamento. Fluxo negativo significa que o seu sentido é o oposto do sentido positivo convencional para o eixo magnético de seu enrolamento. Por razões de simetria, já mencionadas anteriormente, as outras indutâncias mútuas entre as fases do estator são dadas também pela expressão (7.15). Portanto, *as indutâncias mútuas entre as fases do estator* são todas dadas por

$$M_s = -\frac{l_{ms}}{2} \quad (\text{mútua entre as fases do estator}) .$$

### Indutâncias das fases de rotor

As indutâncias dos enrolamentos do rotor são determinadas por um procedimento análogo ao adotado na determinação das indutâncias do estator. Considerando o rotor trifásico de  $N_r$  *espiras efetivas* por par de pólos por fase, tem-se a *indutância de magnetização de cada fase de rotor*

$$l_{mr} = \mu_0 \frac{\pi DL}{8g} (N_r)^2$$

que escrita em função da indutância de magnetização de estator  $l_{ms}$  torna-se

$$l_{mr} = \left(\frac{N_r}{N_s}\right)^2 l_{ms}$$

Se for considerada a dispersão do fluxo de rotor, as indutâncias próprias das fases do rotor de  $N_r$  espiras são

$$l_r = l_{lr} + l_{mr} = l_{lr} + \left(\frac{N_r}{N_s}\right)^2 l_{ms} \quad (\text{própria do rotor})$$

para  $l_{lr}$  designando a dispersão do fluxo de rotor.

As indutâncias mútuas entre as fases do rotor  $M_r$  são

$$M_r = -\frac{l_{mr}}{2}$$

e que escritas em função da indutância de magnetização do estator  $l_{ms}$  tornam-se

$$M_r = -\frac{1}{2} \left(\frac{N_r}{N_s}\right)^2 l_{ms} \quad (\text{mútua entre as fases do rotor}) .$$

Dado que o eixo magnético da fase *ar* está deslocado espacialmente  $\theta_r$  radianos elétricos do eixo da fase *as*, a partir da expressão (7.14) têm-se *as indutâncias mútuas entre os enrolamentos do estator e do rotor*:

$$L_{as,ar} = L_{bs,br} = L_{cs,cr} = N_s N_r \mu_0 \frac{\pi DL}{8g} \cos \theta_r$$

$$L_{as,br} = L_{bs,cr} = L_{cs,ar} = N_s N_r \mu_0 \frac{\pi DL}{8g} \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3})$$

$$L_{as,cr} = L_{bs,ar} = L_{cs,br} = N_s N_r \mu_0 \frac{\pi DL}{8g} \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Estas indutâncias podem ser escritas em função da indutância de magnetização de cada fase de estator  $l_{ms}$ , bastando para isso multiplicar cada uma das expressões relativas a estas indutâncias por  $N_s/N_s$  e combinar à Equação (7.13). Têm-se, então, as mútuas entre as fases do estator e as fases de rotor dadas por

$$L_{as,ar} = L_{bs,br} = L_{cs,cr} = \frac{N_r}{N_s} l_{ms} \cos \theta_r$$

$$L_{as,br} = L_{bs,cr} = L_{cs,ar} = \frac{N_r}{N_s} l_{ms} \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$L_{as,cr} = L_{bs,ar} = L_{cs,br} = \frac{N_r}{N_s} l_{ms} \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Com se observa, as indutâncias mútuas entre os enrolamentos do estator e do rotor dependem da posição angular do rotor  $\theta_r$ . A notação matricial para estas indutâncias é preferida, pois ela permite a imediata leitura das diversas indutâncias da máquina de indução:

(a) *Matriz Indutância de estator:*

$$[\mathbf{L}_s] = \begin{bmatrix} L_{ls} + l_{ms} & -l_{ms}/2 & -l_{ms}/2 \\ -l_{ms}/2 & L_{ls} + l_{ms} & -l_{ms}/2 \\ -l_{ms}/2 & -l_{ms}/2 & L_{ls} + l_{ms} \end{bmatrix}$$

(a) *Matriz Indutância de rotor:*

$$[\mathbf{L}_r] = \left(\frac{N_r}{N_s}\right)^2 \begin{bmatrix} L_{lr} + l_{ms} & -l_{ms}/2 & -l_{ms}/2 \\ -l_{ms}/2 & L_{lr} + l_{ms} & -l_{ms}/2 \\ -l_{ms}/2 & -l_{ms}/2 & L_{lr} + l_{ms} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

com  $L_{lr} = (N_s/N_r)^2 l_{lr}$ .

(a) *Matriz Indutância Mútua estator-rotor:*

$$[\mathbf{L}_{sr}] = \frac{N_r}{N_s} l_{ms} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta_r & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta_r \end{bmatrix}$$

(a) *Matriz Indutância Mútua rotor-estator:*

$$[\mathbf{L}_{rs}] = \frac{N_r}{N_s} l_{ms} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta_r & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta_r \end{bmatrix}.$$

Note que  $[\mathbf{L}_{sr}] = [\mathbf{L}_{rs}]^T$ .

A partir das matrizes de indutâncias e considerando que o fluxo concatenado total com uma fase é a soma do seu próprio fluxo com aqueles gerados pelas outras fases (fluxos mútuos), obtém-se os *fluxos concatenados com cada uma das fases*, na forma matricial, como escritas na seqüência:

## Fluxo concatenado total com o estator

Cada uma das fases do estator concatena os fluxos gerados pelas correntes de estator bem como aqueles gerados pelas correntes de rotor. O fluxo concatenado total por cada fase de estator em notação matricial é

$$\begin{bmatrix} \psi_{as}(t) \\ \psi_{bs}(t) \\ \psi_{cs}(t) \end{bmatrix} = [\mathbf{L}_s] \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix} + [\mathbf{L}_{sr}] \begin{bmatrix} i_{ar}(t) \\ i_{br}(t) \\ i_{cr}(t) \end{bmatrix}. \quad (7.17)$$

É mais didático obter as expressões dos fluxos de forma separada: primeiro a contribuição das correntes de estator e depois as de rotor, para no final somá-las, conforme indicado em (7.17).

O fluxo concatenado pelo estator devido às correntes de estator são

$$\psi_{as,s}(t) = (L_{ls} + l_{ms})i_{as}(t) - \frac{l_{ms}}{2} [i_{bs}(t) + i_{cs}(t)] \quad (7.18)$$

$$\psi_{bs,s}(t) = (L_{ls} + l_{ms})i_{bs}(t) - \frac{l_{ms}}{2} [i_{as}(t) + i_{cs}(t)] \quad (7.19)$$

$$\psi_{cs,s}(t) = (L_{ls} + l_{ms})i_{cs}(t) - \frac{l_{ms}}{2} [i_{as}(t) + i_{bs}(t)]. \quad (7.20)$$

Considerando que as correntes trifásicas de estator satisfazem a condição

$$i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t) = 0$$

o que significa que uma dada corrente pode ser escrita em função das outras duas, obtêm-se, a partir da Equações (7.18), (7.19) e (7.20), os seguintes *fluxos concatenados por cada uma das fases do estator em função apenas de sua própria corrente*:

$$\psi_{as,s}(t) = L_s i_{as}(t) \quad (7.21)$$

$$\psi_{bs,s}(t) = L_s i_{bs}(t) \quad (7.22)$$

$$\psi_{cs,s}(t) = L_s i_{cs}(t) \quad (7.23)$$

nas quais

$$L_s = L_{ls} + L_m \quad (\text{própria do estator})$$

sendo

$$L_m = \frac{3}{2} l_{ms} \quad (\text{mútua trifásica})$$

a *indutância de magnetização trifásica associada ao fluxo de magnetização estabelecido no entreferro pelas três fases de estator* e que somada à indutância de dispersão resulta na *indutância própria do enrolamento de estator*, assim denominada porque está associada aos fluxos gerados e concatenados apenas pelo enrolamento de estator.

É usual escrever os modelos matemáticos das máquinas elétricas com as grandezas e parâmetros dos circuitos envolvidos referidos a um mesmo circuito. Essa técnica *consiste em substituir, por exemplo, o rotor trifásico de  $N_r$  espiras efetivas por par de pólos por fase por um trifásico equivalente tendo  $N_s$  espiras por par de pólos por fase*. As relações entre as correntes instantâneas do rotor original  $i_{ar}(t)$ ,  $i_{br}(t)$  e  $i_{cr}(t)$  com aquelas do equivalente  $i'_{ar}(t)$ ,  $i'_{br}(t)$  e  $i'_{cr}(t)$  tornam-se

$$i_{ar}(t) = \frac{N_s}{N_r} i'_{ar}(t) \quad (7.24)$$

$$i_{br}(t) = \frac{N_s}{N_r} i'_{br}(t) \quad (7.25)$$

$$i_{cr}(t) = \frac{N_s}{N_r} i'_{cr}(t). \quad (7.26)$$

Como expresso pela Equação (7.17), o fluxo concatenado pelo estator tem também a contribuição dos fluxos gerados pelas correntes do enrolamento de rotor. Para escrever estes fluxos escritos em função das correntes do rotor referidas ao estator, deve-se multiplicar a matriz  $[\mathbf{L}_{sr}]$  por  $N_s/N_r$  e substituir as correntes originais do rotor por aquelas equivalentes. Ao se recorrer, então, ao termo relativo ao fluxo mútuo na Equação (7.17) e realizar as substituições necessárias, têm-se os seguintes fluxos mútuos:

(a) Contribuição do enrolamento de rotor à fase as:

$$\psi_{as,r}(t) = l_{ms} \left[ i'_{ar}(t) \cos \theta_r + i'_{br}(t) \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) + i'_{cr}(t) \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (7.27)$$

(b) Contribuição do enrolamento de rotor à fase bs:

$$\psi_{bs,r}(t) = l_{ms} \left[ i'_{ar}(t) \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) + i'_{br}(t) \cos \theta_r + i'_{cr}(t) \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (7.28)$$

(c) Contribuição do enrolamento de rotor à fase cs:

$$\psi_{cs,r}(t) = l_{ms} \left[ i'_{ar}(t) \cos \left( \theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) + i'_{br}(t) \cos \left( \theta_r - \frac{2\pi}{3} \right) + i'_{cr} \cos \theta_r \right] \quad (7.29)$$

Pelo fato das indutâncias mútuas entre o estator e o rotor dependerem da posição espacial instantânea do rotor, os correspondentes fluxos mútuos também dependem.

### Fluxo concatenado total com o rotor

De maneira semelhante ao enrolamento de estator, o fluxo concatenado total de cada fase do enrolamento do rotor de  $N_r$  espiras por par de pólos por fase é descrito por

$$\begin{bmatrix} \lambda_{ar}(t) \\ \lambda_{br}(t) \\ \lambda_{cr}(t) \end{bmatrix} = [\mathbf{L}_{rs}] \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix} + [\mathbf{L}_r] \begin{bmatrix} i_{ar}(t) \\ i_{br}(t) \\ i_{cr}(t) \end{bmatrix}. \quad (7.30)$$

É conveniente, como comentado na obtenção do fluxo concatenado total pelo estator, referir as grandezas do rotor original a um rotor equivalente de mesmo número de espiras do estator. As correntes equivalentes são dadas por (7.24), (7.25) e (7.26), e os fluxos pelas seguintes relações

$$\psi'_{ar}(t) = \frac{N_s}{N_r} \lambda_{ar}(t)$$

$$\psi'_{br}(t) = \frac{N_s}{N_r} \lambda_{br}(t)$$

$$\psi'_{cr}(t) = \frac{N_s}{N_r} \lambda_{cr}(t).$$

Então, ao se retomar (7.30) e fazer as substituições necessárias, tem-se

$$\begin{bmatrix} \psi'_{ar}(t) \\ \psi'_{br}(t) \\ \psi'_{cr}(t) \end{bmatrix} = \frac{N_s}{N_r} [\mathbf{L}_{rs}] \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix} + \left( \frac{N_s}{N_r} \right)^2 [\mathbf{L}_r] \begin{bmatrix} i'_{ar}(t) \\ i'_{br}(t) \\ i'_{cr}(t) \end{bmatrix}. \quad (7.31)$$

Observe que os fluxos instantâneos das fases do rotor definidos no rotor de  $N_r$  espiras são designados pela letra  $\lambda$  (Equação (7.30)), enquanto os fluxos de rotor referidos ao estator são designados por  $\psi$  (Equação (7.31)).

A combinação conveniente das expressões (7.16) e (7.31), resulta nos fluxos concatenados por cada uma das fases do rotor devidos às correntes de rotor, dados pelas seguintes relações:

$$\psi'_{ar,r}(t) = [L_{lr} + l_{ms}] i'_{ar}(t) - \frac{l_{ms}}{2} [i'_{br}(t) + i'_{cr}(t)] \quad (7.32)$$

$$\psi'_{br,r}(t) = [L_{lr} + l_{ms}] i'_{br}(t) - \frac{l_{ms}}{2} [i'_{ar}(t) + i'_{cr}(t)] \quad (7.33)$$

$$\psi'_{cr,r}(t) = [L_{lr} + l_{ms}] i'_{cr}(t) - \frac{l_{ms}}{2} [i'_{ar}(t) + i'_{br}(t)] . \quad (7.34)$$

Assumindo que  $i_{ar}(t) + i_{br}(t) + i_{cr}(t) = 0$  e adotando o mesmo procedimento da obtenção do fluxo próprio de estator, estas três últimas expressões tornam-se

$$\psi'_{ar,r}(t) = L_r i'_{ar}(t)$$

$$\psi'_{br,r}(t) = L_r i'_{br}(t)$$

$$\psi'_{cr,r}(t) = L_r i'_{cr}(t)$$

nas quais

$$L_r = L_{lr} + L_m$$

é a indutância própria do enrolamento de rotor, referida ao estator e  $L_{lr}$  é a indutância de dispersão do rotor referida ao estator. Observe que as indutâncias próprias de estator e de rotor têm a indutância de magnetização  $L_m$  como elemento comum.

O fluxo concatenado por cada fase do rotor, devido às correntes de estator, é determinado ao se adotar um procedimento semelhante àquele da determinação do fluxo concatenado por cada fase do estator, o que resulta nas seguintes expressões:

(a) Contribuição do enrolamento de estator à fase ar:

$$\psi'_{ar,s}(t) = \frac{N_r}{N_s} l_{ms} \left[ i_{as}(t) \cos \theta_r + i_{bs}(t) \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) + i_{cs}(t) \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \right] \quad (7.35)$$

(b) Contribuição do enrolamento de estator à fase br:

$$\psi'_{br,s}(t) = \frac{N_r}{N_s} l_{ms} \left[ i_{as}(t) \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) + i_{bs}(t) \cos \theta_r + i_{cs}(t) \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \right] \quad (7.36)$$

(c) Contribuição do enrolamento de estator à fase cr:

$$\psi'_{cr,s}(t) = \frac{N_r}{N_s} l_{ms} \left[ i_{as}(t) \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) + i_{bs}(t) \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) + i_{cs}(t) \cos \theta_r \right] \quad (7.37)$$

## 7.4 Resistência elétrica de enrolamentos

A densidade da corrente contínua  $i$  que flui em um fio de comprimento de  $l$ , área da seção transversal  $A$  e resistividade  $\rho$  é

$$J = \frac{i}{A} = \frac{1}{\rho} E \quad A/m^2 \quad (7.38)$$

na qual  $E$  é o campo elétrico no fio. Supondo campo elétrico uniforme e material homogêneo e considerando a relação (7.38), a diferença de tensão elétrica entre os terminais do fio é

$$V = E \cdot l = \frac{i}{A} \rho l$$

que combinada à definição de resistência elétrica, dada pela *lei de Ohm* ( $R = V/I$ ), resulta na fórmula para o cálculo da resistência entre os terminais do condutor em função das dimensões e propriedade do material utilizado

$$R = \frac{V}{i} = \frac{\rho l}{A} \text{ ohm} .$$

A resistividade, e, portanto, a resistência, é função da temperatura. Geralmente, toma-se um valor de referência  $\rho_0$  na temperatura ambiente de  $T_0$  e escreve-se a resistividade  $\rho$  em função da temperatura  $T$ :

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (7.39)$$

com  $\alpha$  designando o coeficiente de temperatura da resistividade e medido em  $^{\circ}C^{-1}$ . A multiplicação da Equação (7.39) por  $l/A$  resulta na correspondente fórmula da resistência

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] .$$

Nos metais a elevação da temperatura torna maior o valor da resistividade e, portanto, da resistência. Pelo fato da condução térmica do alumínio ser menor que a do cobre, o valor da resistência de condutores de alumínio é mais fortemente dependente da temperatura do que a do cobre. Na temperatura de  $20^{\circ}C$  o cobre tem resistividade  $1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$  e o alumínio  $2,8 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ , embora tenham o mesmo o coeficiente de temperatura, cujo valor é  $\alpha = 3,9 \times 10^{-3} ^{\circ}C^{-1}$ . Na Figura 7.2 estão ilustradas a dependência típica da resistividade, com a temperatura *expressa em graus Kelvin*, de um metal, de um semicondutor e de um supercondutor.

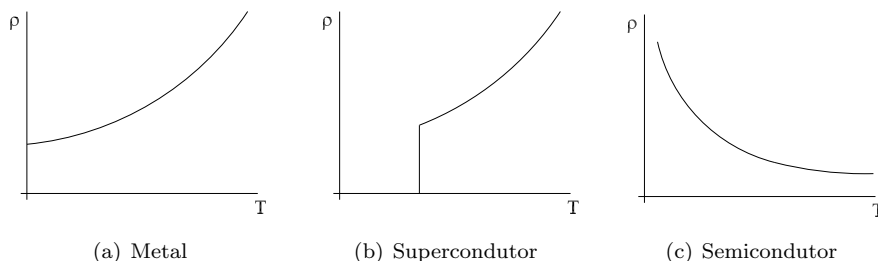


Figura 7.2: Resistividades de alguns materiais em função da temperatura em  $^{\circ}K$ .

Corrente alternada e a intensidade de campo elétrico correspondente têm distribuição não uniforme, tendendo a se concentrarem na superfície do condutor. O efeito desse fenômeno, denominado *efeito pelicular*, é significativo em máquinas de grande potência porque diminui a área efetiva do condutor em relação à sua área geométrica, o que aumenta o valor da resistência. A sua existência é muito utilizada como uma técnica para variar a resistência e a indutância das barras dos rotores gaiola de esquilo, com o objetivo de se obter desempenhos adequados na partida e no regime permanente das máquinas de indução.

Testes experimentais com corrente elétrica são preferidos na determinação da resistência. Aplica-se uma fonte contínua aos terminais do circuito em questão, deixando os demais abertos, e a resistência é o quociente entre a tensão aplicada e a corrente estabelecida. Se for aplicada tensão alternada, dever-se medir a corrente e potência ativa dissipada na bobina e a resistência elétrica é o resultado da potência ativa dividida pelo valor eficaz da corrente elevado quadrado. Se a bobina estiver alojada em uma estrutura que contém ferro, será necessário separar as perdas no ferro das perdas na resistência elétrica.

Um fato que deve ser destacado diz respeito à influência do ambiente na temperatura de funcionamento dos motores: como quanto maior a altitude, mais rarefeito e seco torna-se o ar, ocorre a diminuição da capacidade de trocar calor entre o ar e o motor, e, portanto, cuidados adicionais devem ser tomados em relação à ventilação do motor.



# Capítulo 8

## Máquina de Indução descrita por Vetores Espaciais

### 8.1 Introdução

Fasores são números complexos designativos de grandezas que variam senoidalmente no tempo, com, por exemplo, a tensão e a corrente de geradores elétricos. Enrolamentos de corrente alternada geram fmm's de *distribuição espacial aproximadamente senoidal* e, à semelhança das grandezas alternadas no tempo, essas fmm's podem ser representadas pelos chamados *fasores espaciais* ou, como é mais freqüentemente designado, por *vetores espaciais*. Contudo, prefere-se designar a onda de fmm pela onda de corrente elétrica equivalente e, assim sendo, origina-se o *vetor espacial corrente equivalente*. A onda de fluxo magnético e de sua correspondente onda de densidade, estabelecidas pela onda de fmm, também apresentam distribuição senoidal em torno do entreferro e, por esta razão, são também expressas por vetores espaciais. Ao vetor fluxo magnético corresponde o *vetor fluxo magnético concatenado*, grandeza geralmente empregada na modelagem das máquinas elétricas. Na definição destes vetores espaciais considera-se que a distribuição resultante de fmm esteja confinada ao plano perpendicular ao eixo de rotação da máquina e, assim sendo, se este plano é tomado como sendo o plano complexo, pode-se empregar o método dos números complexos a estes vetores.

As operações definidas para os números complexos aplicam-se também a esses vetores espaciais, facilitando e simplificando a obtenção dos modelos matemáticos das máquinas elétricas. É aceito estender o método dos vetores espaciais à análise de circuitos equivalentes de cargas, embora estas não tenham a propriedade de distribuição espacial de fmm.

Associando um plano complexo ao plano de rotação das ondas de força magnetomotriz do estator e do rotor, obtêm-se inicialmente os vetores espaciais representativos das fmm's, para em seguida obter os respectivos vetores da corrente, da tensão e do fluxo magnético. Uma vez definidos esses vetores espaciais, são obtidas as expressões da potência e do torque eletromagnético gerado.

Pelo fato dos enrolamentos do estator e do rotor estarem fixados em estruturas físicas que têm velocidades desiguais, deve-se adotar um sistema de referência comum ao estator e rotor, para que as equações básicas da máquina equivalente não sejam dependentes da posição espacial  $\theta_r$  do rotor.

Particularmente, neste texto, para melhor identificar os sistemas de referência nos quais os vetores são descritos, coordenadas diferentes são adotadas para cada um deles:

- (a) *Sistema de referência fixado no estator (sistema estacionário):* coordenadas  $\alpha\beta$ .
- (b) *Sistema de referência de velocidade  $\omega_r = p/2\omega_m$ :* coordenadas  $mn$ .
- (c) *Sistema de referência de velocidade genérica  $\omega_a$ :* coordenadas  $xy$ .
- (d) *Sistema de referência de velocidade síncrona  $\omega_1$ :* coordenadas  $dq$ .

### 8.2 O modelo no sistema de referência estacionário

Nesta seção, inicialmente, define-se o vetor força magnetomotriz do estator no sistema fixado no estator, para na seqüência derivar o correspondente vetor corrente do estator. O mesmo procedimento é adotado



na obtenção do vetor corrente de rotor, escrito inicialmente no sistema fixado no rotor, para finalmente escrevê-lo no sistema fixado no estator.

## 8.2.1 Vetores espaciais de forças magnetomotrizes e de correntes

### Estator

A distribuição de fmm produzida por cada uma das três fases do estator possui uma onda de distribuição senoidal estacionária no espaço e de amplitude proporcional ao valor instantâneo da corrente na respectiva fase. O valor máximo dessa distribuição de fmm ocorre sempre na mesma posição espacial angular do entreferro, definida por dois pontos defasados espacialmente entre si de  $2\pi$  radianos; à linha formada por estes dois pontos, associa-se o eixo magnético da fase em questão.

Cada uma das fases é designada por uma bobina equivalente, posicionada e concentrada no seu respectivo eixo magnético. Tomando o ângulo espacial elétrico  $\theta_s$  a partir da posição espacial do eixo magnético da fase  $as$  do estator, e considerando para efeito geral que a máquina possui  $p$  pólos, a fmm dessa fase assume o valor máximo positivo em  $\theta_s = 0$ , enquanto para as fases  $bs$  e  $cs$ , o valor máximo das respectivas fmm's ocorrem em  $\theta_s = 2\pi/3$  e  $\theta_s = 4\pi/3$  radianos elétricos, respectivamente. De acordo com o que foi analisado no capítulo anterior, as expressões das *fmm's por pólo por fase do estator*, para qualquer ponto do entreferro  $\theta_s$ , são

$$F_{as}(t, \theta_s) = \underbrace{\frac{N_s}{2} i_{as}(t)}_{f_{as}(t)} \cos(\theta_s) \quad (8.1)$$

$$F_{bs}(t, \theta_s) = \underbrace{\frac{N_s}{2} i_{bs}(t)}_{f_{bs}(t)} \cos(2\pi/3 - \theta_s) \quad (8.2)$$

$$F_{cs}(t, \theta_s) = \underbrace{\frac{N_s}{2} i_{cs}(t)}_{f_{cs}(t)} \cos(4\pi/3 - \theta_s) \quad (8.3)$$

nas quais  $N_s$  é o número efetivo de espiras em série por par de pólos do enrolamento de cada fase do estator e  $i_{as}(t)$ ,  $i_{bs}(t)$  e  $i_{cs}(t)$  são as correntes que fluem pelas correspondentes fases  $N_s$  espiras por pólo.

A distribuição resultante da fmm em cada pólo do entreferro é determinada por

$$F_{abc,s}(t) = F_{as}(t, \theta_s) + F_{bs}(t, \theta_s) + F_{cs}(t, \theta_s)$$

que, no caso de correntes trifásicas equilibradas, resulta na expressão

$$F_{abc,s}(t) = \frac{3}{2} \frac{N_s}{2} I_s \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - \theta_s) .$$

Como se constata, a onda de distribuição de fmm é função senoidal de  $\theta_s$ , tem amplitude constante igual a 3/2 da amplitude máxima de uma fase e gira na velocidade  $\omega_1$  radianos elétricos por segundo. Esta distribuição de fmm escrita na notação complexa torna-se

$$F_{abc,s}(t) = \frac{3}{2} \frac{N_s}{2} \mathcal{R}e [I_s e^{j\omega_1 t} e^{j\varphi_{i1}} e^{-j\theta_s}] .$$

Observe que a onda espacial de fmm é descrita por uma expressão semelhante àquela de grandezas que variam senoidalmente no tempo. Associa-se, então, o plano complexo ao plano do estator, como ilustrado na Figura 8.1, de tal forma que o eixo real do plano complexo coincida com o eixo magnético da fase  $as$ ; conseqüentemente, as fmm's do entreferro geradas pela excitação de cada fase do estator simétrico são descritas pelas seguintes expressões, escritas a partir do emprego das Equações (8.1), (8.2) e (8.3) :

$$F_{as}(t, \theta_s) = \frac{N_s}{2} \mathcal{R}e [i_{as}(t) e^{j0} e^{-j\theta_s}] \quad (8.4)$$

$$F_{bs}(t, \theta_s) = \frac{N_s}{2} \mathcal{R}e [i_{bs}(t) e^{j2\pi/3} e^{-j\theta_s}] \quad (8.5)$$

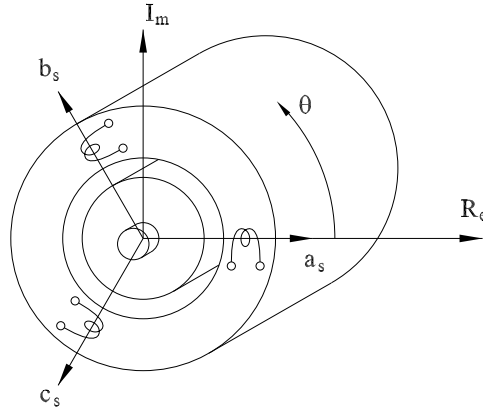


Figura 8.1: Eixos magnéticos do estator e o plano complexo.

$$F_{cs}(t, \theta_s) = \frac{N_s}{2} \text{Re} \left[ i_{cs}(t) e^{j4\pi/3} e^{-j\theta_s} \right]. \quad (8.6)$$

Lembre-se que a distribuição da fmm de cada fase tem seu eixo de simetria definido no eixo magnético de sua respectiva fase e que cada enrolamento de fase pode ser representado por um solenóide colocado no eixo magnético correspondente. Assim sendo, a análise das Equações (8.4), (8.5) e (8.6) indica que cada uma das fmm's é um vetor espacial estacionário de magnitude proporcional à corrente instantânea da respectiva fase e de direção espacial definida pela posição espacial dos eixos magnéticos da fase em questão:

- (a) Vetor espacial  $\bar{F}_{as}(t)$  de magnitude  $f_{as}(t)$  e que atua na direção do eixo magnético da fase  $as$ , localizado na posição  $\mathbf{e}^{j0}$  do plano complexo:

$$\bar{F}_{as}(t) = \frac{N_s}{2} i_{as}(t) e^{j0}.$$

- (b) Vetor espacial  $\bar{F}_{bs}(t)$  de magnitude  $f_{bs}(t)$  e que atua na direção do eixo magnético da fase  $bs$ , localizado na posição  $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{e}^{j2\pi/3}$  do plano complexo:

$$\bar{F}_{bs}(t) = \frac{N_s}{2} i_{bs}(t) e^{j2\pi/3}.$$

- (c) Vetor espacial  $\bar{F}_{cs}(t)$  de magnitude  $f_{cs}(t)$  e que atua na direção do eixo magnético da fase  $cs$ , localizado na posição  $\bar{\mathbf{a}}^2 = \mathbf{e}^{j4\pi/3}$  do plano complexo:

$$\bar{F}_{cs}(t) = \frac{N_s}{2} i_{cs}(t) e^{j4\pi/3}.$$

O vetor espacial da fmm resultante do estator por pólo é a soma dos vetores espaciais de cada fase, isto é,

$$\bar{F}_{\alpha\beta,s}(t) = f_{as}(t) e^{j0} + f_{bs}(t) e^{j2\pi/3} + f_{cs}(t) e^{j4\pi/3}$$

que resulta na expressão da distribuição de fmm por pólo

$$\bar{F}_{\alpha\beta,s}(t) = \frac{N_s}{2} [i_{as}(t) 1 + i_{bs}(t) e^{j2\pi/3} + i_{cs}(t) e^{j4\pi/3}].$$

Esta fmm é vista como sendo o resultado da combinação do efeito espacial de cada uma das correntes trifásicas; cada uma dessas correntes age nas respectivas bobinas equivalentes, conhecidas por solenóides localizadas nas posições do plano complexo definidas por  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{e}^{j2\pi/3}$  e  $\mathbf{e}^{j4\pi/3}$ .

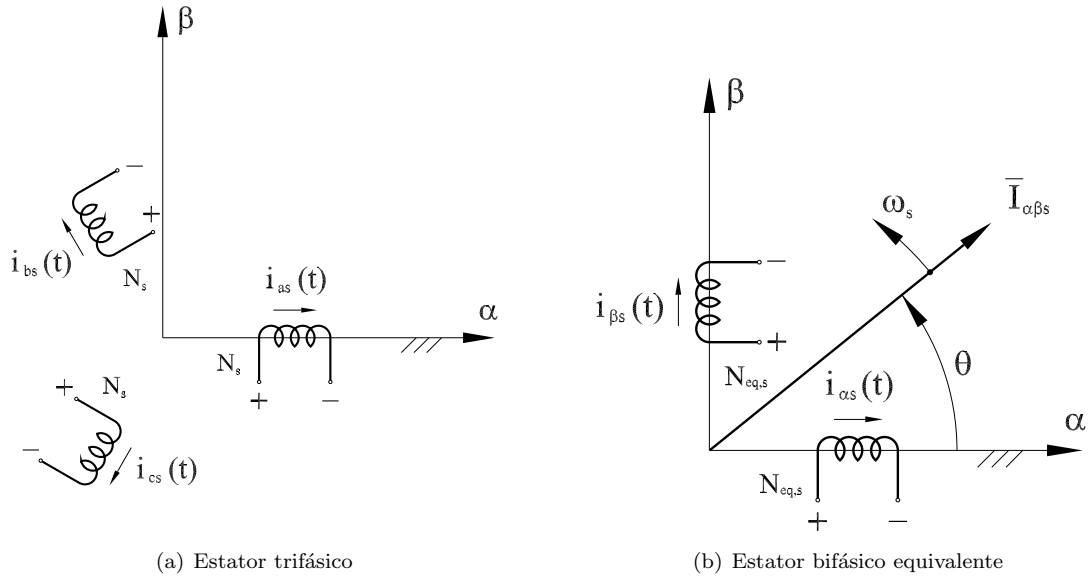


Figura 8.2: Estator trifásico e o seu equivalente bifásico.

O *vetor espacial das correntes do estator* é definido a partir da projeção da fmm de cada fase nos eixos ortogonais fictícios  $\alpha$  e  $\beta$ , o que significa supor a existência de duas bobinas posicionadas em cada um desses eixos – estabelece-se, então, um estator bifásico equivalente ao trifásico. Ao admitir-se que cada uma dessas bobinas equivalentes tem  $N_{eq,s}$  espiras efetivas por fase e são excitadas por correntes equivalentes em quadratura no tempo  $i_{\alpha s}(t)$  e  $i_{\beta s}(t)$ , como ilustrado na Figura 8.2, a projeção da fmm resultante nos eixos ortogonais resulta nas componentes

$$\frac{N_{eq,s}}{2} i_{\alpha s}(t) = \frac{N_s}{2} \left[ i_{as}(t) + i_{bs}(t) \cos \frac{2\pi}{3} + i_{cs}(t) \cos \frac{4\pi}{3} \right]$$

$$\frac{N_{eq,s}}{2} i_{\beta s}(t) = \frac{N_s}{2} \left[ i_{bs}(t) \sin \frac{2\pi}{3} + i_{cs}(t) \sin \frac{4\pi}{3} \right]$$

que, após algumas simplificações, resultam nas correntes do bifásico fictício

$$i_{\alpha s}(t) = k \left[ i_{as}(t) + i_{bs}(t) \cos \frac{2\pi}{3} + i_{cs}(t) \cos \frac{4\pi}{3} \right]$$

$$i_{\beta s}(t) = k \left[ i_{bs}(t) \sin \frac{2\pi}{3} + i_{cs}(t) \sin \frac{4\pi}{3} \right]$$

nas quais

$$k = \frac{N_s}{N_{eq,s}} \quad (8.7)$$

isto é, é a relação entre as espiras do trifásico e bifásico. Portanto, o vetor corrente do estator é definido por

$$\bar{I}_{\alpha\beta,s}(t) = i_{\alpha s} + j i_{\beta s} = k \left[ i_{as}(t) + i_{bs}(t) e^{j2\pi/3} + i_{cs}(t) e^{j4\pi/3} \right]. \quad (8.8)$$

Para que a transformação inversa exista e que a solução seja única, é necessário acrescentar uma nova corrente; usualmente, define-se a *corrente de seqüência zero*  $i_0$  por

$$i_0 = \frac{i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t)}{3}.$$

e, conseqüentemente, a transformação trifásica-bifásica escrita na forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} i_{\alpha s}(t) \\ i_{\beta s}(t) \\ i_0(t) \end{bmatrix} = k \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{3k} & \frac{1}{3k} & \frac{1}{3k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{3-2}} \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix}$$

e  $\mathbf{T}_{3-2}$ , como é assinalado, é a matriz transformação trifásica-bifásica.

No caso da conexão estrela em três fios, a corrente de seqüência zero tem valor nulo e as correntes bifásicas em função das correntes trifásicas são

$$i_{\alpha s}(t) = k \frac{3}{2} i_{as}(t) \quad (8.9)$$

$$i_{\beta s}(t) = k \frac{\sqrt{3}}{2} [i_{as}(t) + 2i_{bs}(t)] . \quad (8.10)$$

Como estas correntes fluem em solenóides localizadas nos correspondentes eixos ortogonais do plano complexo, a substituição das expressões que descrevem as correntes trifásicas instantâneas, em (8.9) e (8.10), resulta no seguinte corrente dada por

$$\bar{I}_{\alpha\beta,s}(t) = i_{\alpha s}(t) + j i_{\beta s}(t) = k \frac{3}{2} I_s e^{j\varphi_{i1}} e^{j\omega_1 t} \quad (8.11)$$

que representa no sistema estacionário de coordenadas  $\alpha - \beta$  as correntes trifásicas equilibradas.

O vetor espacial  $\bar{I}_{\alpha\beta,s}(t)$ , representativo das correntes trifásicas equilibradas de seqüência  $abc$  circulando em enrolamentos trifásicos simétricos, é um vetor de magnitude constante igual a  $k(3I_s/2)$  que gira na velocidade síncrona  $d\theta_s/dt = \omega_1$  no sentido anti-horário e, no instante  $t = 0$ , está deslocado do eixo real de um ângulo igual ao ângulo inicial da corrente  $\varphi_{i1}$ . Claramente, o vetor  $\bar{I}_{\alpha\beta,s}(t)$  descreve uma circunferência em torno da origem do plano complexo e a sua amplitude é o *fator da fase as*, isto é,

$$\hat{I}_s = k \frac{3}{2} I_s e^{j\varphi_{i1}} . \quad (8.12)$$

Se o trifásico é equilibrado, a escolha de  $k = 2/3$  define os seguintes valores característicos da máquina bifásica fictício:

(a) *Número de espiras de cada fase*

De acordo com a igualdade (8.7) obtém-se

$$N_{eq,s} = \frac{3}{2} N_s .$$

Portanto, o número total de espiras do estator é mantido na transformação, pois o total de espiras do trifásico  $3N_s$  é dividido igualmente nas duas fases do estator bifásico.

(b) *Vetor espacial corrente*

De acordo com as Equações (8.11) e (8.12) tem-se

$$\bar{I}_{\alpha\beta,s} = \hat{I}_s e^{j\omega_1 t} . \quad (8.13)$$

Observe que a amplitude do vetor espacial das correntes trifásicas do estator é o tradicional fator corrente da fase  $as$ .

**Exemplo 8.1** Determinar analiticamente as correntes instantâneas trifásicas a partir do vetor espacial definido pela expressão (8.11).

**Solução:**

Inicialmente, toma-se a expressão (8.11) e divide-se o vetor  $I_{\alpha\beta,s}$  por  $3k/2$  para que a sua amplitude seja igual à amplitude das correntes trifásicas:

$$\frac{\bar{I}_{\alpha\beta,s}}{3k/2} = I_s e^{j\varphi_{i1}} e^{j\omega_1 t} .$$

Na seqüência, os eixos magnéticos das fases devem ser rotacionados para que o eixo magnético da fase em questão coincida com o eixo real do plano complexo, o que significa multiplicar o vetor corrente pelo operador de rotação escolhido:

(a) Fase as:

O eixo magnético desta fase, por definição, coincide com o eixo real (eixo  $\alpha$ ). Então, a corrente instantânea da fase as é a parte real do vetor corrente  $\bar{I}_{\alpha\beta,s}/3k/2$ :

$$i_{as}(t) = \mathcal{R}e \left[ I_s e^{j\varphi_{i1}} e^{j\omega_1 t} \right] = I_s \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1}) .$$

(a) Fase bs:

A corrente na fase bs é obtida tornando primeiro o eixo magnético bs coincidente com o eixo real do plano complexo, o que exige o deslocamento do vetor de  $-2\pi/3$ , para finalmente tomar a parte real do vetor resultante):

$$i_{bs}(t) = \mathcal{R}e \left[ e^{-j2\pi/3} I_s e^{j\varphi_{i1}} e^{j\omega_1 t} \right] = I_s \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - 2\pi/3) .$$

(a) Fase cs:

Procedendo de maneira análoga à obtenção da corrente  $i_{bs}(t)$ , multiplica-se o vetor corrente por  $e^{-j4\pi/3}$  e toma-se a sua parte real:

$$i_{cs}(t) = \mathcal{R}e \left[ e^{-j4\pi/3} I_s e^{j\varphi_{i1}} e^{j\omega_1 t} \right] = I_s \cos(\omega_1 t + \varphi_{i1} - 4\pi/3) .$$

Em resumo, as correntes instantâneas das fases são determinadas a partir do vetor espacial segundo as relações dadas na seqüência:

$$\begin{aligned} i_{as}(t) &= \mathcal{R}e \left[ \frac{2}{3k} \bar{I}_{\alpha\beta,s} \right] \\ i_{bs}(t) &= \mathcal{R}e \left[ e^{-j2\pi/3} \frac{2}{3k} \bar{I}_{\alpha\beta,s} \right] \\ i_{cs}(t) &= \mathcal{R}e \left[ e^{-j4\pi/3} \frac{2}{3k} \bar{I}_{\alpha\beta,s} \right] . \end{aligned}$$

## Rotor

As correntes do rotor têm frequência angular  $\omega_2$  e fase  $\varphi_{i2}$ ; se referidas ao rotor equivalente de mesmo número de espiras do estator, são descritas pelas seguintes equações:

$$i'_{ar}(t) = I_r \cos(\omega_2 t + \varphi_{i2}) \quad (8.14)$$

$$i'_{br}(t) = I_r \cos(\omega_2 t + \varphi_{i2} - 2\pi/3) \quad (8.15)$$

$$i'_{cr}(t) = I_r \cos(\omega_2 t + \varphi_{i2} - 4\pi/3) \quad (8.16)$$

nas quais  $I_r$  representa a amplitude da corrente do rotor referida ao enrolamento do estator, isto é,

$$I_r = \frac{N_r}{N_s} i_r$$

na qual  $i_r$  é a amplitude da corrente no rotor de  $N_r$  espiras, como ilustrado na Figura 8.3(a). Note que pelo fato de as correntes estarem definidas no sistema de coordenadas  $mn$  fixado no rotor, tais correntes *permanecem na frequência de escorregamento*  $\omega_2$  – apenas foi trocado trifásico de  $N_r$  espiras por par de pólos por fase por um trifásico de  $N_s$  espiras por par de pólos por fase.

O procedimento adotado para se obter os vetores espaciais do estator é também válido para o circuito elétrico do rotor. O plano complexo associado ao rotor tem o eixo real coincidente com o eixo magnético  $ar$  e as suas coordenadas são designadas por  $m$  e  $n$ . Por estar fixado no eixo magnético  $ar$ , esse sistema de coordenadas tem a velocidade de rotação do rotor  $\omega_r = (p/2)\omega_m$  radianos elétricos por segundo, como ilustrado na Figura 8.3(b). O vetor espacial das correntes de rotor escrito no sistema de referência fixado no rotor é dado pela equação

$$\bar{I}_{mn,r}(t) = i_{mr} + ji_{nr} = k \left[ i'_{ar}(t) + i'_{br}(t)e^{j2\pi/3} + i'_{cr}(t)e^{j4\pi/3} \right] \quad (8.17)$$

que, combinada às Equações (8.14), (8.15) e (8.16), resulta no vetor corrente do rotor dado por

$$\bar{I}_{mn,r}(t) = \underbrace{k \frac{3}{2} I_r e^{j\varphi_{i2}}}_{\hat{I}_{mn,r}} e^{j\omega_2 t} = \bar{I}_{mn,r}(t) = k \frac{3}{2} I_r e^{j\theta_2}$$

sendo

$$\theta_2(t) = \omega_2 t + \varphi_{i2} . \quad (8.18)$$

*O vetor corrente de rotor de coordenadas  $mn$  gira na velocidade angular de escorregamento  $\omega_2$  em relação à estrutura física do rotor e a sua amplitude é o vetor de corrente*

$$\hat{I}_{mn,r} = k \frac{3}{2} I_r e^{j\varphi_{i2}}$$

A projeção desse vetor, segundo os eixos real e imaginário do plano complexo associado ao rotor, estabelece duas correntes que circulam por duas solenóides de  $N_{eq,s}$  espiras por pólo, que estão localizadas nos eixos  $m$  e  $n$ , como ilustrado na Figura 8.3(b).

Embora  $\bar{I}_{mn,r}$  seja referente ao rotor equivalente de mesmo número de espiras do estator, ele está ainda descrito no sistema girante do rotor. A sua descrição no sistema de coordenadas fixado no estator é obtida tomando a sua projeção nos eixos  $\alpha$  e  $\beta$ . Como mostrado na Figura 8.3(c), a posição do vetor  $\bar{I}_{mn,r}$  em relação ao eixo  $\alpha$  é  $\theta_2 + \theta_r$  radianos elétricos e, conseqüentemente, a sua projeção nos eixos  $\alpha$  e  $\beta$  resulta nas componentes de correntes

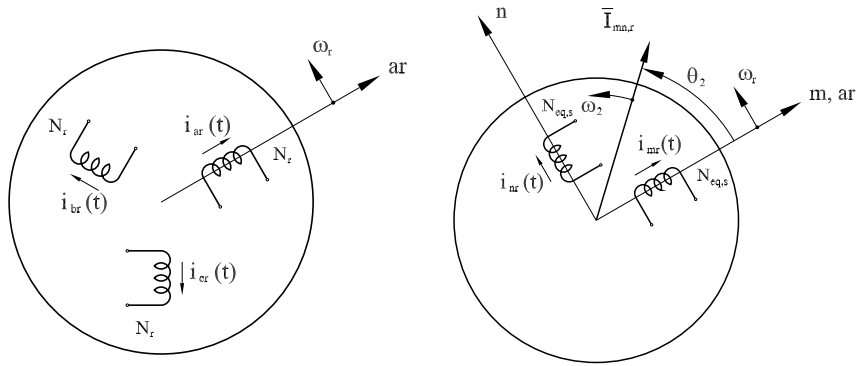
$$i_{\alpha r} = k \frac{3}{2} I_r \cos(\theta_2 + \theta_r)$$

$$i_{\beta r} = k \frac{3}{2} I_r \text{sen}(\theta_2 + \theta_r)$$

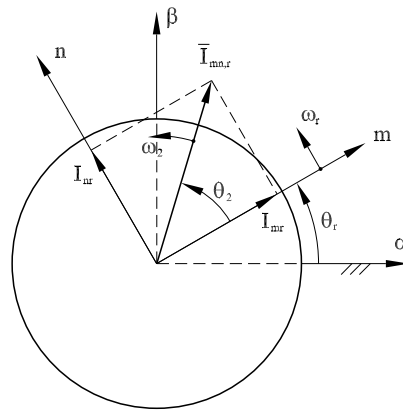
e, portanto, o *vetor representativo das correntes do rotor no sistema de referência estacionário do estator é*

$$\bar{I}_{\alpha\beta,r} = k \frac{3}{2} I_r e^{j(\theta_2 + \theta_r)} . \quad (8.19)$$

A soma da posição do rotor  $\theta_r$  com a posição  $\theta_2$  resulta na posição espacial  $\theta_s$  do vetor corrente de rotor no sistema de coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$ . Observe na Equação (8.19) que  $e^{j\theta_r}$  é o *operador complexo que realiza a transformação do vetor corrente de rotor  $\bar{I}_{mn,r}$ , definido no sistema de referência fixado no rotor, cuja velocidade é  $\omega_r = (p/2)\omega_m$ , para o sistema de referência fixado no estator de coordenadas  $\alpha\beta$  (sistema*



(a) Rotor trifásico de  $N_r$  espiras por pólo (b) Rotor bifásico equivalente de coordenadas  $mn$ , referência fixada no rotor



(c) Ângulos da transformação  $mn \rightarrow \alpha\beta$

Figura 8.3: Definição do vetor espacial representativo das correntes do rotor.

estacionário). A combinação das posições espaciais  $\theta_2$  e  $\theta_r$ , dadas respectivamente por (6.13) e (8.18), à Equação (6.15), resulta no vetor espacial

$$\bar{I}_{\alpha\beta,r} = k \underbrace{\frac{3}{2} I_r e^{j(\theta_{r0} + \varphi_{i2})}}_{\hat{I}_r} e^{j\omega_1 t}.$$

Como assinalado nessa última equação, o vetor espacial da corrente de rotor, expresso inteiramente no sistema estacionário, gira na velocidade síncrona  $\omega_1$  e tem amplitude definida pelo fasor  $\hat{I}_r$ .

## 8.2.2 Vetor espacial força eletromotriz

Uma vez que a fmm resultante do estator trifásico é igual àquela resultante do bifásico equivalente, o fluxo magnético do entreferro produzido no bifásico é o mesmo do trifásico; a projeção do fluxo de cada fase do trifásico segundo os eixos  $\alpha$  e  $\beta$  são, respectivamente,

$$\phi_{\alpha s} = \phi_{as}(t) + \phi_{bs}(t) \cos 120^\circ + \phi_{cs}(t) \cos 240^\circ$$

$$\phi_{\beta s} = \phi_{bs}(t) \sin 120^\circ + \phi_{cs}(t) \sin 240^\circ.$$

Ao se empregar a *lei de Faraday* a cada uma das fases  $\alpha$  e  $\beta$  de  $N_{eq,s}$  espiras, obtêm-se as respectivas forças eletromotrizes (fems) geradas

$$e_{\alpha s}(t) = \frac{d}{dt} N_{eq,s} \phi_{\alpha s} \quad (8.20)$$

$$e_{\beta s}(t) = \frac{d}{dt} N_{eq,s} \phi_{\beta s}. \quad (8.21)$$

Por sua vez, ao se considerar a relação entre espiras do trifásico e o equivalente bifásico, tem-se  $N_s = k N_{eq,s}$  e, portanto, as tensões induzidas em cada uma das fases do trifásico, escritas em função dos fluxos  $\alpha$  e  $\beta$ , são

$$e_{\alpha s}(t) = k \frac{d}{dt} N_{eq,s} \phi_{\alpha s}(t)$$

$$e_{\beta s}(t) = k \left[ \cos 120^\circ \frac{d}{dt} N_{eq,s} \phi_{\alpha s}(t) + \sin 120^\circ \frac{d}{dt} N_{eq,s} \phi_{\beta s}(t) \right]$$

$$e_{\gamma s}(t) = k \left[ \cos 240^\circ \frac{d}{dt} N_{eq,s} \phi_{\alpha s}(t) + \sin 240^\circ \frac{d}{dt} N_{eq,s} \phi_{\beta s}(t) \right]$$

que combinadas às Equações (8.20) e (8.21) resultam nas tensões

$$e_{\alpha s}(t) = k e_{\alpha s}(t)$$

$$e_{\beta s}(t) = k [\cos 120^\circ e_{\alpha s}(t) + \sin 120^\circ e_{\beta s}(t)]$$

$$e_{\gamma s}(t) = k [\cos 240^\circ e_{\alpha s}(t) + \sin 240^\circ e_{\beta s}(t)].$$

Como já foi analisado anteriormente, no caso geral existe a corrente  $i_0$ . Ao se associar o fluxo produzido por esta corrente à tensão de seqüência zero  $e_0$ , define-se

$$e_0 = \frac{1}{3} [e_{\alpha s}(t) + e_{\beta s}(t) + e_{\gamma s}(t)]$$

que somada às tensões de fase, resulta nas tensões

$$e_{\alpha s}(t) = k [e_{\alpha s}(t) + e_0/3]$$

$$e_{\beta s}(t) = k \left[ \cos 120^\circ e_{\alpha s}(t) + \sin 120^\circ e_{\beta s}(t) + \frac{e_0}{k} \right]$$



$$e_{cs}(t) = k \left[ \cos 240^\circ e_{\alpha s}(t) + \sen 240^\circ e_{\beta s}(t) + \frac{e_0}{k} \right].$$

Pode-se mostrar que a transformação inversa é dada por

$$e_{\alpha s}(t) = \frac{1}{k} [e_{as}(t) + \cos 120^\circ e_{bs}(t) + \cos 240^\circ e_{cs}(t)]$$

$$e_{\beta s}(t) = \frac{1}{k} [\sen 120^\circ e_{bs}(t) + \sen 240^\circ e_{cs}(t)]$$

$$e_0 = \frac{1}{3} [e_{as}(t) + e_{bs}(t) + e_{cs}(t)]$$

e que, no caso do trifásico equilibrado, são descritas pelo número complexo

$$\bar{E}_{\alpha\beta,s} = \frac{1}{k} \frac{3}{2} E_s e^{j\varphi_{v1}} e^{j\omega_1 t} \quad (8.22)$$

na qual  $E_s$  é o valor máximo da amplitude das fems.

Observe que a amplitude do vetor tensão é *inversamente* proporcional à constante  $k$ , enquanto a do vetor corrente, dada pela expressão (8.11), é *diretamente* proporcional a esta mesma constante.

Geralmente, adota-se a mesma definição do vetor espacial corrente para todas as outras variáveis envolvidas na modelagem das máquinas, e, neste caso, a transformação é invariante em potência somente para um dado valor da constante  $k$ , como é analisado na seção 8.3.2.

### 8.2.3 Matrizes de transformação $abc - \alpha\beta$

O controle de máquinas elétricas de campo girante emprega transformações trifásicas-bifásicas e vice-versa; a álgebra matricial torna-se, então, a sistematização adequada para estas transformações. Como já foi descrito anteriormente, para que exista um único conjunto trifásico, por exemplo de correntes, a partir do modelo bifásico, é necessário definir uma nova variável que seja independente das variáveis dos eixos em quadratura. Define-se, então, a *variável de seqüência zero*

$$X_0(t) = k_0 [x_a(t) + x_b(t) + x_c(t)]$$

na qual  $x_0$  pode ser fmm, corrente, tensão ou fluxo de seqüência zero e  $x_a(t)$ ,  $x_b(t)$  e  $x_c(t)$  são, respectivamente, os valores instantâneos de fase de fmm, corrente, tensão e fluxo magnético e  $k_0$  é uma constante, geralmente igual a  $1/3$  ou  $1/\sqrt{3}$ .

No caso da conexão estrela sem o fio neutro ou conexões trifásicas equilibradas – não fazendo diferença se estrela ou triângulo –, a corrente de seqüência-zero é nula. Quando existir  $i_0 \neq 0$ , a tensão de seqüência zero  $v_0$  é associada ao fluxo  $\psi_0$  produzido por  $i_0$ :

$$v_0 = r_a i_0 + \frac{d\psi_0}{dt}.$$

O fluxo  $\psi_0$  não concatena o enrolamento do rotor, sendo portanto, um fluxo de dispersão.

Na transformação realizada no final da seção 8.2.1 manteve-se o fluxo magnético constante, o que definiu diferentes relações de transformação para as correntes e tensões. Geralmente, por simplicidade, adota-se a mesma transformação dada por Equação (8.8) para as força magnetomotrizes, correntes, tensões e fluxos magnéticos. Empregando-se então a variável auxiliar  $x$ , a transformação  $abc - \alpha\beta$  é descrita por

$$\bar{X}_{\alpha\beta,s}(t) = x_{\alpha s} + jx_{\beta s} = k [x_{as}(t) + x_{bs}(t)e^{j2\pi/3} + x_{cs}(t)e^{j4\pi/3}]. \quad (8.23)$$

Ao se admitir a existência das variáveis de seqüência-zero, esta transformação descrita na forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} x_{\alpha s}(t) \\ x_{\beta s}(t) \\ x_0(t) \end{bmatrix} = k \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{k_0}{k} & \frac{k_0}{k} & \frac{k_0}{k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} x_{as}(t) \\ x_{bs}(t) \\ x_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

na qual é assinalado que  $\mathbf{T}$  é a matriz transformação trifásica para bifásica.

A transformação inversa, isto é, bifásica-trifásica, exige a determinação de  $\mathbf{T}^{-1}$ , que é dada por

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{2}{3} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{2k_0} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{k}{2k_0} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{k}{2k_0} \end{bmatrix}. \quad (8.25)$$

A escolha adequada dos valores das constantes  $k$  e  $k_0$  levam a valores específicos de correntes, tensão e portanto de potência. Como mencionado anteriormente, duas transformações são geralmente empregadas na análise das máquinas de corrente alternada:

### Transformação com $k = 2/3$ e $k_0 = 1/3$

Verificou-se que a constante  $k$  é a relação de espiras entre o enrolamento trifásico e o bifásico equivalente e, ao se adotar  $k = 2/3$ , a amplitude do vetor espacial corrente (Equação (8.11)) é igual à amplitude das correntes e o número de espiras do enrolamento bifásico é  $3/2$  do trifásico; conseqüentemente os vetores espaciais das outras variáveis também têm esta propriedade, pois a matriz transformação empregada é a mesma. Então, ao substituir-se  $k = 2/3$  e  $k_0 = 1/3$  nas Equações (8.24) e (8.25), obtêm-se as seguintes matrizes de transformação:

$$\mathbf{T} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Para as grandezas trifásicas do rotor, cujos enrolamentos têm o mesmo número de espiras do estator, tem-se

$$\begin{bmatrix} x'_{\alpha r}(t) \\ x'_{\beta r}(t) \\ x'_0(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} b \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ar}(t) \\ x_{br}(t) \\ x_{cr}(t) \end{bmatrix}.$$

A constante  $b$  presente nesta última expressão assume diferentes valores, a depender das variáveis a serem transformadas.

Se as variáveis a serem transformadas são as correntes, escolhe-se

$$b = \frac{N_r}{N_s}$$

e, se forem tensões ou fluxo, adota-se

$$b = \frac{N_s}{N_r}.$$

Mais adiante, na seção 8.3.2, mostra-se que se  $k = 2/3$  a transformação é variante em potência, pois as amplitudes dos vetores de tensão e de corrente são iguais às correspondentes amplitudes das variáveis de

fase, e, conseqüentemente, a potência por fase do estator bifásico é igual àquela por fase do estator trifásico. Assim sendo, verifica-se que

$$v_{\alpha}(t)i_{\alpha}(t) + v_{\beta}(t)i_{\beta}(t) \neq v_a(t)i_a(t) + v_b(t)i_b(t) + v_c(t)i_c(t) .$$

Conclui-se, então que, a potência do bifásico deve ser multiplicada por 3/2 para que seja igual à trifásica.

### Transformação com $k = \sqrt{2/3}$ e $k_0 = 1/\sqrt{3}$

Embora não seja obrigatório, é desejável que a transformação seja invariante em potência. Mostra-se que isto ocorre se  $\mathbf{T} = [\mathbf{T}^{-1}]^t$  e, esta condição é satisfeita para  $k = \sqrt{2/3}$  e  $k_0 = 1/\sqrt{3}$ <sup>1</sup>. A substituição dessas constantes nas expressões (8.24) e (8.25) define as matrizes de transformação

$$\mathbf{T} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} .$$

As matrizes de transformação são as mesmas para todas as variáveis, mas as amplitudes dos vetores espaciais resultantes *não são iguais* às amplitudes das correspondentes variáveis representadas; ao se empregar, por exemplo, a expressão (8.23) para as correntes do estator trifásico equilibrado tem-se

$$\bar{I}_{\alpha\beta,s}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} I_s e^{j\varphi_{i1}} e^{j\omega_1 t} .$$

Devido a este aumento nas amplitudes das tensões e correntes, empregando um raciocínio semelhante ao realizado no caso de  $k = 2/3$ , conclui-se que a transformação é invariante em potência.

**Exemplo 8.2** *Um inversor fonte de tensão trifásico pode ser representado por três chaves  $CH_a$ ,  $CH_b$  e  $CH_c$  equivalentes à configuração de seis outras chaves ( $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$  e  $T_6$ ), como ilustrado na Figura Exemplo (8.2): a ação de  $CH_a$  equivale à ação do par  $T_1 - T_4$ ,  $CH_b$  ao par  $T_3 - T_6$  e  $CH_c$  ao par  $T_5 - T_2$ . A cada uma dessas três chaves são atribuídos o estado 1 ou 0, significando chave ligada ao terminal positivo ou ao terminal negativo da fonte CC, respectivamente.*

*Considere, por exemplo, a chave  $CH_a$  nos dois estados possíveis, isto é,  $s_a = 1$  e  $s_b = 0$ ; se  $s_a = 1$ , tem-se  $T_1$  fechada e, conseqüentemente, o terminal positivo da fonte CC está conectado à fase a, enquanto  $T_4$  está aberta; se  $s_a = 0$ , a chave  $T_1$  está aberta e  $T_4$  fechada, isto é, o terminal negativo da fonte está conectado à fase a. Identificando-se a tensão elétrica do elo de corrente contínua por  $V_{cc}$ , mostre que:*

- (a) *As tensões de linha são dadas por em função dos estados das três chaves são dadas por*

$$v_{ab}(t) = V_{cc}(s_a - s_b)$$

$$v_{bc}(t) = V_{cc}(s_b - s_c)$$

$$v_{ca}(t) = V_{cc}(s_c - s_a) .$$

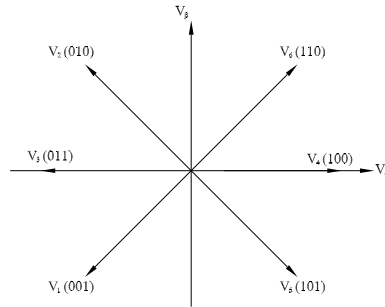
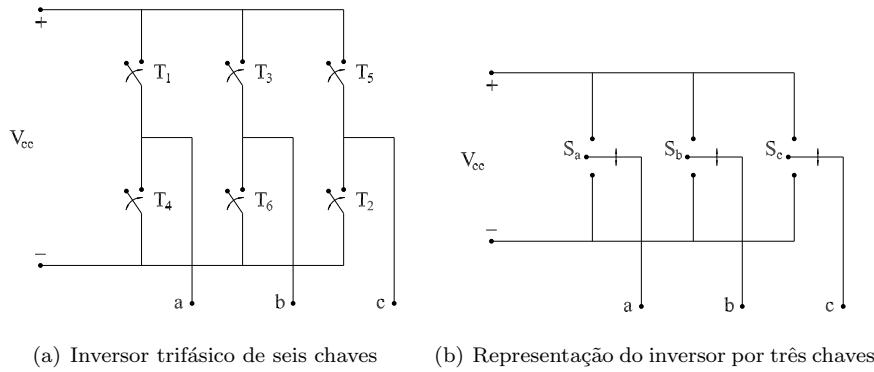
- (b) *As tensões correspondentes às tensões de linha são dadas por*

$$v_{an}(t) = V_{cc}(2s_a - s_b - s_c)/3$$

$$v_{bn}(t) = V_{cc}(2s_b - s_a - s_c)/3$$

$$v_{cn}(t) = V_{cc}(2s_c - s_a - s_b)/3$$

<sup>1</sup>N.N. Hancock, Matrix Analysis of Electrical Machinery, Pergamon Press, 2ª edição, 1974.



(c) Os vetores espaciais do inversor-fonte de tensão no sistema estacionário

Figura Exemplo 8.2

(c) O vetor tensão do inversor é

$$\bar{V}_k = \frac{2}{3} V_{cc} \left( s_a + s_b e^{j2\pi/3} + s_c e^{j4\pi/3} \right)$$

### Solução

(a) A tensão de linha  $v_{ab}(t)$  da carga é comandada pelas chaves  $CH_a$  e  $CH_b$  e, em módulo, é igual à  $V_{cc}$ : é positiva se  $s_a = 1$  e  $s_b = 0$ , e negativa se  $s_a = 0$  e  $s_b = 1$ . Então, pode-se escrever, que

$$v_{ab}(t) = V_{cc}(s_a - s_b)$$

e, analogamente, têm-se para as outras duas tensões de linha

$$v_{bc}(t) = V_{cc}(s_b - s_c)$$

$$v_{ca}(t) = V_{cc}(s_c - s_a) .$$

(b) Pode-se mostrar que as tensões de fase escritas em função das tensões de linha do item anterior, são dadas por

$$v_{an}(t) = \frac{2v_{ab}(t) + v_{bc}(t)}{3}$$

$$v_{bn}(t) = \frac{v_{bc}(t) - v_{ab}(t)}{3}$$

$$v_{cn}(t) = -\frac{2v_{bc}(t) + v_{ab}(t)}{3} .$$

que combinadas às equações das tensões de linha, dadas no item anterior, resultam nas seguintes equações finais das tensões de fase:

$$\begin{aligned}v_{an}(t) &= \frac{V_{cc}}{3}(2s_a - s_b - s_c) \\v_{bn}(t) &= \frac{V_{cc}}{3}(-s_a + 2s_b - s_c) \\v_{cn}(t) &= \frac{V_{cc}}{3}(-s_a - s_b + 2s_c).\end{aligned}$$

(c) A expressão do vetor espacial das tensões de fase, se  $k = 2/3$ , é

$$\bar{V}_s = \frac{2}{3} [v_{an}(t) + v_{bn}(t)e^{j2\pi/3} + v_{cn}(t)e^{j4\pi/3}]$$

que, se combinada ao resultado do item anterior, resulta em

$$\bar{V}_s = \frac{2}{3} V_{cc}(s_a + s_b e^{j2\pi/3} + s_c e^{j4\pi/3}).$$

Para cada combinação de  $s_a$ ,  $s_b$  e  $s_c$  é definido um vetor  $e$ , portanto, existem oito vetores de tensão, sendo dois nulos, como ilustrado na Figura Exemplo 8.4(c).

## 8.2.4 Vetores de fluxos concatenados e de tensões elétricas

### Estator

É conveniente descrever o vetor fluxo concatenado total do estator em função das corrente, para que se possa escrever as equações do tipo  $v = ri + d\psi/dt$  de cada fase.

A definição do vetor espacial para as correntes e fmm's aplica-se também às tensões elétricas e às ondas de fluxo concatenado do estator e do rotor. O vetor do fluxo concatenado total do estator é, então,

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta,s} = k [\psi_{as}(t) + \psi_{bs}(t)\bar{\mathbf{a}} + \psi_{cs}(t)\bar{\mathbf{a}}^2] . \quad (8.26)$$

O vetor espacial fluxo do estator  $\bar{\psi}_{\alpha\beta,ss}$ , devido somente às correntes do estator, é facilmente obtido ao se combinar (7.21), (7.22) e (7.23) segundo a definição dada por (8.26). Assim procedendo, obtém-se

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta,ss} = L_s k \underbrace{[i_{as}(t) + i_{bs}(t)\bar{\mathbf{a}} + i_{cs}(t)\bar{\mathbf{a}}^2]}_{\bar{I}_{\alpha\beta,s}}$$

na qual identifica-se o vetor espacial  $\bar{I}_{\alpha\beta,s}$  e, portanto,

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta,ss} = L_s \bar{I}_{\alpha\beta,s} . \quad (8.27)$$

A obtenção da parcela relativa à influência das correntes de rotor no fluxo de estator é um pouco mais trabalhosa. A partir do emprego da identidade trigonométrica

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (8.28)$$

nas funções cosseno presentes em (7.27), (7.28) e (7.29) e a posterior combinação das equações resultantes, segundo a definição dada em (8.26), resulta na parcela relativa à influência do fluxo gerado pelas correntes do rotor dada por

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta,sr} = L_m e^{j\theta_r} \underbrace{k [i'_{ar}(t) + i'_{br}(t)\bar{\mathbf{a}} + i'_{cr}(t)\bar{\mathbf{a}}^2]}_{\bar{I}_{\alpha\beta,r}} \quad (8.29)$$

na qual, reportando-se às Equações (8.17) e (8.19), é identificado o vetor corrente de rotor  $\bar{I}_{\alpha\beta,r}(t)$ . O *vetor espacial do fluxo concatenado total do estator* é a soma dos componentes dados por (8.27) e (8.29), isto é,

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta,s} = L_s \bar{I}_{\alpha\beta,s} + L_m \bar{I}_{\alpha\beta,r} . \quad (8.30)$$

Observe que o vetor fluxo concatenado pelo estator é função somente de correntes definidas nas coordenadas estacionárias  $\alpha$  e  $\beta$ .

A tensão de terminal de um enrolamento é do tipo  $v = ri + d\psi/dt$ , na qual  $r$  é a sua resistência elétrica,  $i$  a sua corrente elétrica e  $d\psi/dt$  é a tensão gerada por causa da variação do fluxo concatenado com esse enrolamento, isto é,  $e = d\psi/dt$ .

As equações de equilíbrio das tensões instantâneas de cada fase do estator trifásico são

$$\begin{aligned} v_{as}(t) &= R_s i_{as}(t) + \frac{d\psi_{as}(t)}{dt} \\ v_{bs}(t) &= R_s i_{bs}(t) + \frac{d\psi_{bs}(t)}{dt} \\ v_{cs}(t) &= R_s i_{cs}(t) + \frac{d\psi_{cs}(t)}{dt} \end{aligned}$$

que combinadas, segundo a definição do vetor espacial, resultam na equação de equilíbrio dos vetores espaciais de tensão do estator

$$\bar{V}_{\alpha\beta,s} = R_s \bar{I}_{\alpha\beta,s} + \frac{d\bar{\psi}_{\alpha\beta,s}}{dt} \quad (8.31)$$

que combinada à Equação (8.30), resulta na forma expressa em função das corrente dada por

$$\bar{V}_{\alpha\beta,s} = R_s \bar{I}_{\alpha\beta,s} + L_s \frac{d\bar{I}_{\alpha\beta,s}}{dt} + L_m \frac{d\bar{I}_{\alpha\beta,r}}{dt} .$$

## Rotor

O vetor fluxo concatenado total do rotor trifásico de mesmo número de espiras do estator e descrito no sistema de coordenadas  $mn$  é

$$\bar{\psi}_{mn,r}(t) = k [\psi'_{ar}(t) + \psi'_{br}(t)\bar{\mathbf{a}} + \psi'_{cr}(t)\bar{\mathbf{a}}^2] . \quad (8.32)$$

O vetor força eletromotriz associado a esse fluxo do rotor é

$$\bar{E}_{mn,r} = \frac{d\bar{\psi}_{mn,r}(t)}{dt}$$

que multiplicado pelo operador  $e^{j\theta_r}$  define inteiramente a fem de rotor no sistema estacionário de coordenadas  $\alpha\beta$

$$\bar{E}_{\alpha\beta,r} = e^{j\theta_r} \bar{E}_{mn,r} = e^{j\theta_r} \frac{d\bar{\psi}_{mn,r}}{dt} . \quad (8.33)$$

Esse vetor força eletromotriz é escrito de maneira mais conveniente, identificando-o como um dos termos resultante da derivada de  $\bar{\psi}_{mn,r} e^{j\theta_r}$ . Dado que  $d\theta_r/dt = \omega_r$  tem-se

$$e^{j\theta_r} \frac{d}{dt} \bar{\psi}_{mn,r}(t) = \frac{d}{dt} \underbrace{\bar{\psi}_{mn,r}(t) e^{j\theta_r}}_{\bar{\psi}_{\alpha\beta,r}} - j\omega_r \bar{\psi}_{mn,r}(t) e^{j\theta_r} \quad (8.34)$$

na qual o fluxo  $\bar{\psi}_{mn,r}$  multiplicado por  $e^{j\theta_r}$  define o fluxo do rotor nas coordenadas estacionárias, tal como ocorre para as correntes do rotor, isto é,

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta,r} = \bar{\psi}_{mn,r} e^{j\theta_r} . \quad (8.35)$$

Ao se combinar as Equações (8.33), (8.34) e (8.35), obtém-se a forma final do vetor força eletromotriz de rotor *descrito inteiramente no sistema estacionário*:

$$\bar{E}_{\alpha\beta,r} = \frac{d\bar{\psi}_{\alpha\beta,r}}{dt} - j\omega_r \bar{\psi}_{\alpha\beta,r} .$$

Se a queda de tensão na resistência do rotor está referida ao estator e é somada a essa fem, tem-se a equação de equilíbrio dos vetores espaciais de tensão do rotor em função do vetor fluxo dado por

$$\bar{V}_{\alpha\beta,r} = R_r \bar{I}_{\alpha\beta,r} + \frac{d\bar{\psi}_{\alpha\beta,r}}{dt} - j\omega_r \bar{\psi}_{\alpha\beta,r} \quad (8.36)$$

na qual

$$R_r = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 r_r$$

é a resistência do rotor referida ao estator e  $r_r$  é a resistência do rotor original de  $N_r$  espiras. Observe, na equação de tensão do rotor, a existência da tensão gerada devido à variação do fluxo ( $d\bar{\psi}_{\alpha\beta,r}/dt \neq 0$ ), denominada *tensão de transformador*, e outra tensão, devido à velocidade do rotor ( $(p/2)\omega_m \bar{\psi}_{\alpha\beta,r}$ ), denominada *tensão de velocidade*.

A obtenção da tensão  $\bar{V}_{\alpha\beta,r}$ , escrita em função das correntes do estator e do rotor, exige que  $\bar{\psi}_{\alpha\beta,r}$  seja escrito em função dessas mesmas correntes. Para isto, inicialmente, multiplica-se a expressão (8.32) por  $e^{j\theta_r}$  para que o fluxo do rotor esteja referido inteiramente ao estator, isto é,

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta,r}(t) = e^{j\theta_r} k [\psi'_{ar}(t) + \psi'_{br}(t)\bar{\mathbf{a}} + \psi'_{cr}(t)\bar{\mathbf{a}}^2] . \quad (8.37)$$

O procedimento a ser adotado na determinação do vetor fluxo do rotor é o mesmo da obtenção do vetor fluxo estator. Então, tomando-se as expressões (7.32), (7.33), (7.34), (7.35), (7.36) e (7.37) e empregando-se convenientemente a definição do vetor espacial do rotor, dada por (8.37), e a identidade trigonométrica, dada por (8.28), obtém-se o vetor fluxo próprio

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta,rr} = L_r \bar{I}_{\alpha\beta,r} \quad (8.38)$$

e o vetor fluxo concatenado pelo rotor devido ao fluxo do estator

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta,rs} = L_m \bar{I}_{\alpha\beta,s}$$

e ambos somados definem o *vetor fluxo concatenado total do rotor* no sistema de coordenadas estacionárias, dado por

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta,r} = L_m \bar{I}_{\alpha\beta,s} + L_r \bar{I}_{\alpha\beta,r}$$

que substituída na Equação (8.36) resulta em

$$\bar{V}_{\alpha\beta,r} = R_r \bar{I}_{\alpha\beta,r} + L_m \frac{d}{dt} \bar{I}_{\alpha\beta,s} + L_r \frac{d}{dt} \bar{I}_{\alpha\beta,r} - j\omega_r (L_m \bar{I}_{\alpha\beta,s} + L_r \bar{I}_{\alpha\beta,r}) .$$

### 8.3 O modelo no sistema de referência genérico

Conhecidos os vetores representativos das grandezas do estator e do rotor, expressos nas coordenadas do sistema estacionário, pode-se definir um novo sistema de referência de coordenadas  $x$  e  $y$ , girando no sentido anti-horário e na velocidade genérica  $\omega_a = d\theta_a/dt$ . A posição espacial do vetor fmm do estator nesse novo sistema é descrita pelo ângulo espacial elétrico  $\theta - \theta_a$ , sendo  $\theta_a$  o ângulo relativo entre os eixos  $\alpha$  e  $x$ , como está ilustrado na Figura 8.4.

Para escrever as equações em um particular sistema de referência, basta substituir  $\omega_a$  pela velocidade desse particular sistema. Geralmente adotam-se três sistemas de coordenadas:

- (a) Sistema estacionário:  $\omega_a = 0$
- (b) Sistema girante síncrono:  $\omega_a = \omega_1$
- (c) Sistema girante rotórico:  $\omega_a = \omega_r = (p/2)\omega_m$

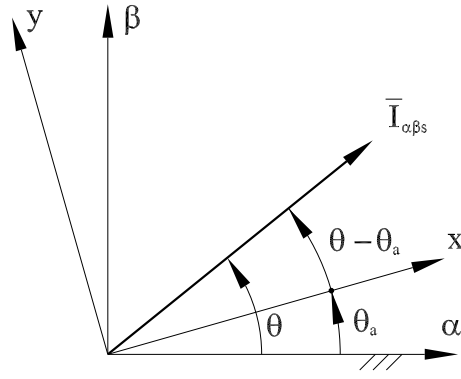


Figura 8.4: Transformação  $\alpha\beta - xy$ .

### 8.3.1 Equações básicas e circuito equivalente

Para descrever os vetores espaciais das grandezas do rotor no sistema estacionário, multiplicou-se essas grandezas definidas na referência do rotor pelo operador espacial  $e^{j\theta_r}$ . De forma análoga, emprega-se o operador espacial  $e^{-j\theta_a}$  na transformação dos vetores de coordenadas  $\alpha\beta$  ao sistema genérico girante de coordenadas  $xy$ .

O vetor corrente do estator definido no novo sistema de referência é, então,

$$\bar{I}_{xy,s} = e^{-j\theta_a} \bar{I}_{\alpha\beta,s} \quad (8.39)$$

$$\bar{I}_{xy,s} = i_{\alpha s} \cos \theta_a + i_{\beta s} \text{sen} \theta_a + j(i_{\beta s} \cos \theta_a - i_{\alpha s} \text{sen} \theta_a)$$

que na forma matricial torna-se

$$\begin{bmatrix} i_{xs} \\ i_{ys} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_a & \text{sen} \theta_a \\ -\text{sen} \theta_a & \cos \theta_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix}$$

Pode-se realizar a transformação das variáveis trifásicas originais  $abc$  diretamente para o sistema de coordenadas  $x$  e  $y$ , bastando escrever o vetor corrente do estator em função das correntes trifásicas instantâneas:

$$\bar{I}_{xy,s} = k[i_{as}(t)e^{-j\theta_a} + i_{bs}(t)e^{j(2\pi/3-\theta_a)} + i_{cs}(t)e^{j(4\pi/3-\theta_a)}].$$

Como a corrente de seqüência zero é definida por  $i_0 = [i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t)]/3$ , o vetor corrente na forma matricial torna-se

$$\begin{bmatrix} i_{xs} \\ i_{ys} \\ i_0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \cos \theta_a & \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ -\text{sen} \theta_a & -\text{sen}(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\text{sen}(\theta_a + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{3k} & \frac{1}{3k} & \frac{1}{3k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix}.$$

(a) *Corrente do rotor* (referida ao estator)

$$\bar{I}_{xy,r} = e^{-j\theta_a} \bar{I}_{\alpha\beta,r} \quad (8.40)$$

que na forma matricial torna-se

$$\begin{bmatrix} i_{xr} \\ i_{yr} \end{bmatrix} = \frac{N_r}{N_s} \begin{bmatrix} \cos(\theta_a - \theta_r) & \text{sen}(\theta_a - \theta_r) \\ -\text{sen}(\theta_a - \theta_r) & \cos(\theta_a - \theta_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{mr} \\ i_{nr} \end{bmatrix}$$



A transformação direta  $abc \rightarrow \alpha\beta$  é obtida escrevendo  $\bar{I}_{\alpha\beta,r}$  em função das correntes instantâneas trifásicas do rotor:

$$\begin{bmatrix} i_{xr} \\ i_{yr} \\ i_0 \end{bmatrix} = k \frac{N_r}{N_s} \begin{bmatrix} \cos(\theta_a - \theta_r) & \cos(\theta_a - \theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a - \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ -\text{sen}(\theta_a - \theta_r) & -\text{sen}(\theta_a - \theta_r - \frac{2\pi}{3}) & -\text{sen}(\theta_a - \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ 1/3k & 1/3k & 1/3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar}(t) \\ i_{br}(t) \\ i_{cr}(t) \end{bmatrix} .$$

Uma vez conhecidos os vetores das correntes no sistema girante, têm-se as seguintes expressões dos fluxos concatenados e de equilíbrio das tensões:

(b) *Fluxo do estator:*

A partir da Equação (8.30) tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{xy,s} &= e^{-j\theta_a} \bar{\psi}_{\alpha\beta,s} = L_s \bar{I}_{\alpha\beta,s} e^{-j\theta_a} + L_m \bar{I}_{\alpha\beta,r} e^{-j\theta_a} \\ \bar{\psi}_{xy,s} &= L_s \bar{I}_{xy,s} + L_m \bar{I}_{xy,r} . \end{aligned} \quad (8.41)$$

(c) *Tensão do estator:*

A partir da Equação (8.31) tem-se

$$\begin{aligned} \bar{V}_{xy,s} &= e^{-j\theta_a} \bar{V}_{\alpha\beta,s} = R_s \bar{I}_{\alpha\beta,s} e^{-j\theta_a} + e^{-j\theta_a} \frac{d\bar{\psi}_{\alpha\beta,s}}{dt} \\ \bar{V}_{xy,s} &= R_s \bar{I}_{xy,s} + \frac{d\bar{\psi}_{xy,s}}{dt} + j\omega_a \bar{\psi}_{xy,s} . \end{aligned} \quad (8.42)$$

(d) *Fluxo do rotor:*

A partir da Equação (8.38) tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{xy,r} &= e^{-j\theta_a} \bar{\psi}_{\alpha\beta,r} = L_m e^{-j\theta_a} \bar{I}_{\alpha\beta,s} + L_r e^{-j\theta_a} \bar{I}_{\alpha\beta,r} \\ \bar{\psi}_{xy,r} &= L_m \bar{I}_{xy,s} + L_r \bar{I}_{xy,r} . \end{aligned} \quad (8.43)$$

(e) *Tensão do rotor:*

A partir da Equação (8.36) tem-se

$$\begin{aligned} \bar{V}_{xy,r} &= e^{-j\theta_a} \bar{V}_{\alpha\beta,r} = R_r e^{-j\theta_a} \bar{I}_{\alpha\beta,r} + \underbrace{e^{-j\theta_a} \frac{d\bar{\psi}_{\alpha\beta,r}}{dt}}_{\frac{d\bar{\psi}_{xy,r}}{dt} + j\omega_a \bar{\psi}_{xy,r}} - j\omega_r e^{-j\theta_a} \underbrace{\bar{\psi}_{\alpha\beta,r}}_{\bar{\psi}_{xy,r}} \\ \bar{V}_{xy,r} &= R_r \bar{I}_{xy,r} + \frac{d\bar{\psi}_{xy,r}}{dt} + j(\omega_a - \omega_r) \bar{\psi}_{xy,r} . \end{aligned} \quad (8.44)$$

De fato, os fluxos do estator e do rotor não existem separadamente na operação normal das máquinas elétricas. A soma espacial dos fluxos de magnetização do estator e do rotor define o vetor fluxo resultante do entreferro  $\bar{\psi}_{g,xy}$  dado por

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{xy,s} &= L_{ls} \bar{I}_{xy,s} + \underbrace{L_m (\bar{I}_{xy,s} + \bar{I}_{xy,r})}_{\bar{\psi}_{g,xy}} \\ \bar{\psi}_{xy,r} &= L_{lr} \bar{I}_{xy,r} + \underbrace{L_m (\bar{I}_{xy,s} + \bar{I}_{xy,r})}_{\bar{\psi}_{g,xy}} \end{aligned}$$

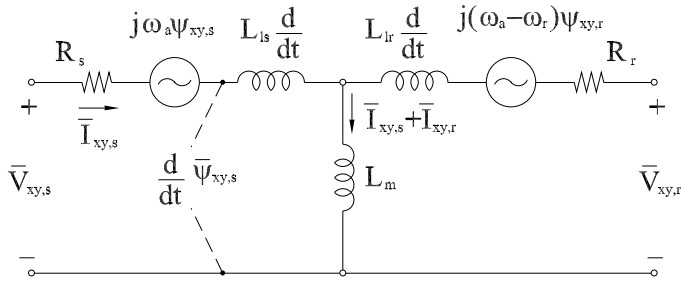


Figura 8.5: Circuito equivalente no sistema de referência genérico.

$$\bar{\psi}_{xy,s} = L_{ls} \bar{I}_{xy,s} + \bar{\psi}_{g,xy} \quad (8.45)$$

$$\bar{\psi}_{xy,r} = L_{lr} \bar{I}_{xy,r} + \bar{\psi}_{g,xy} . \quad (8.46)$$

Se é considerado linear o sistema magnético, a combinação das Equações (8.42) e (8.45), (8.44) e (8.46), resulta respectivamente nas seguintes equações de tensão:

$$\bar{V}_{xy,s} = R_s \bar{I}_{xy,s} + L_{ls} \frac{d\bar{I}_{xy,s}}{dt} + j\omega_a \bar{\psi}_{xy,s} + \frac{d\psi_{g,xy}}{dt}$$

$$\bar{V}_{xy,r} = R_r \bar{I}_{xy,r} + L_{lr} \frac{d\bar{I}_{xy,r}}{dt} + j(\omega_a - \omega_r) \bar{\psi}_{xy,r} + \frac{d\psi_{g,xy}}{dt}$$

nas quais

$$\frac{d\psi_{g,xy}}{dt} = L_m \frac{d}{dt} (\bar{I}_{xy,s} + \bar{I}_{xy,r}) .$$

Estas equações estabelecem o circuito equivalente mostrado na Figura 8.5.

### 8.3.2 Potência

A potência instantânea de um sistema polifásico é determinada pela soma dos produtos das tensões de fase pelas respectivas correntes de fase, para qualquer forma de onda e conteúdo harmônico:

$$p(t) = v_a(t)i_a(t) + v_b(t)i_b(t) + \dots + v_n(t)i_n(t) .$$

Para o sistema trifásico, se as tensões e correntes instantâneas de fase são escritas em função dos vetores espaciais definidos no sistema estacionário (revise expressões finais do exemplo 8.1), a expressão da potência do estator nas novas variáveis torna-se

$$p_s(t) = \left(\frac{2}{3k}\right)^2 [\mathcal{R}e(\bar{V}_{\alpha\beta,s} \mathcal{R}e(\bar{I}_{\alpha\beta,s})) + \mathcal{R}e(\bar{\mathbf{a}}^2 \bar{V}_{\alpha\beta,s}) \mathcal{R}e(\bar{\mathbf{a}}^2 \bar{I}_{\alpha\beta,s}) + \mathcal{R}e(\bar{\mathbf{a}} \bar{V}_{\alpha\beta,s}) \mathcal{R}e(\bar{\mathbf{a}} \bar{I}_{\alpha\beta,s})]$$

que após alguns rearranjos, resulta na seguinte expressão de potência, em função dos vetores espaciais expressos valores de pico:

$$p_s(t) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mathcal{R}e \left[ \bar{V}_{\alpha\beta,s} \cdot \bar{I}_{\alpha\beta,s}^* \right] \quad (\text{variáveis em valores de pico}) .$$

A potência instantânea do estator no sistema de referência girante de velocidade arbitrária  $\omega_a$  é obtida a partir da transformação dos vetores tensão e corrente, definidos nos eixos fixos, para o sistema de coordenadas girantes. Assim procedendo tem-se

$$p_s(t) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mathcal{R}e \left[ \frac{\bar{V}_{xy,s}}{e^{-j\theta}} \cdot \frac{I_{xy,s}^*}{e^{j\theta}} \right] = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mathcal{R}e \left[ \bar{V}_{xy,s} \cdot \bar{I}_{xy,s}^* \right] .$$

Observe que a velocidade do sistema de coordenadas não está presente na expressão da potência instantânea, e, portanto, o seu valor independe do sistema de referência adotado. Para  $k = 2/3$  tem-se a *transformação variante em potência* e para  $k = \sqrt{2/3}$  a *transformação invariante em potência*, dadas respectivamente por

$$p_s(t) = \frac{3}{2} \mathcal{R}e \left[ \bar{V}_{xy,s} \cdot \bar{I}_{xy,s}^* \right] \quad (k = 2/3, \text{ variante em potência})$$

$$p_s(t) = \mathcal{R}e \left[ \bar{V}_{xy,s} \cdot \bar{I}_{xy,s}^* \right] \quad (k = \sqrt{2/3}, \text{ invariante em potência}).$$

Para a máquina de indução com dupla alimentação, a tensão de terminal do rotor não é nula, o que significa que existe potência envolvida nos terminais externos do rotor e, conseqüentemente, a potência elétrica da máquinas de indução é dada por

$$p(t) = p_s(t) + p_r(t) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{k} \right)^2 \mathcal{R}e \left[ \bar{V}_{xy,s} \cdot \bar{I}_{xy,s}^* + \bar{V}_{xy,r} \cdot \bar{I}_{xy,r}^* \right].$$

Lembre-se que as tensões e as correntes presentes nessas expressões de potência estão escritas em valores de pico.

### 8.3.3 Torque desenvolvido

O princípio da conservação de energia aplicado a um conversor eletromecânico de energia estabelece que

$$W_{entrada} = W_{perdas} + W_{armazenada} + W_{saída}$$

na qual, no caso do motor:

- (a)  $W_{entrada}$  = energia elétrica fornecida pela fonte aos terminais elétricos do conversor;
- (b)  $W_{perdas}$  = energia elétrica convertida em calor;
- (c)  $W_{armazenada}$  = energia magnética armazenada sob a forma de campo magnético e
- (d)  $W_{saída} = W_{em}$  = fração da energia elétrica convertida em energia mecânica.

A energia envolvida diretamente na conversão eletromecânica de energia é denominada *energia eletromagnética* e é igual à diferença entre a energia de entrada e a energia de perdas elétricas; ela é designada por  $W_{emag}$ , é composta pela energia magnética armazenada e pela energia mecânica, isto é,

$$W_{emag} = W_{armaz} + W_{em}.$$

A variação da energia eletromagnética associada ao deslocamento angular do rotor  $d\theta_r$  no intervalo de tempo  $dt$  é a potência  $p_{emag}$ ; portanto, o diferencial dessa energia é dado por

$$dW_{emag} = p_{emag}(t)dt$$

e é função das fems geradas em cada uma das fases do estator, como identificadas nas Equações (8.42) e (8.44); adotando-se  $\mathbf{k} = \mathbf{2/3}$ , a variação da energia eletromagnética da máquina de indução com o estator e rotor alimentados é dada por

$$dW_{emag} = \frac{3}{2} \mathcal{R}e [\bar{E}_{xy,s} \cdot \bar{I}_{xy,s}^* + \bar{E}_{xy,r} \cdot \bar{I}_{xy,r}^*] dt.$$

Ao substituir nesta equação os vetores espaciais das f.e.ms. induzidas no estator e no rotor, a variação da energia eletromagnética durante o movimento do rotor torna-se

$$dW_{emag} = \frac{3}{2} \mathcal{R}e \left[ \underbrace{\bar{I}_{xy,s}^* d\bar{\psi}_{xy,s} + \bar{I}_{xy,r}^* d\bar{\psi}_{xy,r}}_{dW_{armazenada}} + \underbrace{j\omega_a \bar{I}_{xy,s} \bar{\psi}_{xy,s} dt + j(\omega_a - (p/2)\omega_m) \bar{I}_{xy,r} \bar{\psi}_{xy,r} dt}_{dW_{em}} \right]. \quad (8.47)$$

Como é assinalado na Equação (8.47), os dois primeiros termos estão associados à variação da energia magnética armazenada ( $dW_{armazenada}$ ), enquanto os termos restantes, dependentes da velocidade, estão relacionados com a variação da *energia eletromecânica* ( $dW_{em}$ ). Tomando-se os vetores dos fluxos em função das correntes e, posteriormente, substituindo-os nos termos relativos à variação da energia eletromecânica, como assinalado na Equação (8.47), obtém-se, após alguns arranjos, a potência eletromecânica  $P_{em} = dW_{em}/dt$  dada por

$$P_{em} = \frac{3}{2} \mathcal{R}e \left\{ j\omega_a \underbrace{[L_s |\bar{I}_{xy,s}|^2 + L_m (\bar{I}_{xy,s}^* \bar{I}_{xy,r} + \bar{I}_{xy,r}^* \bar{I}_{xy,s}) + L_r |\bar{I}_{xy,r}|^2]}_{\substack{n^\circ \text{ real} \\ n^\circ \text{ imaginário}}} \right\} - \quad (8.48)$$

$$- \frac{3p}{4} \omega_m \mathcal{R}e \left\{ j L_m \bar{I}_{xy,s} \bar{I}_{xy,r}^* + \underbrace{j(p/2) \omega_m L_r |\bar{I}_{xy,s}|^2}_{n^\circ \text{ imaginário}} \right\}. \quad (8.49)$$

O módulo de um número complexo, bem como a soma de um número complexo com o seu conjugado são números reais e, conseqüentemente, como assinalado na Equação (8.48), os termos dependentes da velocidade  $\omega_a$  ou da corrente ao quadrado são números puramente imaginários; assim sendo, a expressão da potência eletromecânica total resume-se à

$$P_{em} = -\frac{3p}{4} \omega_m L_m \mathcal{R}e \left[ j \bar{I}_{xy,s} \cdot \bar{I}_{xy,r}^* \right]$$

ou como alternativa tem-se

$$P_{em} = \frac{3p}{4} \omega_m L_m \mathcal{I}m \left[ \bar{I}_{xy,s} \bar{I}_{xy,r}^* \right].$$

Então, o torque eletromecânico desenvolvido é

$$T_{em} = \frac{P_{em}}{\omega_m} = \frac{3p}{4} L_m \mathcal{I}m \left[ \bar{I}_{xy,s} \cdot \bar{I}_{xy,r}^* \right] \quad (\text{vetores-corrente expressos em valores de pico}). \quad (8.50)$$

A expressão do torque desenvolvido não contém o termo relativo à velocidade angular do sistema de referência adotado, seja qual for o sistema de coordenadas.

Pode-se mostrar que existem oito expressões diferentes para o torque mecânico gerado em função das variáveis elétricas corrente e fluxo magnético. Se *as variáveis elétricas e magnéticas estão expressas em valores de pico*, têm-se as seguintes expressões:

1. Torque mecânico gerado em função dos vetores das correntes do estator e do rotor:

$$T_{em} = \frac{3p}{4} L_m \mathcal{I}m \left[ \bar{I}_{xy,s} \cdot \bar{I}_{xy,r}^* \right] = \frac{3p}{4} L_m [i_{ys} i_{xr} - i_{xs} i_{yr}]. \quad (8.51)$$

2. Torque mecânico gerado em função dos vetores corrente e fluxo do estator:

$$T_{em} = \frac{3p}{4} \mathcal{I}m \left[ \bar{I}_{xy,s} \cdot \bar{\psi}_{xy,s}^* \right] = \frac{3p}{4} [i_{ys} \psi_{xs} - i_{xs} \psi_{ys}]. \quad (8.52)$$

3. Torque mecânico gerado em função dos vetores corrente do estator e do fluxo do entreferro:

$$T_{em} = \frac{3p}{4} \mathcal{I}m \left[ \bar{I}_{xy,s} \cdot \bar{\psi}_{g,xy}^* \right] = \frac{3p}{4} [i_{ys} \psi_{xg} - i_{xs} \psi_{yg}].$$

4. Torque mecânico gerado em função dos vetores corrente do estator e do fluxo do rotor:

$$T_{em} = \frac{3p}{4} \frac{L_m}{L_r} \mathcal{I}m \left[ \bar{I}_{xy,s} \cdot \bar{\psi}_{xy,r}^* \right] = T_{em} = \frac{3p}{4} \frac{L_m}{L_r} [i_{ys} \psi_{xr} - i_{xs} \psi_{yr}]. \quad (8.53)$$

5. Torque mecânico gerado em função dos vetores fluxo do rotor e do estator:

$$T_{em} = \frac{3p}{4} \frac{L_m}{\sigma L_r L_s} \mathcal{I}m \left[ \bar{\psi}_{xy,s} \cdot \bar{\psi}_{xy,r}^* \right] = \frac{3p}{4} \frac{L_m}{\sigma L_r L_s} [\psi_{ys}\psi_{xr} - \psi_{xs}\psi_{yr}] . \quad (8.54)$$

6. Torque mecânico gerado em função dos vetores corrente do rotor e do fluxo do estator:

$$T_{em} = \frac{3p}{4} \frac{L_m}{L_s} \mathcal{I}m \left[ \bar{\psi}_{xy,s} \cdot \bar{I}_{xy,r}^* \right] = \frac{3p}{4} \frac{L_m}{L_s} [\psi_{xs}i_{yr} - \psi_{ys}i_{xr}] .$$

7. Torque mecânico gerado em função dos vetores corrente e fluxo do rotor:

$$T_{em} = \frac{3p}{4} \mathcal{I}m \left[ \bar{I}_{xy,r}^* \cdot \bar{\psi}_{xy,r} \right] = \frac{3p}{4} [i_{xr}\psi_{yr} - i_{yr}\psi_{xr}] . \quad (8.55)$$

8. Torque mecânico gerado em função dos vetores corrente do rotor e do fluxo do entreferro:

$$T_{em} = \frac{3p}{4} \mathcal{I}m \left[ \bar{I}_{xy,r}^* \cdot \bar{\psi}_{g,xy} \right] = \frac{3p}{4} [i_{xr}\psi_{yg} - i_{yr}\psi_{xg}] .$$

### 8.3.4 Os modelos descritos em variáveis de estado

#### Fluxos Magnéticos Concatenados

Para o modelo da máquina de indução, tendo como variáveis de estado os fluxos concatenados, as correntes devem ser escritas em função dos fluxos. A solução do sistema formado pelas Equações (8.41) e (8.43) resulta nas seguintes expressões:

$$\bar{I}_{xy,s} = \frac{\bar{\psi}_{xy,s} - k_r \bar{\psi}_{xy,r}}{\sigma L_s} \quad (8.56)$$

$$\bar{I}_{xy,r} = \frac{\bar{\psi}_{xy,r} - k_s \bar{\psi}_{xy,s}}{\sigma L_r} \quad (8.57)$$

nas quais

$$k_s = L_m / L_s$$

$$k_r = L_m / L_r$$

são os fatores de *acoplamento do estator e rotor*, respectivamente, e

$$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r} = 1 - k_s k_r$$

é o denominado *coeficiente total de dispersão*.

É usual na análise de máquinas de indução definir as *indutâncias transitórias*  $L'_s$  e  $L'_r$ . A primeira é a indutância vista pelo lado do estator, quando os terminais do rotor estão curto-circuitados; a segunda, por sua vez, é a indutância vista pelo rotor, quando o estator está curto-circuitado; assim sendo, elas são definidas pelas relações

$$L'_s = \sigma L_s$$

$$L'_r = \sigma L_r$$

que dão origem às constantes de tempo transitórias do estator e rotor

$$\tau'_s = \sigma L_s / R_s$$

$$\tau'_r = \sigma L_r / R_r .$$

A substituição das expressões dos vetores corrente do estator e do rotor, dadas por (8.56) e (8.57) , respectivamente nas Equações de tensão (8.42) e (8.44), têm-se

$$\begin{bmatrix} \frac{d\bar{\psi}_{xy,s}}{dt} \\ \frac{d\bar{\psi}_{xy,r}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j\omega_a - \frac{1}{\tau'_s} & \frac{k_r}{\tau'_s} \\ \frac{k_s}{\tau'_r} & -j(\omega_a - \omega_r) - \frac{1}{\tau'_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{xy,s} \\ \bar{\psi}_{xy,r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_{xy,s} \\ \bar{V}_{xy,r} \end{bmatrix}$$

que escrita em função dos componentes dos eixos  $x$  e  $y$ , resultam nas seguintes matrizes da formulação espaço de estado:

$$X = [\psi_{xs} \quad \psi_{ys} \quad \psi_{xr} \quad \psi_{yr}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau'_s} & \omega_a & \frac{k_r}{\tau'_s} & 0 \\ -\omega_a & -\frac{1}{\tau'_s} & 0 & \frac{k_r}{\tau'_s} \\ \frac{k_s}{\tau'_r} & 0 & -\frac{1}{\tau'_r} & (\omega_a - \omega_r) \\ 0 & \frac{k_s}{\tau'_r} & -(\omega_a - \omega_r) & -\frac{1}{\tau'_r} \end{bmatrix}$$

$$U = [V_{xs} \quad V_{ys} \quad V_{xr} \quad V_{yr}]^T .$$

O modelo da máquina de indução é completado pela equação do movimento

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_{em} - T_{ext} \quad (8.58)$$

na qual o torque desenvolvido  $T_{em}$  é dado pela Equação (8.54).

### Correntes elétricas

Se forem escolhidas as correntes como variáveis de estado, deve-se escrever os fluxos em função das correntes, como dadas pelas Equações (8.41) e (8.43). A substituição dessas expressões nas Equações (8.42) e (8.44) resulta na seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\bar{I}_{xy,s}}{dt} \\ \frac{d\bar{I}_{xy,r}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau'_s} - j \frac{\omega_a L_s - (\omega_a - \omega_r) k_r L_m}{L'_s} & \frac{k_s}{\tau'_r} - j \frac{\omega_r L_m}{L'_s} \\ j \frac{\omega_r k_r L_s}{L'_s} + \frac{k_r}{\tau'_s} & -\frac{1}{\tau'_r} + j \frac{\omega_a k_s L_m - (\omega_a - \omega_r) L_r}{L'_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{xy,s} \\ \bar{I}_{xy,r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L'_s} & -\frac{k_r}{L'_s} \\ -\frac{k_s}{L'_r} & \frac{1}{L'_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_{xy,s} \\ \bar{V}_{xy,r} \end{bmatrix} \quad (8.59)$$

que escrita em função dos componentes do eixo  $x$  e  $y$ , resultam nas seguintes matrizes da formulação espaço de estado:

$$X = [i_{xs} \quad i_{ys} \quad i_{xr} \quad i_{yr}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau'_s} & \frac{\omega_a(L_s - k_r L_m) + \omega_r k_r L_m}{L'_s} & \frac{k_s}{\tau'_r} & \frac{\omega_r L_m}{L'_s} \\ \frac{\omega_a(k_r L_m - L_s) - \omega_r k_r L_m}{L'_s} & -\frac{1}{\tau'_s} & -\frac{\omega_r L_m}{L'_s} & \frac{k_s}{\tau_r} \\ \frac{k_r}{\tau'_1} & -\frac{\omega_r k_r L_s}{L'_s} & -\frac{1}{\tau'_r} & \frac{\omega_a(L_r - k_s L_m) - \omega_r L_r}{L'_r} \\ \frac{\omega_r k_r L_s}{L'_s} & \frac{k_r}{\tau'_s} & \frac{\omega_a(k_s L_m - L_r) + \omega_r L_r}{L'_r} & -\frac{1}{\tau'_r} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L'_s} & 0 & -\frac{k_r}{L'_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L'_s} & 0 & -\frac{k_r}{L'_s} \\ -\frac{k_s}{L'_2} & 0 & \frac{1}{L'_r} & 0 \\ 0 & -\frac{k_s}{L'_r} & 0 & \frac{1}{L'_r} \end{bmatrix}$$

$$U = [v_{xs} \quad v_{ys} \quad v_{xr} \quad v_{yr}]^T .$$

O modelo da máquina de indução é completado pela Equação do movimento (8.58) e o torque desenvolvido  $T_{em}$  é dado pela Equação (8.51).

Ao se comparar os modelos matemáticos da máquina de indução obtidos nessa seção, observa-se que o modelo descrito pelos fluxos magnéticos é mais simples do que aquele que tem as correntes como variáveis de estado.

### Corrente do estator e fluxo concatenado do rotor

Quando o controle da máquina de indução é realizado por orientação do fluxo do rotor, escolhe-se a corrente do estator e o fluxo do rotor como variáveis de estado. Inicialmente, é explicitado o vetor corrente do rotor na Equação (8.43), o que resulta no vetor corrente

$$\bar{I}_{xy,r} = \frac{\bar{\psi}_{xy,r} - L_m \bar{I}_{xy,s}}{L_r}$$

que substituído em (8.44), resulta na equação do fluxo do rotor dada por

$$\frac{d\bar{\psi}_{xy,r}}{dt} = - \left( \frac{R_r}{L_r} + j(\omega_a - \omega_r) \right) \bar{\psi}_{xy,r} + k_r R_r \bar{I}_{xy,s} + \bar{V}_{xy,r} . \quad (8.60)$$

Combinando-se as Equações (8.41) e (8.65) obtém-se

$$\bar{\psi}_{xy,s} = L'_s \bar{I}_{xy,s} + k_r \bar{\psi}_{xy,r}$$

que substituída em (8.42) resulta na equação do vetor tensão do estator dada por

$$\bar{V}_{xy,s} = R_s \bar{I}_{xy,s} + L'_s \frac{d\bar{I}_{xy,s}}{dt} + k_r \frac{d\bar{\psi}_{xy,r}}{dt} + j\omega_a (L'_s \bar{I}_{xy,s} + k_r \bar{\psi}_{xy,r}) .$$

O termo relativo à derivada do fluxo do rotor presente nesta equação é substituído por aquele dado pela expressão (8.60), obtendo-se a forma final da equação do vetor corrente do estator dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{I}_{xy,s}}{dt} = & - \left( \frac{R_s + k_r^2 R_r}{L'_s} + j\omega_a \right) \bar{I}_{xy,s} + \left( \frac{k_r R_r}{L'_s L_r} - j \frac{k_r}{L'_s} \omega_r \right) \bar{\psi}_{xy,r} \\ & + \frac{1}{L'_s} \bar{V}_{xy,s} - \frac{k_r}{L'_s} \bar{V}_{xy,r} . \end{aligned} \quad (8.61)$$

Se as Equações (8.60) e (8.61) são explicitadas, segundo os eixos  $x$  e  $y$  do sistema de referência genérico, elas resultam nas seguintes matrizes da formulação espaço de estado:

$$X = [i_{xs} \quad i_{ys} \quad \psi_{xr} \quad \psi_{yr}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_s + k_r^2 R_r}{L'_s} & \omega_a & \frac{k_r R_r}{L_r L'_s} & \frac{k_r \omega_r}{L'_s} \\ -\omega_a & -\frac{R_s + k_r^2 R_r}{L'_s} & -\frac{k_r \omega_r}{L'_s} & \frac{k_r R_r}{L_r L'_s} \\ k_r R_r & 0 & -\frac{R_r}{L_r} & \omega_a - \omega_r \\ 0 & k_r R_r & -(\omega_a - \omega_r) & -\frac{R_r}{L_r} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L'_s} & 0 & -\frac{k_r}{L'_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L'_s} & 0 & -\frac{k_r}{L'_s} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = [v_{xs} \quad v_{ys} \quad v_{xr} \quad v_{yr}]^T .$$

O modelo da máquina de indução é completado pela equação do movimento (8.58), na qual o torque desenvolvido  $T_{em}$  é dado pela Equação (8.53).

### Corrente e fluxo concatenado do estator

A equação para o fluxo do estator é obtida ao se reescrever convenientemente (8.42), isto é,

$$\frac{d\bar{\psi}_{xy,s}}{dt} = -R_s \bar{I}_{xy,s} - j\omega_a \bar{\psi}_{xy,s} + \bar{V}_{xy,s} . \quad (8.62)$$

O fluxo do rotor escrito em função de  $\bar{I}_{xy,s}$  e  $\bar{\psi}_{xy,s}$  é obtido explicitando-se inicialmente  $\bar{I}_{xy,r}$  em (8.41), para em seguida substituir a expressão resultante em (8.43), o que estabelece a equação

$$\bar{\psi}_{xy,r} = \frac{\bar{\psi}_{xy,s}}{k_r} - \frac{L'_s}{k_r} \bar{I}_{xy,s} . \quad (8.63)$$

A substituição em (8.60), primeiramente da Equação (8.63) e, em seguida, da Equação (8.62), após alguma manipulação algébrica, obtém-se a forma final da expressão do vetor corrente do rotor:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{I}_{xy,s}}{dt} = & \left[ -\left( \frac{R_s + k_r^2 R_r}{L'_s} + \frac{R_r}{L_r} + j(\omega_a - \omega_r) \right) \right] \bar{I}_{xy,s} + \\ & + \left( \frac{R_r}{L_r L'_s} - j \frac{\omega_r}{L'_s} \right) \bar{\psi}_{xy,s} + \frac{1}{L'_s} \bar{V}_{xy,s} - \frac{k_r}{L'_s} \bar{V}_{xy,r} . \end{aligned} \quad (8.64)$$

As correspondentes matrizes da formulação espaço de estado relativas às expressões (8.63) e (8.64) são as seguintes:

$$X = [i_{xs} \quad i_{ys} \quad \psi_{xs} \quad \psi_{ys}]^T$$



$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{R_s+k_r^2 R_r}{L'_s} + \frac{R_r}{L_r}\right) & (\omega_a - \omega_r) & \frac{R_r}{L_r L'_s} & \frac{\omega_r}{L'_s} \\ -(\omega_a - \omega_r) & -\left(\frac{R_s+k_r^2 R_r}{L'_s} + \frac{R_r}{L_r}\right) & -\frac{\omega_r}{L'_s} & \frac{R_r}{L_r L'_s} \\ -R_s & 0 & 0 & \omega_a \\ 0 & -R_s & -\omega_a & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L'_s} & 0 & -\frac{k_r}{L'_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L'_s} & 0 & -\frac{k_r}{L'_s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = [v_{xs} \quad v_{ys} \quad v_{xr} \quad v_{yr}]^T.$$

O modelo da máquina de indução é completado pela equação do movimento (8.58), na qual o torque desenvolvido  $T_{em}$  é dado pela Equação (8.52).

### Corrente e fluxo concatenado do rotor

A equação para o fluxo do rotor é obtida ao se reescrever convenientemente (8.44), isto é,

$$\frac{d\bar{\psi}_{xy,r}}{dt} = -R_r \bar{I}_{xy,r} - j(\omega_a - \omega_r) \bar{\psi}_{xy,r} + \bar{V}_{xy,r}.$$

Se o vetor  $\bar{I}_{xy,s}$ , presente em (8.43), é explicitado, tem-se

$$\bar{I}_{xy,s} = \frac{\bar{\psi}_{xy,r} - L_r \bar{I}_{xy,r}}{L_m} \quad (8.65)$$

que substituída em (8.41) origina a equação

$$\bar{\psi}_{xy,s} = \frac{\bar{\psi}_{xy,r}}{k_s} - \frac{L'_r}{k_s} \bar{I}_{xy,r}. \quad (8.66)$$

Ao substituir as Equações (8.65) e (8.66) em (8.42) obtém-se a seguinte forma final da equação de estado para a corrente do rotor:

$$\frac{d\bar{I}_{xy,r}}{dt} = -\left(\frac{R_s}{L'_s} + \frac{R_r}{L'_r} + j\omega_a\right) \bar{I}_{xy,r} + \left(\frac{R_s}{L_s L'_r} + j\frac{\omega_r}{L'_r}\right) \bar{\psi}_{xy,r} - \frac{k_s}{L'_r} \bar{V}_{xy,s} + \frac{1}{L'_r} \bar{V}_{xy,r}.$$

As correspondentes matrizes da representação de estado são dadas por

$$X = [i_{xr} \quad i_{yr} \quad \psi_{xr} \quad \psi_{yr}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{R_s}{L'_s} + \frac{R_r}{L'_r}\right) & \omega_a & \frac{R_s}{L_s L'_r} & -\frac{\omega_r}{L'_r} \\ -\omega_a & -\left(\frac{R_s}{L'_s} + \frac{R_r}{L'_r}\right) & \frac{\omega_r}{L'_r} & \frac{R_s}{L_s L'_r} \\ -R_r & 0 & 0 & (\omega_a - \omega_r) \\ 0 & -R_r & -(\omega_a - \omega_r) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{L'_r} & 0 & \frac{1}{L'_r} & 0 \\ 0 & -\frac{k_s}{L'_r} & 0 & \frac{1}{L'_r} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = [i_{xr} \quad i_{yr} \quad \psi_{xr} \quad \psi_{yr}]^T .$$

O modelo da máquina de indução é completado pela equação do movimento (8.58), na qual o torque desenvolvido  $T_{em}$  é dado pela Equação (8.55).

## 8.4 O modelo no sistema de referência síncrono

Designando-se as coordenadas do sistema de referência síncrono pelos subscritos  $d$  e  $q$ , em substituição respectivamente à  $x$  e  $y$  do sistema genérico, e substituindo-se  $\omega_a$  por  $\omega_1$  nas Equações (8.39) e (8.40), para se obter os seguintes vetores corrente do estator e rotor, expressos em valores de pico:

$$\bar{I}_{dq,s} = \bar{I}_{\alpha\beta,s} e^{-j\omega_1 t} = \underbrace{\frac{3k}{2} I_s e^{j\varphi_{i1}}}_{\hat{I}_s} \quad (\text{vetor corrente do estator no referencial síncrono}) \quad (8.67)$$

e

$$\bar{I}_{dq,r} = \bar{I}_{\alpha\beta,r} e^{-j\omega_1 t} = \underbrace{\frac{3k}{2} I_r e^{j\varphi_{i2}}}_{\hat{I}_r} \quad (\text{vetor corrente do rotor no referencial síncrono}) . \quad (8.68)$$

Como se observa nesta última equação, se a máquina está em regime permanente, os vetores das correntes do estator e do rotor são grandezas contínuas, diferentemente do sistema estacionário, cujos vetores espaciais são grandezas alternadas de frequência elétrica igual à frequência elétrica do estator (expressão (8.11)). Ressalte-se ainda que a amplitude dos vetores, descritos nas coordenadas síncronas, são iguais aos fasores das grandezas correspondentes, como destacados nas Equações (8.67) e (8.68).

Se o mesmo procedimento da obtenção dos vetores corrente é empregado às tensões elétricas, têm-se os vetores da tensão do estator e do rotor dados respectivamente por

$$\bar{V}_{dq,s} = \frac{3k}{2} V_s (\cos \varphi_{v1} + j \text{sen} \varphi_{v1}) \quad (\text{vetor tensão do estator no referencial síncrono})$$

$$\bar{V}_{dq,r} = \frac{3k}{2} V_r (\cos \varphi_{v2} + j \text{sen} \varphi_{v2}) \quad (\text{vetor tensão do rotor referencial síncrono}) .$$

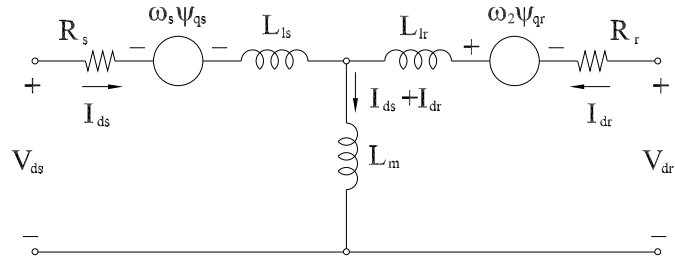
Ao substituir  $\omega_a$  pela velocidade síncrona  $\omega_1$  nas Equações (8.42) e (8.44), obtêm-se as correspondentes equações de equilíbrio das tensões do estator e do rotor escritas no referencial síncrono e na forma de vetores, dadas por

$$\bar{V}_{dq,s} = R_s \bar{I}_{dq,s} + \frac{d\bar{\psi}_{dq,s}}{dt} + j\omega_1 \bar{\psi}_{dq,s} \quad (8.69)$$

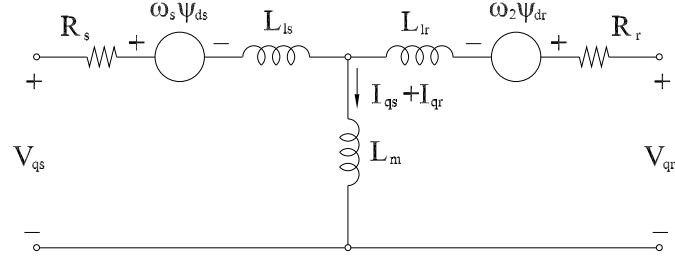
$$\bar{V}_{dq,r} = R_r \bar{I}_{dq,r} + \frac{d\bar{\psi}_{dq,r}}{dt} + j\omega_2 \bar{\psi}_{dq,r} \quad (8.70)$$

nas quais

$$\omega_2 = s\omega_1 = \omega_1 - (p/2)\omega_m$$



(a) fase de eixo direto



(b) fase de eixo de quadratura

Figura 8.6: Circuitos equivalentes de eixos direto e de quadratura.

é a frequência de escorregamento. Os vetores espaciais fluxo do estator e do rotor no sistema síncrono são dados respectivamente por

$$\bar{\psi}_{dq,s} = L_s \bar{I}_{dq,s} + L_m \bar{I}_{dq,r}$$

$$\bar{\psi}_{dq,r} = L_m \bar{I}_{dq,s} + L_r \bar{I}_{dq,r} .$$

Os fluxos do estator e do rotor nas coordenadas síncronas e em função do fluxo do entreferro são escritos a partir das Equações (8.45) e (8.46), resultando nas relações

$$\bar{\psi}_{dq,s} = L_{ls} \bar{I}_{dq,s} + \bar{\psi}_{dq,g} \quad (8.71)$$

$$\bar{\psi}_{dq,r} = L_{lr} \bar{I}_{dq,r} + \bar{\psi}_{dq,g} \quad (8.72)$$

para o vetor fluxo do entreferro definido por

$$\bar{\psi}_{dq,g} = L_m \underbrace{(\bar{I}_{dq,s} + \bar{I}_{dq,r})}_{\hat{I}_m} . \quad (8.73)$$

Como assinalado nesta equação, o vetor espacial  $\hat{I}_m$  é associada à produção do fluxo de entreferro e, por esta razão, geralmente é denominada corrente de magnetização.

Os circuitos equivalentes de eixo direto  $d$  e de quadratura  $q$ , mostrados na Figura 8.6, são obtidos após escrever as equações (8.69) (8.70) na forma cartesiana.

Denominando-se as variáveis trifásicas por  $X_a$ ,  $X_b$  e  $X_c$  e as variáveis no sistema síncrono por  $X_d$ ,  $X_q$  e  $X_0$ , escrevem-se as seguintes matrizes de transformação:

$$\begin{bmatrix} X_d \\ X_q \\ X_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_s) & \cos(\theta_s - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_s + \frac{2\pi}{3}) \\ -\text{sen}(\theta_s) & -\text{sen}(\theta_s - \frac{2\pi}{3}) & -\text{sen}(\theta_s + \frac{2\pi}{3}) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a(t) \\ X_b(t) \\ X_c(t) \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} X_a \\ X_b \\ X_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_s) & \cos(\theta_s - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_s + \frac{2\pi}{3}) \\ -\text{sen}(\theta_s) & -\text{sen}(\theta_s - \frac{2\pi}{3}) & -\text{sen}(\theta_s + \frac{2\pi}{3}) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_d(t) \\ X_q(t) \\ X_0(t) \end{bmatrix}.$$

## 8.5 Equações em p.u.

Os valores das impedâncias internas das máquinas elétricas (transformador ou máquinas elétricas rotativas) são fortemente dependentes de sua tensão e potência nominais. Se as equações são escritas em grandezas *por unidade* (*p.u.*), as impedâncias têm valores dentro de uma faixa característica para cada tipo e construção da máquina em questão. O sistema p.u. é útil em sistemas de potência porque torna a relação de espiras entre o primário e o secundário dos transformadores igual a um, simplificando sobremaneira a análise. Nas máquinas elétricas rotativas ele pode facilitar a análise de estabilidade, bem como as implementações digitais.

Expressar uma dada grandeza em p.u. significa normalizar o seu valor em relação à grandeza correspondente, para a qual se escolhe arbitrariamente um *valor de base*, isto é, dividir o valor da grandeza pelo correspondente valor de base escolhido. Na modelagem dos dispositivos eletromagnéticos são empregadas diversas grandezas e, por esta razão, é necessário estabelecer-se um *sistema de valores de base*. Inicialmente, são escolhidas grandezas ditas primárias, com seus respectivos valores de base e, a partir delas são obtidos os demais valores do sistema por unidade.

Neste texto, as grandezas primárias de base escolhidas são *os valores nominais de pico da tensão e da corrente de fase do estator em estrela e a frequência angular nominal*, isto é,

$$V_{base} = V_N \quad (\text{valor de pico})$$

$$I_{base} = I_N \quad (\text{valor de pico})$$

e

$$\omega_{base} = \omega_N = 2\pi f_N$$

na qual  $f_N$  é a frequência elétrica nominal.

Considerando uma máquina de  $p$  pólos e  $m$  fases, são obtidos os demais valores de base que formam o sistema p.u.:

$$\psi_{base} = \frac{V_N}{\omega_N}$$

$$Z_{base} = \frac{V_N}{I_N}$$

$$\omega_{m,base} = \frac{\omega_N}{p/2}.$$

A potência aparente trifásica de base é obtida considerando os valores de pico nominais da tensão e da corrente, isto é,

$$S_{base} = 3 \frac{V_N}{\sqrt{2}} \frac{I_N}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} V_N I_N$$

a partir da qual se tem o torque de base

$$T_{base} = \frac{S_{base}}{\omega_{m,base}} = \frac{3p}{4} \frac{V_N I_N}{\omega_N}. \quad (8.74)$$

Ao se dividir e multiplicar convenientemente pelos respectivos valores de base os termos da equação da tensão do estator (8.42) obtém-se

$$\left(\frac{\bar{V}_{xy,s}}{V_N}\right) V_N = \left(\frac{R_s}{Z_N}\right) \frac{V_N}{I_N} \left(\frac{\bar{I}_{xy,s}}{I_N}\right) I_N + \frac{d(\bar{\psi}_{xy,s}/\psi_N)}{dt} \frac{V_N}{\omega_N} + j \left(\frac{\omega_a}{\omega_N}\right) \omega_N \left(\frac{\bar{\psi}_{xy,s}}{\psi_N}\right) \frac{V_N}{\omega_N}$$

que, após algumas simplificações e definir-se

$$\tau = \omega_N t$$

tem-se finalmente a equação escrita em p.u.

$$\bar{V}_{xy,s} = R_s \bar{I}_{xy,s} + \frac{d\bar{\psi}_{xy,s}}{d\tau} + j\omega_a \bar{\psi}_{xy,s} . \quad (8.75)$$

Embora tenha-se explicitado nesta equação que as grandezas estão em p.u., observe a semelhança entre esta e aquela expressa nas grandezas físicas ditas naturais (Equação (8.42)); a única diferença é que a derivada da velocidade é em relação ao tempo normalizado  $\tau$ . O mesmo procedimento empregado na obtenção de (8.75) é repetido para a equação da tensão do rotor (8.44) e, dessa forma, tem-se

$$\bar{V}_{xy,r} = R_r \bar{I}_{xy,r} + \frac{d\bar{\psi}_{xy,r}}{d\tau} + j(\omega_a - \omega_r) \bar{\psi}_{xy,r} .$$

As expressões do torque desenvolvido em p.u. decorre diretamente do emprego do torque de base. Assim sendo, o torque em função dos vetores corrente e fluxo do estator em p.u. é

$$\frac{T_{em}}{T_{base}} = \frac{3p/4 \mathcal{I}m \left[ \bar{I}_{xy,s} \cdot \bar{\psi}_{xy,s}^* \right]}{3p/4 V_N I_N / \omega_N}$$

ou seja,

$$T_{em} = \mathcal{I}m \left[ \bar{I}_{xy,s} \cdot \bar{\psi}_{xy,s}^* \right] .$$

Na obtenção da equação do movimento em p.u., repete-se o procedimento adotado até agora para as outras equações, o que origina

$$\frac{J\omega_N^2/(p/2)}{3pV_N I_N/4\omega_N} \frac{d(\omega_m/\omega_{m,base})}{d(\omega_N t)} = \frac{T_{em}}{T_{base}} - \frac{T_{ext}}{T_{base}}$$

que escrita em uma forma mais apropriada torna-se

$$J \frac{\omega_N^3/(p/2)^2}{3/2 V_N I_N} \frac{d\omega_m}{d\tau} = T_{em} - T_{ext} . \quad (8.76)$$

É usual empregar na modelagem de máquinas elétricas, principalmente no estudo de oscilações de máquinas síncronas, a conhecida *constante de inércia*  $H$ , que é definida como sendo o tempo que o rotor, inicialmente parado, leva para atingir a velocidade síncrona nominal  $2\omega_N/p$ , *quando o torque de aceleração é constante*; em conseqüência destas condições, a aceleração é constante e dada por

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{2\omega_N}{pH}$$

que, substituída na equação eletromecânica (8.58), origina a relação

$$H = J \frac{2\omega_N}{pT_{acel}} .$$

Geralmente, o torque de aceleração é o torque de base dado pela Equação (8.74) e, conseqüentemente, a constante de inércia é

$$H = J \frac{(2\omega_N/p)^2}{3/2 V_N I_N} . \quad (8.77)$$

Uma outra definição da constante de inércia é encontrada na literatura de máquinas elétricas: ela é aquela dada pelo quociente entre a energia cinética armazenada no rotor girando na velocidade mecânica síncrona (valor nominal) e a potência aparente de base  $S_B$ . Denominando-se esta constante por  $H_p$  tem-se, então,

$$H_p = \frac{\frac{1}{2} J (2\omega_N/p)^2}{3/2 V_N I_N}$$

que comparada com aquela obtida com torque de aceleração constante, resulta na relação

$$H = 2 H_p .$$

A equação eletromecânica em p.u. pode ser escrita em função de  $H$ , bastando relacionar o coeficiente da aceleração em (8.76) com a definição dada em (8.77), o que resulta em

$$H\omega_N \frac{d\omega_m}{d\tau} = T_{em} - T_m .$$

## Exercícios

**8.1** Mostre que para o estator conectado em estrela e a três fios, a potência instantânea pode ser determinada a partir de duas tensões e duas correntes de linha:

$$p(t) = v_{ab}(t)i_a(t) + v_{cb}(t)i_c(t) .$$

**8.2** Se os vetores corrente e tensão de estator são dados respectivamente pelas Equações (8.11) e (8.22), mostre que a potência instantânea associada ao campo eletromagnético é invariante, isto é,

$$p(t) = v_{as}(t)i_{as}(t) + v_{bs}(t)i_{bs}(t) + v_{cs}(t)i_{cs}(t) = v_{\alpha s}i_{\alpha s} + v_{\beta s}i_{\beta s} + 3v_0i_0$$

na qual  $v_{as}(t)$ ,  $v_{bs}(t)$  e  $v_{cs}(t)$  são as tensões de terminal das fases do trifásico.

**8.3** Mostre que para o sistema trifásico no qual os vetores corrente e tensão são definidos, respectivamente, pelas expressões (8.13) e (8.22), a potência instantânea é

$$p(t) = v_{\alpha s}(t)i_{\alpha s}(t) + v_{\beta s}(t)i_{\beta s}(t) + 3v_0i_0 .$$

**8.4** Uma dada máquina de indução com o estator conectado em estrela, sem o fio de neutro, é alimentada por uma fonte trifásica que tem as seguintes tensões de linha:

$$v_{ab}(t) = \sqrt{2} 380 \cos 377t \quad v_{bc}(t) = \sqrt{2} 380 \cos(377t - 2\pi/3) \quad v_{ca}(t) = \sqrt{2} 380 \cos(377t + 2\pi/3) .$$

Expressar o vetor espacial representativo das tensões de fase do estator nos seguintes sistemas de coordenadas:

- (a) Estacionário
- (b) Síncrono
- (c) Fixado no rotor.

**8.5** Se são medidas as tensões de linha  $v_{ab}(t)$  e  $v_{bc}(t)$  e as correntes  $i_a(t)$  e  $i_b(t)$  de um sistema trifásico em três fios, adote  $k = 2/3$  e obtenha as seguintes expressões:

- (a)  $v_{\alpha s}(t) = (2v_{ab} + v_{bc})/3$
- (b)  $v_{\beta s}(t) = v_{bc}/3$
- (c)  $i_{\alpha s}(t) = i_a(t)$  e  $i_{\beta s}(t) = (i_a + 2i_b)/\sqrt{3}$ .

**8.6** Mostre que as componentes das correntes do estator, escritos no sistema estacionário, podem ser determinados a partir das correntes originais de fase dadas pelas seguintes relações:

- (a)  $i_{\alpha s}(t) = i_{as}(t)$        $i_{\beta s}(t) = -1/\sqrt{3}(2i_{cs} + i_{as})$   
 (b)  $i_{\alpha s}(t) = i_{as}(t)$        $i_{\beta s}(t) = 1/\sqrt{3}(2i_{bs} + i_{as})$   
 (c)  $i_{\alpha s}(t) = -(i_{bs}(t) + i_{cs})$        $i_{\beta s}(t) = 1/\sqrt{3}(i_{bs} - i_{cs})$

**8.7** As correntes de linha  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$  e  $i_c(t)$  escritas em função das correntes de fase  $i_{ab}(t)$ ,  $i_{bc}(t)$  e  $i_{ca}(t)$  do estator conectado em triângulo são dadas pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} i_a(t) &= i_{ab}(t) - i_{ca}(t) \\ i_b(t) &= i_{bc}(t) - i_{ab}(t) \\ i_c(t) &= i_{ca}(t) - i_{bc}(t). \end{aligned}$$

Se o vetor espacial representativo das correntes de linha é

$$\bar{I}_L = 2/3[i_a(t) + a i_b(t) + a^2 i_c(t)]$$

mostre que o vetor espacial das correntes de fase é

$$\bar{I}_{fase} = j \frac{\bar{I}_L(t)}{\sqrt{3}}.$$

**8.8** As tensões de linha  $v_{ab}(t)$ ,  $v_{bc}(t)$  e  $v_{ca}(t)$  escritas em função das tensões de fase  $v_{an}(t)$ ,  $v_{bn}(t)$  e  $v_{cn}(t)$  do estator conectado em Y são dadas pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} v_{ab}(t) &= v_{an}(t) - v_{bn}(t) \\ v_{bc}(t) &= v_{bn}(t) - v_{cn}(t) \\ v_{ca}(t) &= v_{cn}(t) - v_{an}(t). \end{aligned}$$

Se o vetor espacial representativo das tensões de linha é

$$\bar{V}_L = 2/3[v_{bc}(t) + e^{j2\pi/3} v_{ca}(t) + e^{j4\pi/3} v_{ab}(t)]$$

mostre que o vetor espacial das tensões de fase é

$$\bar{V}_{fase} = j \frac{\bar{V}_L(t)}{\sqrt{3}}.$$

**8.9** Mostrar, a partir do Exemplo 8.2 que os oito possíveis vetores de tensão do inversor trifásico podem ser descritos por

$$\begin{aligned} \bar{V}_k &= \frac{2}{3} V_{cc} e^{j(k-1)\pi/3} \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \dots 6 \\ \bar{V}_k &= 0 \quad \text{para } n = 7, 8. \end{aligned}$$

**8.10** Um motor trifásico toma da rede a corrente de 10 A eficazes a um fator de potência 0,86 indutivo. As tensões em cada fase são as mesmas do exercício 8.4. Calcular a potência instantânea através do uso dos vetores espaciais definidos no sistema síncrono.

**8.11** Os terminais a e b do estator de uma máquina trifásica são conectados aos terminais de uma fonte contínua  $V_{cc}$ , enquanto o terminal c é deixado desligado – o que significa  $i_c = 0$ . Se a máquina tem p pólos e o rotor é em gaiola, determinar as expressões dos componentes de tensão do estator, das correntes do estator e do rotor nas coordenadas  $\alpha\beta$ .

**8.12** Para o Exercício (8.11), determinar a expressão do torque mecânico gerado em função dos parâmetros da máquina refletidos ao estator ( $R_s$ ,  $R_r$ ,  $L_s$ ,  $L_r$  e  $L_m$ ), da tensão contínua e da velocidade mecânica do motor  $\omega_m$ .

**8.13** Um motor trifásico, de dupla gaiola, 350 hp, 380 V, 4 pólos e 60 Hz tem os seguintes parâmetros do circuito equivalente Y:  $R_s = 0,012 \Omega$ ,  $L_m = 16,58 mH$ ,  $\sigma_s = 0,022$ ,  $\sigma_r = 0,032$  e  $R_r = 0,009 \Omega$ . A sua velocidade nominal é 1.790 rot/min e o momento de inércia do rotor é  $6,280 Kg \cdot m^2$ .

Adotar  $k = 2/3$  e simular a partida – com tensão e freqüência nominais – do motor de indução a vazio, nos sistemas de coordenadas estacionário, síncrono e girando na velocidade do rotor, considerando nulo o torque de perdas. Obter o comportamento das seguintes grandezas:

- Velocidade instantânea;
- Correntes e tensões instantâneas de fase do estator e do rotor;
- Fluxos instantâneos concatenados pelas fases do estator e do rotor;
- Torque instantâneo desenvolvido pelo motor ;
- Característica dinâmica escorregamento-torque desenvolvido.

**8.14** Refaça o problema anterior assumindo:

- Inércia conectada ao eixo do motor de  $5J_m$ ;
- Torque de perdas igual a  $2 N \cdot m$  e sem inércia acoplada ao eixo.

**8.15** Considere a velocidade obtida no item (b) do exercício anterior e determine os valores de regime permanente dos vetores corrente e fluxo concatenado do estator nos sistemas de coordenadas estacionário e síncrono. Compare com aqueles obtidos na simulação digital.

**8.16** Mostre que

$$\begin{aligned} I_{\alpha s} &= I_{ds} \cos \omega_1 t - I_{qs} \text{sen} \omega_1 t \\ I_{\beta s} &= I_{ds} \text{sen} \omega_1 t + I_{qs} \cos \omega_1 t . \end{aligned}$$

**8.17** Mostre que a relação entre o vetor espacial fluxo do estator  $\bar{\psi}_{dq,s}$  e o do rotor  $\bar{\psi}_{dq,r}$  da máquina de indução é dada por

$$\bar{\psi}_{dq,r} = \frac{L_r}{L_m} (\bar{\psi}_{dq,s} - \sigma L_s \bar{I}_{dq,s}) .$$

**8.18** Assuma  $R_s = 0$  e mostre que, no regime permanente da máquina de indução do rotor gaiola de esquilo, a relação do exercício anterior torna-se

$$\bar{\psi}_{dq,r} = - \frac{L_r}{L_m} \left( j \frac{\bar{V}_{dq,s}}{\omega_1} + \sigma L_s \bar{I}_{dq,s} \right) .$$

**8.19** Determine, para a máquina de indução do Exercício 8.13, (a) os valores do sistema de base, (b) os valores em p.u. dos parâmetros e (c) a constante de inércia  $H$ .





## Capítulo 9

# Regime Permanente de Máquinas de Indução

As máquinas de indução são muito utilizadas por serem mais baratas, mais robustas e menores quando comparadas às contínuas e síncronas de mesma potência. Em relação às máquinas de corrente contínua, as de indução são de controle mais complexo por terem a frequência elétrica como uma variável adicional a ser controlada e as relações torque×velocidade e torque×fluxo do entreferro serem não lineares, características que trazem complicações ao projeto do sistema de controle empregado.

Nicola Tesla, inventor e engenheiro, nascido na Croácia, e Galileo Ferraris, físico da Universidade de Turin, sem que tivessem qualquer tipo de cooperação mútua, inventaram o motor de indução a partir do princípio do campo girante; Ferraris construiu em 1885 um estator de quatro pólos salientes, que alimentados por tensões defasadas entre si, provocava a rotação de um rotor cilíndrico, feito de cobre; Tesla, por sua vez, em 1886, construiu o seu motor utilizando um estator cilíndrico (forma de anel), em torno do qual foi colocado dois enrolamentos defasados entre si de 90 graus mecânicos e um rotor cilíndrico com bobinas; Tesla, um inventor voltado para soluções de problemas, teve consciência de sua descoberta, e este fato lhe deu o direito da patente relativa à invenção do motor de indução na disputa com Ferraris.

### 9.1 Circuito equivalente e diagramas fasoriais

No estudo do regime permanente, o interesse é sobre as relações entre os valores eficazes entre tensões e correntes; as equações do regime permanente bem como do circuito equivalente correspondente da máquina de indução podem ser obtidos a partir de suas equações escritas no sistema de referência síncrono, no qual a amplitude de cada um dos vetores espaciais das variáveis elétricas e magnéticas são fasores, que, vistos do sistema síncrono, são grandezas contínuas (revise a seção 8.4). Adicionalmente, escolhe-se  $k = 2/3$  para que a amplitude do fasor seja igual à amplitude da variável de fase, o que significa, por exemplo, que o fasor da corrente de estator é dado por

$$\widehat{I}_s = i_{ds} + j i_{qs} = \frac{I_s}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_{i1}} .$$

Como está analisado na seção 8.2.1, referir as grandezas de rotor ao estator significa substituir o rotor de  $N_r$  espiras efetivas em série por par de pólos e por fase (tensão  $v_r$ , corrente  $i_r$  e impedância  $z_r$ ) por um equivalente (tensão  $V_r$ , corrente  $I_r$  e impedância  $z'_r$ ) tendo o número efetivo de espiras do estator  $N_s$ : a frequência elétrica das variáveis elétricas do rotor equivalente é igual ao do estator, isto é,  $\omega_1$ . Assim sendo, se o funcionamento da máquina é balanceado (enrolamentos simétricos e tensões equilibradas), os fasores da tensão e corrente do rotor são respectivamente dados por

$$\widehat{V}_r = v_{dr} + j v_{qr} = \frac{V_r}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_{v2}} .$$

$$\widehat{I}_r = i_{dr} + j i_{qr} = \frac{I_r}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_{i2}} .$$

Por sua vez, a relação entre as impedâncias do circuito do rotor equivalente ( $z'_r = R_r + js\omega_1 l_{Lr}$ ) e a do rotor real ( $z_r = r_r + js\omega_1 l_{lr}$ ), todas na frequência de escorregamento é dada por

$$z'_r = \left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 z_r .$$

Se o fasor da tensão de estator é tomado como referência, o que significa  $\varphi_{v1} = 0$ , têm-se as seguintes expressões para a tensão e corrente do estator:

$$\widehat{V}_s = V_s$$

$$\widehat{I}_s = I_s e^{j\varphi_{i1}} .$$

Como a análise é a de regime permanente da operação equilibrada, os termos relativos a derivadas dos fluxos concatenados são nulos. A partir das Equações (8.71), (8.72) e (8.73), os fasores dos fluxos do estator e rotor são dados respectivamente por

$$\widehat{\psi}_s = L_{ls}\widehat{I}_s + L_m\widehat{I}_m \quad (9.1)$$

$$\widehat{\psi}_r = L_{lr}\widehat{I}_r + L_m\widehat{I}_m \quad (9.2)$$

nas quais é identificado o fasor da corrente de magnetização

$$\widehat{I}_m = \widehat{I}_s + \widehat{I}_r$$

associado à produção do fluxo total no entreferro  $\widehat{\psi}_g = L_m\widehat{I}_m$ .

Ao se combinar convenientemente as Equações (9.1) e (9.2) àquelas de tensão, dadas por (8.69) e (8.70), têm-se as seguintes equações de tensão escritas na forma de fasores e em função das correntes:

$$\widehat{V}_s = (R_s + j\omega_1\sigma_s L_m)\widehat{I}_s + j\omega_1 L_m\widehat{I}_m \quad (9.3)$$

$$\widehat{V}_r = (R_r + js\omega_1\sigma_r L_m)\widehat{I}_r + js\omega_1 L_m\widehat{I}_m \quad (9.4)$$

nas quais  $\sigma_s$  e  $\sigma_r$  são, respectivamente, os coeficientes de dispersão do estator e do rotor, definidos pelas seguintes relações:

$$L_{ls} = \sigma_s L_m$$

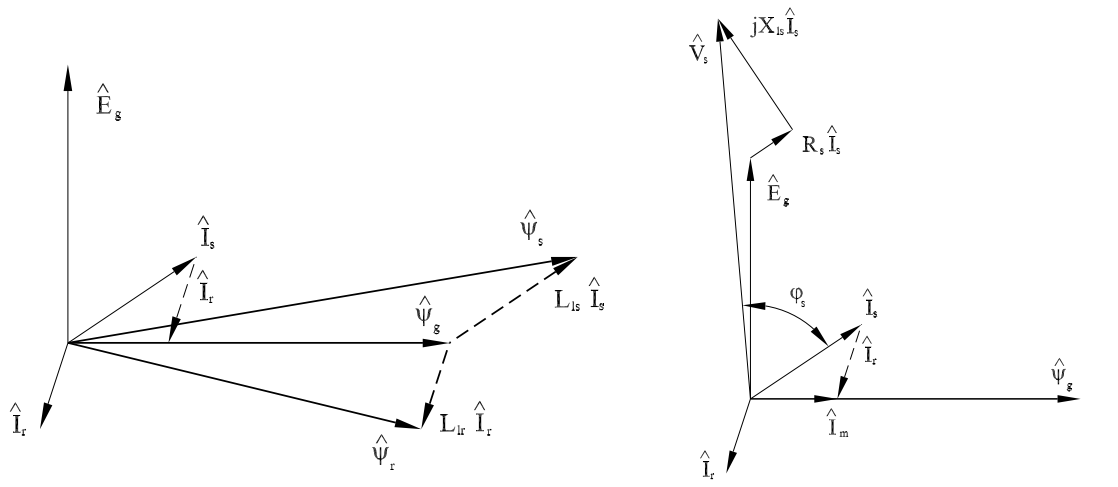
$$L_{lr} = \sigma_r L_m .$$

Nas equações de tensão do estator e do rotor é identificada a tensão do entreferro  $\widehat{E}_g$ , induzida em cada uma das fases de estator pelo fluxo resultante no entreferro  $\widehat{\psi}_g$ :

$$\widehat{E}_g = \omega_1 L_m \widehat{I}_m = j\omega_1 \widehat{\psi}_g . \quad (9.5)$$

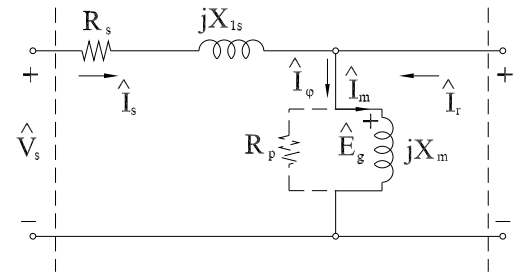
O correspondente diagrama fasorial das Equações (9.1) e (9.2) está mostrado na Figura 9.1(a), no qual, além dos fasores dos fluxos concatenados, representa-se o fasor tensão do entreferro – observe que, de acordo com a convenção adotada, que é a de receptor,  $\widehat{E}_g$  está adiantado de  $\pi/2$  radianos elétricos do fasor  $\widehat{\psi}_g$ . Observe ainda, neste diagrama, que o fasor tensão de terminal do estator está adiantada em relação ao fasor tensão do entreferro, indicando que o fluxo de potência ativa se dá do terminal de estator para o de rotor, o que caracteriza a operação da máquina no modo motor.

O diagrama fasorial de tensões do estator e o correspondente circuito equivalente, mostrados nas Figuras 9.1(b) e 9.1(c), são derivados da Equação (9.3). Se as perdas no ferro são representadas, deve-se acrescentar uma componente ativa  $\widehat{I}_p$  à corrente de magnetização, como está mostrado na Figura 9.1(c); assim sendo, o fasor resultante  $\widehat{I}_\varphi = \widehat{I}_p + \widehat{I}_m$  é deslocado à frente de  $\widehat{\psi}_g$ . As perdas no ferro podem ser representadas por uma resistência  $R_p$  em paralelo com a reatância de magnetização  $X_m$ ; geralmente, essas perdas são contabilizadas apenas na determinação da potência de saída e, assim sendo, não são representadas no circuito equivalente, à semelhança das perdas mecânicas. No presente texto, as perdas mecânicas englobam as perdas ferro.



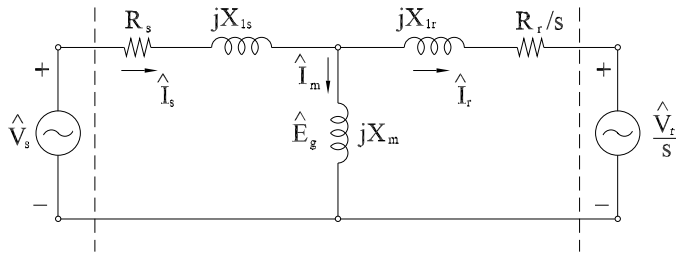
(a) Diagrama fasorial de fluxos magnéticos

(b) Diagrama fasorial de tensões do estator

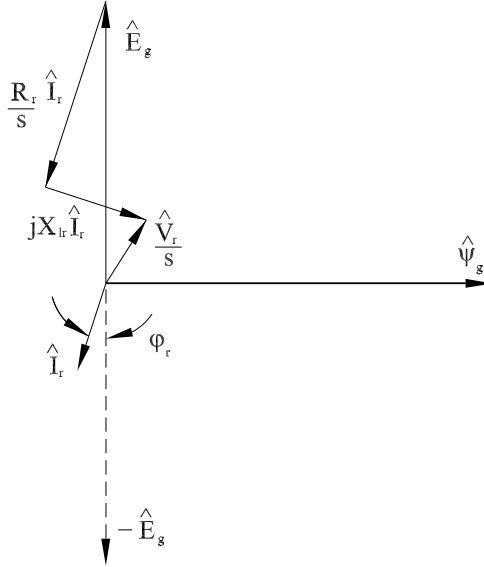


(c) Circuito elétrico equivalente por fase Y de estator

Figura 9.1: Diagramas fasoriais e circuito equivalente de estator.



(a) Circuito equivalente por fase Y



(b) Diagrama fasorial do rotor

Figura 9.2: Circuito equivalente da máquina de indução referido ao estator e o diagrama fasorial do circuito de rotor.

A Equação (9.4) não está escrita na forma adequada para se escrever o tradicional circuito equivalente. Com este objetivo, divide-se todos os seus termos pelo escorregamento e a seguinte equação é obtida:

$$\frac{\widehat{V}_r}{s} = \underbrace{\left(\frac{R_r}{s} + j\omega_1\sigma_r L_m\right)}_{Z_r} \widehat{I}_r + j\omega_1 L_m \widehat{I}_m . \quad (9.6)$$

que combinada à Equação (9.3) define o circuito equivalente mostrado na Figura 9.2. Como está assinalado na Equação (9.6), a impedância do rotor, totalmente referida ao estator, o que significa estar expressa no circuito de  $N_s$  espiras e na frequência do estator  $\omega_1$ , é dada por

$$Z_r = \frac{R_r}{s} + j\omega_1\sigma_r L_m .$$

Um aspecto distintivo da máquina de indução, em termos de circuito elétrico equivalente, quando comparado com o do transformador, é o fato de o elemento resistivo do circuito de rotor depender do escorregamento ou equivalentemente da carga: por exemplo, aumento de carga significa aumento do escorregamento e, conseqüentemente, diminuição do valor da resistência  $R_r/s$ . Outro fato relevante é o de que, sendo um dispositivo conversor eletromecânico, pode funcionar nos modos motor e gerador: no primeiro caso tem-se  $R_r/s > 0$  e, no segundo,  $R_r/s < 0$ .

O circuito do rotor original ( $N_r$  espiras efetivas por par de pólos e por fase) tem as tensões e correntes na frequência de escorregamento  $s\omega_1$ , como representado na Figura 9.3. O fasor da tensão induzida em cada fase desse rotor de  $N_r$ , devido ao fluxo girante do entreferro  $\hat{\phi}_g$ , quando o rotor está parado ( $s = 1$  e  $\omega_2 = \omega_1$ ), é dado por

$$\hat{e}_{r0} = j\omega_1 N_r \hat{\phi}_g .$$

Se o rotor gira, o escorregamento diminui e conseqüentemente a tensão induzida diminui proporcionalmente ao escorregamento, porque a velocidade relativa, entre os enrolamentos do rotor e a do fluxo girante, diminui. Assim sendo, o módulo da tensão induzida eficaz em função do escorregamento torna-se

$$\hat{e}_r = s\omega_1 N_r \hat{\phi}_g = js\hat{e}_{r0} .$$

No caso de o rotor ser gaiola de esquilo e se o fasor da tensão induzida for escolhido como referência, tem-se  $\hat{e}_r = s\omega_1 N_r \phi_g e^{j0} = se_{r0}$  e a corrente de rotor estabelecida em cada fase é dada por

$$\hat{i}_r = -\frac{s e_{r0}}{\sqrt{r_r^2 + (s\omega_1 l_{lr})^2}} e^{-j\varphi_r}$$

na qual  $\varphi_r$  é o ângulo da impedância por fase do rotor, determinado a partir da relação trigonométrica

$$\varphi_r = tg^{-1} \left( \frac{s\omega_1 l_{lr}}{r_r} \right) .$$

Para baixos valores de escorregamento, para os quais  $r_r \gg s\omega_1 l_{lr}$ , tem-se  $z_r \approx r_r$  e  $\varphi_r \approx 0$ ; conseqüentemente, a corrente resultante é diretamente proporcional ao escorregamento, ou seja:

$$\hat{i}_r \approx -\frac{\hat{e}_{r0}}{r_r} s .$$

À medida que a carga aumenta, o escorregamento aumenta e, conseqüentemente, a tensão induzida e a frequência de escorregamento também crescem, tornando o circuito mais indutivo: o ângulo de impedância aumenta e, conseqüentemente, o fator de potência de rotor diminui e o módulo da corrente do rotor aumenta.

A parte ativa e a parte reativa da corrente ( componente em fase e a componente em quadratura com  $\hat{e}_r$ ) são dadas por

$$\mathcal{R}e(\hat{i}_r) = i_{r,ativa} = -\frac{s e_{r0}}{\sqrt{r_r^2 + (s\omega_1 l_{lr})^2}} \cos \varphi_r \quad (9.7)$$

$$\mathcal{I}m(\hat{i}_r) = i_{r,reativa} = \frac{s e_{r0}}{\sqrt{r_r^2 + (s\omega_1 l_{lr})^2}} \text{sen} \varphi_r . \quad (9.8)$$

A partir do ângulo de impedância do rotor tem-se

$$\cos \varphi_r = \frac{r_r}{\sqrt{r_r^2 + (s\omega_1 l_{lr})^2}}$$

$$\text{sen} \varphi_r = \frac{s\omega_1 l_{lr}}{\sqrt{r_r^2 + (s\omega_1 l_{lr})^2}}$$

que substituídas nas expressões das componentes ativa e reativa do  $\hat{i}_r$ , dadas por (9.7) e (9.8), resultam em

$$I_{r,ativa} = -\frac{s r_r e_{r0}}{r_r^2 + (s\omega_1 l_{lr})^2} \quad (9.9)$$

$$I_{r,reativa} = \frac{s^2 \omega_1 l_{lr} e_{r0}}{r_r^2 + (s\omega_1 l_{lr})^2} .$$

Enquanto a componente reativa sempre é positiva, independentemente do modo de operação, o mesmo não acontece com a componente ativa: no modo gerador, pelo fato de seu escorregamento ser negativo, a corrente

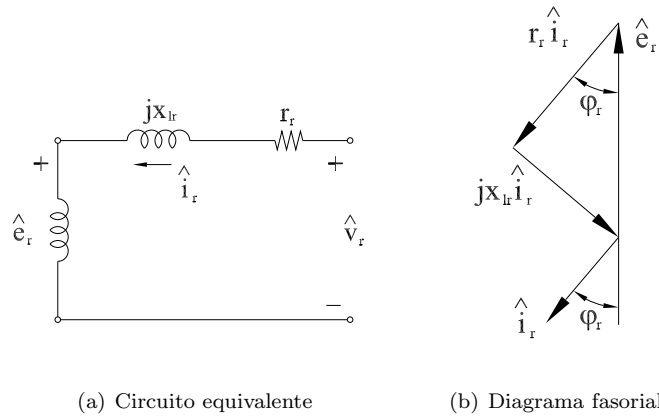


Figura 9.3: Circuito equivalente do rotor de  $N_r$  espiras efetivas por par de pólos por fase e na frequência de escorregamento.

ativa tem o seu sinal invertido, quando comparada com a respectiva corrente do motor (o diagrama vetorial do gerador está na seção 9.6).

De acordo como o diagrama fasorial da Figura 9.2, a onda da fmm de rotor atrasa-se, em relação à onda do fluxo do entreferro, pelo ângulo

$$\delta = -\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_r\right).$$

Como a ângulo  $\delta$  varia com a carga, ele é denominado *ângulo de torque da máquina de indução*.

Se o rotor é do tipo anel, o fator de potência de rotor pode ser ajustado pelo controle do módulo e fase da tensão de terminal do rotor. Este tópico está apresentado no Capítulo ??.

**Exemplo 9.1** Um motor de indução trifásico de rotor gaiola tem os seguintes parâmetros do circuito equivalente: 25 hp, 380 V, 4 pólos, 60 Hz,  $R_s = 0,167 \Omega$ ,  $L_m = 43,710 \text{ mH}$ ,  $\sigma_s = 0,029$ ,  $\sigma_r = 0,062$  e  $R_r = 0,135 \Omega$ . A sua velocidade nominal é 1.760 rot/min e o momento de inércia do rotor é  $0,083 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ . Determine (a) as indutâncias de dispersão e, a partir da escolha da tensão de fase do terminal de estator como referência, calcule para as condições nominais (b) o fator de potência do circuito de rotor, os fasores corrente de estator, de magnetização e de rotor e (d) Os fasores da tensão do entreferro e da fem de estator.

**Solução**

(a) As indutâncias de dispersão são

$$\Rightarrow L_{ls} = 0,029 \times 43,710 \text{ mH} = 1,267 \text{ mH}$$

$$\Rightarrow L_{lr} = 0,062 \times 43,710 \text{ mH} = 2,71 \text{ mH}$$

(b) O fator de potência do rotor é

$$\cos \varphi_r = \frac{0,135}{\sqrt{0,135^2 + (0,022 \times 377 \times 2,71 \times 10^{-3})^2}} = 0,986$$

Verifica-se que o fator de potência do rotor é praticamente unitário, quando o motor funciona com o escorregamento nominal.

(c) Inicialmente são calculadas as impedâncias do circuito equivalente com  $s = 0.022$ :

$$X_{l_s} = 1,267 \text{ mH} \times 377 = 0,478 \Omega$$

$$X_{l_r} = 2,710 \text{ mH} \times 377 = 1,021 \Omega$$

$$X_m = 43,71 \text{ mH} \times 377 = 16,48 \Omega$$

$$Z_m = j16,48$$

$$Z_s = 0.167 + j0.478$$

$$Z_r = 0.135/0.02 + j1.021$$

Com o auxílio do circuito equivalente obtêm-se as seguintes impedâncias:

$$Z_g = Z_m // Z_r = 5,528 e^{j28,77}$$

$$Z_{ent} = Z_s + Z_g = 5,914 e^{j32,05}$$

Portanto,

$$\Rightarrow \hat{I}_s = \frac{380/\sqrt{3}}{Z_{ent}} = 37,10 e^{-j32,05}$$

$$\Rightarrow \hat{I}_r = -\frac{Z_m}{Z_m + Z_r} \hat{I}_s = 32,97 e^{j167,27}$$

$$\Rightarrow \hat{I}_m = \hat{I}_s + \hat{I}_r = 12,48 e^{-j95,33}$$

Observe que o valor da corrente de magnetização é aproximadamente 34% da corrente de estator.

(d) Os fasores da tensão do entreferro e da fem d estator são

$$\Rightarrow \hat{E}_g = \hat{I}_m \times jX_m = 205,67 e^{-j5,33}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_s = \hat{E}_g + jX_{l_s} \hat{I}_s = 214,16 e^{-j1,10} .$$

## 9.2 Fluxo de potência e torque

A potência ativa de terminal de estator total  $P_s$  é calculada ao se empregar a Equação (9.3) e a expressão da potência ativa, isto é,

$$P_s = \mathcal{R}e \left( 3\hat{V}_s \hat{I}_s^* \right) = 3V_s I_s \cos \varphi_s$$

$$P_s = \mathcal{R}e \left( 3R_s |\hat{I}_s|^2 + j3\omega_1(L_{l_s} + L_m) |\hat{I}_s|^2 + j3\omega_1 L_m \hat{I}_r \hat{I}_s^* \right)$$

ou, de forma alternativa,

$$P_s = 3R_s |\hat{I}_s|^2 + 3\omega_1 L_m \mathcal{R}e(j\hat{I}_r \hat{I}_s^*) . \quad (9.10)$$

A potência elétrica do rotor gaiola é determinada de forma semelhante àquela empregada para o estator. Recorre-se, então, à Equação (9.4), faz-se  $\hat{V}_r = 0$  e escreve-se a seguinte expressão da potência do circuito de rotor:

$$0 = 3R_r |\hat{I}_r|^2 + s3\omega_1 L_m \mathcal{R}e \left( j\hat{I}_r \hat{I}_s^* \right) . \quad (9.11)$$

Dado que  $\mathcal{R}e(jZ) = -\mathcal{R}e(jZ^*)$ , a Equação (9.11) torna-se

$$0 = 3R_r |\hat{I}_r|^2 - s\omega_1 3L_m \mathcal{R}e \left( j\hat{I}_r \hat{I}_s^* \right)$$



que combinada à Equação (9.10), resulta na equação

$$P_s = \underbrace{3R_s |\hat{I}_s|^2}_{P_{Rs}} + \underbrace{3R_r |\hat{I}_r|^2}_{P_{Rr}} + (1-s)\omega_1 3L_m \mathcal{R}e \left( j\hat{I}_r \hat{I}_s^* \right) . \quad (9.12)$$

Os dois primeiros termos à direita da igualdade representam as perdas totais por efeito Joule –  $P_{Rs}$  e  $P_{Rr}$  –, nas resistências dos enrolamentos do estator e do rotor, respectivamente, enquanto o terceiro requer um pouco mais de análise.

O torque desenvolvido pela máquina de indução é o quociente entre a potência eletromecânica total desenvolvida  $P_{em}$  e a velocidade de eixo  $\omega_m$ ; na Equação (8.50) o torque está escrito em função dos valores de pico das correntes de estator e de rotor. Como agora se estuda o regime permanente, é necessário escrevê-la em *função dos valores eficazes*, isto é,

$$T_{em} = 3\frac{p}{2}L_m \mathcal{I}m \left( \hat{I}_s \hat{I}_r^* \right)$$

ou, alternativamente,

$$T_{em} = 3\frac{p}{2}L_m \mathcal{R}e \left( j\hat{I}_r \hat{I}_s^* \right) .$$

Observe que esta última equação tem um termo comum com o referido terceiro termo da Equação (9.12); ao se combinar estas duas equações tem-se a expressão da potência eletromecânica dada por

$$P_{em} = (1-s)\frac{2}{p}\omega_1 T_{em} \quad (9.13)$$

na qual

$$\omega_{sm} = \frac{2}{p}\omega_1$$

é velocidade do campo girante em radianos mecânicos por segundo e

$$\omega_m = (1-s)\omega_{sm}$$

é a velocidade mecânica de eixo.

Ao se retomar a Equação (9.12) e considerar-se a Equação (9.13), a expressão da potência elétrica total de terminal de estator torna-se

$$P_s = P_{Rs} + P_{Rr} + P_{em} .$$

Com o auxílio do circuito equivalente, mostrado na Figura 9.2, a soma de  $P_{Rr}$  com  $P_{em}$  é a potência elétrica associada à resistência  $R_r/s$ , e como é parte da potência de entrada, é comum denominá-la *potência do entreferro*  $P_g$ . Assim sendo, tem-se

$$P_g = P_{Rr} + P_{em} = 3 |\hat{I}_r|^2 \frac{R_r}{s}$$

Se a máquina de indução opera no modo motor,  $P_g$  tem origem no estator e é entregue ao rotor; se o modo de operação é o gerador, esta potência é entregue ao estator e é o resultado da conversão da potência mecânica em potência elétrica.

Como

$$\frac{R_r}{s} = R_r + (1-s)\frac{R_r}{s}$$

conclui-se que a denominada potência de escorregamento e a potência eletromecânica, escritas explicitamente em função da potência do entreferro, são, respectivamente,

$$P_{Rr} = sP_g$$

$$P_{em} = (1 - s)P_g .$$

Portanto, da potência  $P_g$  que atravessa o entreferro, a parcela  $sP_g$  é dissipada na resistência do enrolamento do rotor e a fração restante, dada por  $(1 - s)P_g$ , é a *potência elétrica convertida para mecânica ou vice-versa*. Como existem perdas mecânicas, as denominadas perdas rotacionais  $P_{rot}$ , a potência disponível à carga externa é  $P_{em} - P_{rot}$ . O diagrama que ilustra o fluxo de potência na máquina de indução funcionando no modo motor está mostrado na Figura 9.4(a). Na operação no modo motor, como já mencionado na seção 6.3.2, o escorregamento é positivo e, conseqüentemente, a resistência  $R_r/s$  também é positiva, o que torna a potência  $P_g > 0$ . Se o escorregamento é negativo – isto significa velocidade de rotor maior que a velocidade síncrona –, tem-se  $R_r/s < 0$  e, conseqüentemente,  $P_g < 0$ , o que significa, na convenção de receptor, potência gerada e, portanto, a máquina de indução funciona no modo gerador; o fluxo de potência do gerador está ilustrado na Figura 9.4(b).

Um aspecto que deve ser realçado nas máquinas de indução, quando comparadas com as de corrente contínua e síncronas, é que elas não têm um circuito físico de campo separado: os terminais de estator são a única porta para as potências de campo e de armadura.

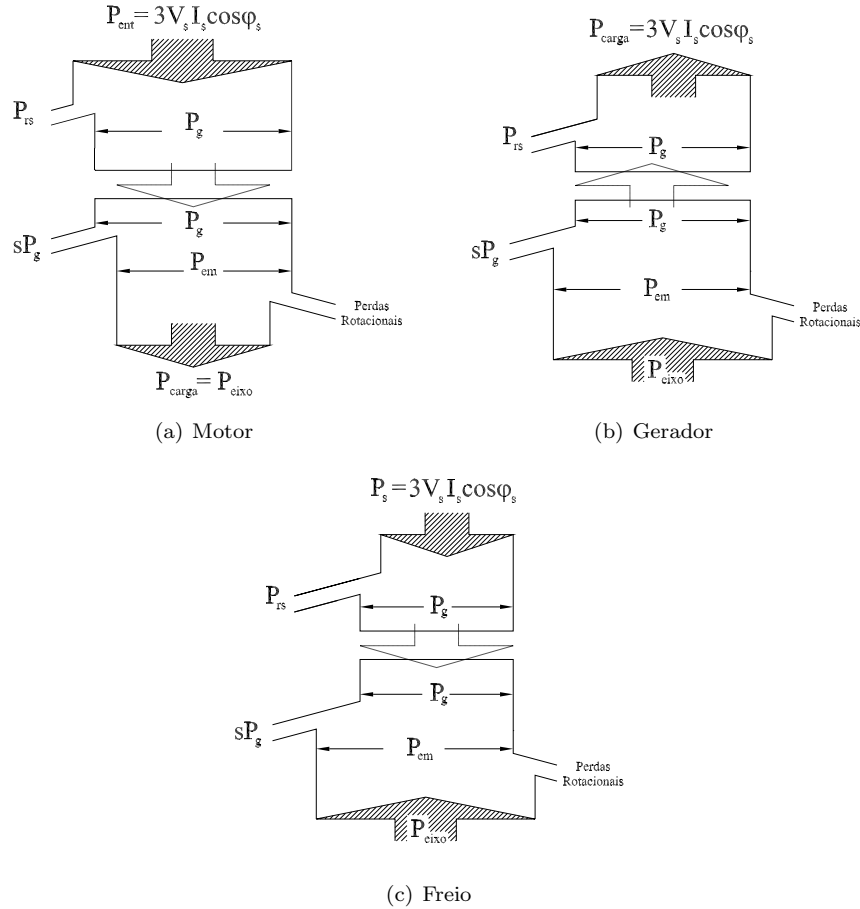


Figura 9.4: Fluxo de potência ativa na máquina de indução.

O emprego da expressão relativa à potência eletromecânica leva a duas expressões do torque desenvolvido  $T_{em}$ , dadas por

$$T_{em} = \frac{P_{em}}{\omega_m} = \frac{(1 - s)P_g}{\omega_m}$$

$$T_{em} = \frac{P_g}{\omega_{sm}} .$$

No *modo motor* tem-se  $T_{em} > 0$ ,  $P_{em} > 0$  e  $P_r > 0$ , significando que o torque no eixo é devido à conversão de potência elétrica em mecânica.

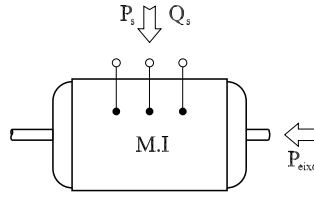


Figura 9.5: Potência nos terminais elétrico e mecânico da máquina de indução com rotor gaiola.

No *modo gerador* o torque desenvolvido é negativo ( $T_{em} < 0$ ),  $P_{em} < 0$  e  $P_g < 0$ , e, portanto, a potência mecânica fornecida ao eixo é convertida em elétrica, o que significa que o torque desenvolvido age no sentido de frear o eixo.

A máquina de indução funciona também no *modo freio*, se o torque desenvolvido, devido à conversão da potência elétrica em mecânica, age no sentido de frear o eixo. Nesta condição, têm-se  $s > 1$ ),  $P_g > 0$  e  $P_{em} < 0$ ; a máquina recebe potência elétrica pelo lado do estator, uma vez que  $P_g > 0$ , e potência mecânica pelo eixo pois  $P_{em} < 0$ . A frenagem ocorre se originalmente a máquina, funcionando como um motor, tem a sequência de fase invertida <sup>1</sup>, o que inverte o sentido de rotação do fluxo girante em relação à velocidade original de eixo:  $\omega_{sm} < 0$  e  $\omega_m > 0$ . Pelo fato do escorregamento ser grande, as perdas por efeito Joule na resistência do rotor são altas. O fluxo de potência correspondente está colocado na Figura 9.4(c).

Externamente, a máquina de indução com rotor gaiola pode ser vista através de seus dois terminais: o elétrico, representado pelo estator, e o mecânico, representado pelo eixo, como estão ilustrados na Figura 9.5. Ao terminal elétrico do estator são associadas as potências elétricas  $P_s$  e  $Q_s$ , e ao mecânico a potência mecânica  $P_{eixo}$ . A convenção adotada neste texto é a de que potências fornecidas à máquina de indução são positivas, isto é,  $P_s > 0$ ,  $Q_s > 0$  e  $P_{eixo} > 0$ .

É importante notar que a natureza das potências do entreferro e eletromecânica é elétrica, enquanto a de eixo é mecânica. Isto significa, por exemplo, que, na análise feita anteriormente para o motor, o torque e a potência elétrica desenvolvidos são positivos ( $P_{em} > 0$  e  $T_{em} > 0$ ), enquanto a carga mecânica é caracterizada por um torque resistente ao movimento e, portanto,  $T_{eixo} < 0$ . Assim sendo, têm-se as seguintes relações entre os torques e entre as potências:

$$T_{eixo} = -T_{em}$$

$$P_{eixo} = -P_{em}$$

Conclui-se que, no modo motor,  $P_{eixo} < 0$  e  $P_{em} > 0$ , e no modo gerador,  $P_{eixo} > 0$  e  $P_{em} < 0$ .

Como neste capítulo a preocupação maior é com a máquina de indução de rotor gaiola ( $V_r = 0$  e  $P_r = 0$ ), a obtenção da relação geral entre as três potências de terminal é deixada para o Capítulo ??.

**Exemplo 9.2** Um motor de indução trifásico, rotor gaiola de esquilo e 8 pólos, está conectado a uma fonte de alimentação de tensão  $V_1$  e frequência elétrica  $f_1 = 60 \text{ Hz}$  constantes. Uma carga mecânica, que exige a potência de  $10 \text{ kW}$  constantes, deve ser acionada a velocidade de  $891 \text{ rot/min}$ . Para os objetivos deste exemplo, considere que a resistência de estator e as perdas rotacionais somadas às perdas ferro sejam nulas. Nestas condições, determine:

- (a) O escorregamento de funcionamento.
- (b) A potência elétrica do entreferro.
- (c) A potência de escorregamento.
- (d) A potência elétrica tomada nos terminais elétricos de estator para atender a carga.
- (e) Determine a eficiência do motor, nas condições de funcionamento dadas.

<sup>1</sup>Em inglês, o termo empregado é plugging.

### Solução

Dado que a máquina deve fornecer potência ao eixo e que as perdas mecânicas e no ferro são nulas, pela convenção adotada, a potência de eixo é  $P_{eixo} = -10 \text{ kW}$  e, conseqüentemente,  $P_{em} = -(-10) \text{ kW} = 10 \text{ kW}$ .

(a) Escorregamento:

$$\Rightarrow s = \frac{120 \times 60/8 - 891}{120 \times 60/8} = 0,01$$

(b) Potência do entreferro:

$$\Rightarrow P_g = \frac{10}{1 - 0,01} = 10,10 \text{ kW}$$

(c) Potência de escorregamento:

$$\Rightarrow P_{Rr} = 0,01 \times 10 = 0,10 \text{ kW}$$

(d) Potência de entrada no estator:

Como as perdas no enrolamento do estator são consideradas nulas, tem-se

$$\Rightarrow P_s = P_g = 10,10 \text{ kW} .$$

**Exemplo 9.3** Deseja-se que a máquina de indução do exemplo anterior funcione no modo gerador, ainda conectada à fonte de alimentação, com o mesmo escorregamento em valor absoluto. Deseja-se ainda que a sua potência elétrica de saída  $P_s$  seja igual àquela tomada pelos terminais de estator, quando funcionava como motor e nas condições de exemplo anterior. Nestas condições, determine:

(a) A potência do entreferro.

(b) A potência dissipada na resistência de rotor (potência de escorregamento).

(c) A potência elétrica desenvolvida a partir da potência de eixo

(d) A potência que a turbina deve entregar no eixo para que o funcionamento se dê nas condições exigidas.

### Solução

Como o escorregamento dos geradores de indução de rotor gíscia são negativos, tem-se  $s = -0,01$ .

(a) A partir do resultado do exemplo anterior (item d) e da convenção adotada no texto, tem-se

$$\Rightarrow P_g = P_s = -10,10 \text{ kW}$$

(b) Potência de escorregamento:

$$\Rightarrow P_{Rr} = -0,01(-10,10) = 0,101 \text{ kW}$$

(c) Potência eletromecânica:

$$\Rightarrow P_{em} = (1 + 0,01)(-10,10) = -10,20 \text{ kW}$$

(d) Potência de eixo: Como as perdas rotacionais são nulas tem-se

$$\Rightarrow P_{eixo} = -P_{em} = 10,20 \text{ kW}$$

**Exemplo 9.4** Uma carga desce com velocidade constante um plano, freada por uma máquina de indução trifásica de 8 pólos funcionando no modo freio - a seqüência de fases da alimentação é invertida para que o campo girante tenha sentido de rotação contrário ao da velocidade eixo do motor. Um redutor de velocidade, cuja eficiência, para os objetivos deste exemplo, é considerada ser de 85%, faz a conexão entre máquina de indução e a carga, tal que a velocidade de eixo da máquina seja 450 rot/min. A ação da carga no sentido de impulsionar o rotor corresponde à potência de 5 kW, na velocidade em que é freada. A freqüência da fonte ligada aos terminais de estator é 60 Hz e, para os objetivos desta questão, a resistência de estator e as perdas mecânicas e ferro podem ser consideradas insignificantes. Calcule:

- (a) O escorregamento de funcionamento
- (b) A potência entregue pela carga no eixo da máquina de indução.
- (c) A potência do entreferro.
- (d) A potência dissipada na resistência do rotor
- (e) A potência ativa entregue pela fonte de alimentação ao estator.

### Solução

- (a) Escorregamento de funcionamento:

O sentido de rotação do eixo e a velocidade síncrona têm sentidos opostos e, portanto,

$$\Rightarrow s = \frac{900 - (-450)}{900} = 1,5$$

- (b) Potência de eixo da máquina de indução:

Embora a potência de carga seja 5 kW, por causa do redutor, seu valor transmitido ao eixo da máquina é  $0,85 \times 5 \text{ kW}$  e é positiva, porque é potência de entrada:

$$\Rightarrow P_{eixo} = 0,85 \times 5 = 4,25 \text{ kW}$$

- (c) Potência eletromecânica:

$$\Rightarrow P_{em} = -4,25 \text{ kW}$$

- (d) Potência do entreferro:

$$\Rightarrow P_g = \frac{-4,25}{1 - 1,5} = 8,5 \text{ kW}$$

- (e) Potência de escorregamento:

$$\Rightarrow P_{R_r} = 1,5 \times 8,5 = 12,75 \text{ kW}$$

- (f) Potência ativa de terminal de estator:

$$\Rightarrow P_s = P_g = 8,5 \text{ kW}$$

### 9.2.1 Torque desenvolvido pelo motor alimentado por fonte de tensão

Considere que a máquina de indução tem os seus terminais de estator conectados a uma fonte de tensão. Deseja-se obter a curva torque  $\times$  escorregamento em função do valor da tensão aplicada. Ao admitir-se que as impedâncias do circuito sejam lineares, uma alternativa é empregar o teorema de Thèvenin, com o objetivo de substituir a tensão  $\widehat{V}_s$  aplicada e a impedância composta pela resistência e reatância de dispersão de estator em série com a reatância de magnetização, por uma tensão equivalente  $\widehat{V}_{TH}$  em série com a impedância  $Z_{TH}$ . O novo circuito equivalente é o da Figura 9.6.

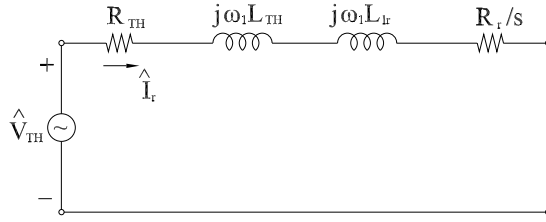


Figura 9.6: Circuito equivalente Thévenin.

Com o auxílio do circuito equivalente da Figura 9.2(a), a tensão equivalente de Thévenin é a tensão sobre a reatância de magnetização com o circuito de rotor aberto, isto é,

$$\widehat{V}_{TH} = \frac{\widehat{V}_s}{R_s + j\omega_1 L_s} j\omega_1 L_m .$$

A impedância equivalente é dada por

$$Z_{TH} = (R_s + j\omega_1 L_s) // j\omega_1 L_m .$$

No caso de  $R_s \approx 0$ , a tensão e a impedância equivalentes resultam em

$$\begin{aligned} \widehat{V}_{TH} &= k_s \widehat{V}_s \\ Z_{TH} &= j\omega_1 \underbrace{k_s L_s}_{L_{TH}} \end{aligned}$$

na qual  $k_s = L_m/L_s$ .

A expressão da potência de rotor, de acordo com o circuito equivalente modificado, é

$$P_g = 3 |\widehat{I}_r|^2 \frac{R_r}{s}$$

na qual

$$|\widehat{I}_r| = \frac{\widehat{V}_{TH}}{\sqrt{(R_{TH} + R_r/s)^2 + [\omega_1(L_{TH} + L_{lr})]^2}} .$$

Portanto, a potência é dada por

$$P_g = 3 \frac{|\widehat{V}_{TH}|^2}{(R_{TH} + R_r/s)^2 + [\omega_1(L_{TH} + L_{lr})]^2} \frac{R_r}{s} .$$

e o torque desenvolvido, definido pela relação  $P_{em}/\omega_{sm}$ , torna-se

$$T_{em} = \frac{3}{\omega_{sm}} \frac{|\widehat{V}_{TH}|^2 R_r}{\{(R_{TH} + R_r/s)^2 + [\omega_1(L_{TH} + L_{lr})]^2\}} \frac{1}{s} \quad (9.14)$$

com  $\omega_{sm} = 2\omega_1/p$ .

Para escorregamentos de valores absolutos iguais, o torque desenvolvido pela máquina de indução no modo gerador será maior do que aquele desenvolvido pelo motor, porque o termo referente à soma de resistências da Equação (9.14) torna-se menor.

Se os parâmetros da máquina de indução são constantes, para tensão e frequência de alimentação conhecidas, o torque desenvolvido é máximo quando a potência  $P_g$  (potência entregue à  $R_r/s$ ) for máxima, porque

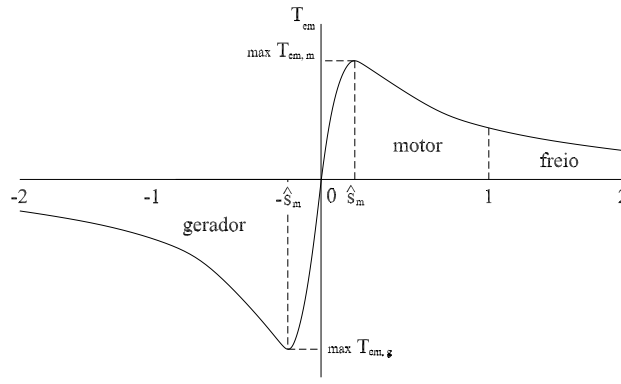


Figura 9.7: Curva torque × escorregamento típica da máquina de indução.

$T_{em} = pP_g/2\omega_1$ ; nesta condição, tem-se o casamento de impedância entre  $R_r/s$  e  $R_{TH} + j\omega_1(L_{TH} + L_r)$  e, portanto, o valor de escorregamento para qual obtém-se o torque máximo é dado por

$$\hat{s} = \pm \frac{R_r}{\sqrt{(R_{TH})^2 + \omega_1^2(L_{TH} + L_{lr})^2}} \quad (9.15)$$

que substituído na Equação (9.14) resulta o torque máximo dado por

$$\text{máx } T_{em} = \frac{3}{2\omega_{sm}} \frac{|\hat{V}_{TH}|^2}{\{(R_{TH})^2 \pm \sqrt{(R_{TH})^2 + \omega_1^2(L_{TH} + L_{lr})^2}\}} \quad (9.16)$$

Observe que o torque máximo independe do valor da resistência de rotor, enquanto o escorregamento, para o qual ocorre este torque, é diretamente proporcional ao valor de  $R_r$ .

O sinal de soma (+) nas Equações (9.15) e (9.16) corresponde à máquina de indução funcionando no modo motor, e o sinal de subtração (−) ao modo gerador. A Figura 9.7 ilustra a curva estática típica do torque × escorregamento nas três faixas de funcionamento: gerador, motor e freio.

Os pontos característicos dessa curva são os seguintes:

- *Funcionamento no modo motor*

Os valores de escorregamento estão na faixa  $0 < s < 1$  e o torque desenvolvido é positivo, o que significa que o torque no eixo é devido à conversão da potência elétrica em mecânica ( $P_{em} > 0$ ).

São distinguidas duas faixas na curva: uma na qual é praticamente linear com o escorregamento e que se restringe ao intervalo de  $s < \hat{s}$ , e outra na qual ela é semelhante à hipérbole e corresponde a  $\hat{s} < s < 1$ .

Na região linear pode-se admitir que  $R_r/s + R_{TH} \approx R_r/s$  e  $(R_r/s)^2 \gg \omega_1^2(L_{TH} + L_{lr})^2$ , e, assim sendo, a Equação (9.14) torna-se linear com o escorregamento, isto é,

$$T_{em} \approx \frac{3}{\omega_{sm}} \frac{|\hat{V}_{TH}|^2}{R_r} s \quad (9.17)$$

Na região não linear, o torque diminui à medida que o escorregamento aumenta. Se  $R_{TH} + R_r/s \ll \omega_1(L_{TH} + L_{lr})$ , a expressão do torque torna-se

$$T_{em} \approx \frac{3}{\omega_{sm}} \frac{|\hat{V}_{TH}|^2 R_r}{\omega_1^2(L_{TH} + L_{lr})^2} \frac{1}{s} \quad (9.18)$$

- *Funcionamento no modo gerador*

A resistência  $R_r/s$  do circuito equivalente é negativa, o que significa que, ao invés de absorver, ela gera potência ativa, e, portanto, a máquina funciona no modo gerador. O torque desenvolvido e o

escorregamento são negativos; torque negativo significa que ele age no sentido contrário ao da velocidade e, portanto, tem a característica frenante.

- *Funcionamento no modo freio*

O torque desenvolvido é positivo e os valores de escorregamento estão na faixa  $1 < s < 2$ : o valor máximo do escorregamento ( $s = 2$ ) ocorre se  $\omega_m = -\omega_{sm}$ , enquanto o menor valor ocorre quando o eixo pára ( $s = 1$ ).

- *Valores máximos de torque*

No modo gerador a máquina de indução desenvolve um torque máximo maior, em valor absoluto, que aquele desenvolvido no modo motor. Isto se deve ao fato de a potência eletromecânica ser maior que a do modo motor – a fonte mecânica fornece as perdas mecânicas somadas a eletromecânica –, para os mesmos escorregamentos.

## 9.2.2 Torque desenvolvido pelo motor alimentado por fonte de corrente

Na seção anterior, a máquina de indução analisada é alimentada por fonte de tensão e a curva torque  $\times$  escorregamento está ilustrada na Figura 9.7, para  $\omega_1$  constante. Uma alternativa é empregar uma fonte de corrente e, neste caso, a expressão do torque adequada para se obter a referida curva torque a ser utilizada é aquela em função das correntes de estator e rotor, expressas em valores eficazes:

$$T_{em} = \frac{3p}{2} L_m \mathcal{I}m \left[ \widehat{I}_{sdq} \widehat{I}_{rdq}^* \right].$$

Para que o torque seja escrito em função do fasor corrente de estator, é necessário obter  $\widehat{I}_r$  em função dessa corrente. Assim, ao se considerar  $V_r = 0$  na Equação (9.4), obtém-se, após algumas manipulações algébricas, a seguinte relação entre as correntes:

$$\widehat{I}_r = -\frac{1 - js\omega_1\tau_r}{R_r[1 + (s\omega_1\tau_r)^2]} js\omega_1 L_m \widehat{I}_s$$

na qual  $\tau_r = (L_m + L_{lr})/R_r$  é a constante de tempo elétrica do rotor.

Ao se tomar o complexo conjugado desta última equação e, posteriormente, substituí-lo na equação do torque, obtém-se a expressão final do torque

$$T_{em} = \frac{3p}{2} \frac{L_m^2}{L_r} \frac{s\omega_1\tau_r}{1 + (s\omega_1\tau_r)^2} |\widehat{I}_s|^2. \quad (9.19)$$

Conclui-se, então, que no motor alimentado por fonte de corrente, o torque desenvolvido é função da frequência de escorregamento  $\omega_2 = s\omega_1$  e não da velocidade de eixo. A frequência de escorregamento, para a qual ocorre o máximo torque  $T_{em, \text{máx}}$ , é calculada ao se considerar  $dT_{em}/d\omega_2 = 0$ , o que resulta na relação

$$\omega_{2, \text{máxT}} = \widehat{s}\omega_1 = \frac{1}{\tau_r}$$

que substituída na Equação (9.19) origina a expressão do torque máximo

$$\text{máx } T_{em} = \frac{3p}{2} \frac{L_m^2}{L_r} |\bar{I}_s|^2.$$

Importante ressaltar que foi feita a hipótese de que os parâmetros elétricos não são influenciados pelos efeitos da temperatura, pela variação das frequências elétricas de estator e de rotor, bem como pela saturação magnética do núcleo. Estas alterações são importantes quando se implementa o controle de velocidade do motor de indução.

**Exemplo 9.5** Calcule o torque desenvolvido pelo motor do Exemplo 9.1 alimentado (a) por fonte de tensão nominal e (b) por fonte de corrente nominal.

**Solução**



(a) A tensão e a impedância de Thévenin são

$$V_{TH} = 213,19 V$$
$$Z_{TH} = 0,49 \times e^{j71,30}$$

que substituídas na Equação (9.14), estabelece

$$T_{em} = 106,03 N \cdot m .$$

(b) A constante de tempo elétrica do rotor é

$$\tau_r = 46,42 mH / (0,135 / 0,022) = 343,85 mH$$

que substituída na Equação (9.19), juntamente com os outros parâmetros necessários e calculados no Exemplo 9.1, estabelece

$$T_{em} = 106,14 N \cdot m .$$

### 9.3 Classificação dos motores de indução trifásicos de rotor gaiola

As simplificações realizadas na análise qualitativa da curva  $T_{em} \times s$  permitiram realçar a influência da resistência de rotor no desempenho do motor de indução trifásico. Na região linear da curva, de acordo com a Equação (9.17), para um dado escorregamento, o torque é inversamente proporcional à resistência de rotor; por outro lado, na região dita não-linear, o torque é diretamente proporcional à  $R_r$  (Equação (9.18)). Assim sendo, quando se quer torque de partida alto, grandes valores de  $R_r$  são exigidos, relativamente à condição de funcionamento na região linear, que é a região normal de trabalho e na qual deseja-se perdas pequenas em  $R_r$  e, conseqüentemente, um melhor aproveitamento da potência elétrica entregue ao rotor. Nos motores em que o rotor é do tipo anel, também denominado rotor bobinado, os terminais de rotor são acessíveis e, assim sendo, não há dificuldade nenhuma em se alterar a resistência do circuito de fase do enrolamento de rotor, bastando, para isso, fechar os terminais de fase do rotor com resistências externas – normalmente são utilizados reostatos.

O mesmo não ocorre para o motor com rotor gaiola de esquilo, porque o seu enrolamento, constituído por barras permanentemente curto-circuitadas em suas extremidades, não permite o acesso externo ao seu circuito. Embora esta característica dê, operacionalmente ao motor de indução, robustez, quase nenhuma manutenção e diminuição no tempo de fabricação – o que, no final, significa menores custos de fabricação e de funcionamento –, ela tem o inconveniente de não permitir a variação do valor de  $R_r$ .

É conhecido o fato de que à medida que a frequência das correntes que circula em condutor é aumentada, a sua distribuição na seção reta deste condutor torna-se não uniforme, o que resulta no aumento da resistência elétrica efetiva – é o conhecido *efeito pelicular*. A exploração deste efeito, conjuntamente com a propriedade das linhas do fluxo de dispersão se concentrarem na parte inferior da ranhura, permitiu superar a limitação dos rotores gaiola de esquilo, como comentado anteriormente.

Como o ferro tem permeabilidade maior que a do ar, as linhas de fluxo de dispersão se concentram sob a parte inferior da ranhura e, assim sendo, a parte da barra colocada nessa região concatena mais fluxo do que a parte da barra colocada no topo da ranhura ( veja Figura 9.8(a)); conseqüentemente, a indutância dessa parte inferior é maior do que aquela da parte superior. Ao se supor, então, que a barra é formada por várias camadas sobrepostas, a corrente alternada tende a se concentrar nas camadas superiores – indutância menor e, portanto, reatância menor – resulta na distribuição não uniforme da corrente; esta concentração de corrente em uma seção reta de área menor do que total da barra, eleva o valor efetivo da resistência elétrica. Quanto maior for o valor da frequência elétrica, maior é a concentração de corrente e, portanto, maior é o valor efetivo da resistência. O uso, então, de barras profundas e estreitas, bem como de rotores de múltiplas gaiolas, como ilustrada na Figura 9.8(b) para a gaiola dupla, faz com que na partida ( frequência de escorregamento igual à  $f_1$ ) a resistência efetiva seja maior do que aquela no funcionamento normal (frequência de escorregamento bem menor do que  $f_1$ ).

Co base os valores de corrente e de torque de partida, bem como do escorregamento na região normal de funcionamento, os motores de indução são classificados, segundo a norma brasileira NBR 7094, em três categorias, como ilustradas na Figura 9.9(a) e descritas na seqüência:

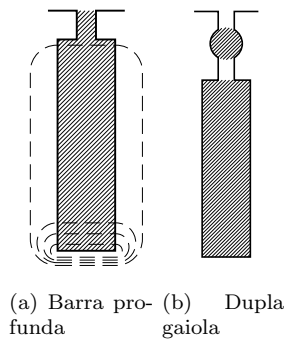


Figura 9.8: Ranhura de barra profunda e de gaiola dupla.

- **Categoria N:** São os motores de uso geral. Têm torque e corrente de partida normais e baixo escorregamento na região de operação normal. São os motores considerados de uso geral. Aplicações típicas: ventiladores, bombas e máquinas ferramenta.
- **Categoria D:** Motores de torque de partida alto, corrente de partida normal e escorregamentos maiores do que 5%. Aplicações típicas: cargas que apresentam picos periódicos e que necessitam de alto conjugado de partida com corrente de partida limitada, tais como, elevadores, prensas excêntricas e pontes rolantes.
- **Categoria H:** Motores projetados para que produzam torque de partida elevado com correntes de partida nominal e baixo escorregamento na região normal de funcionamento. Aplicações típicas: cargas de inércias elevadas, tal como as correias transportadoras.

Existe uma classificação um pouco mais detalhada em função das características de projeto do rotor, dada pela NEMA <sup>2</sup>. As curvas torque  $\times$  velocidade estão ilustradas na Figura 9.9(b) e as suas características são as seguintes:

- **Categoria de projeto A:** Motores de projeto padrão com resistência de rotor baixa, torque de partida normal (por volta de 1,50 vezes o torque nominal), torque máximo alto (por volta de 2,50 vezes o torque nominal), corrente de partida alta (por volta de 5 a 8 vezes a corrente nominal) escorregamento nominal baixo (menores do que 5%). Aplicações: ventiladores, bombas, e máquinas ferramenta.
- **Categoria de projeto B:** Motores com rotor de barra profunda e que comparados com os de classe A, apresentam correntes de partida e torque máximo menores. Aplicações: similares aos de classe A, é considerado motores de aplicação geral.
- **Categoria de projeto C:** Motores com rotor de gaiola dupla, torque de partida alto com corrente de partida baixa, escorregamento de funcionamento baixo (menores do que 5%). Aplicações: bombas carregadas, compressores e conveyors, crushers.
- **Classe de projeto D:** Motores projetados para desenvolverem altos torque de partida (por volta de 2,8 vezes o nominal), corrente de partida baixa e alto escorregamento nominal. As barras da gaiola são menores e feitas de material cuja resistividade é maior, como, por exemplo, o latão.

## 9.4 Controle escalar de velocidade

Se no controle de velocidade as grandezas sobre as quais o sistema atua são escalares, tais como magnitudes de tensão, de corrente, de frequência elétrica, diz-se que o *controle é escalar*. No Capítulo ?? é analisado o *controle vetorial*, no qual manipulam-se magnitudes e ângulos de grandezas elétricas tais como corrente e fluxo magnético.

Na sequência são descritos os principais métodos de controle de velocidade dos motores de indução.

<sup>2</sup>National Electrical Manufacturers' Association, EUA.

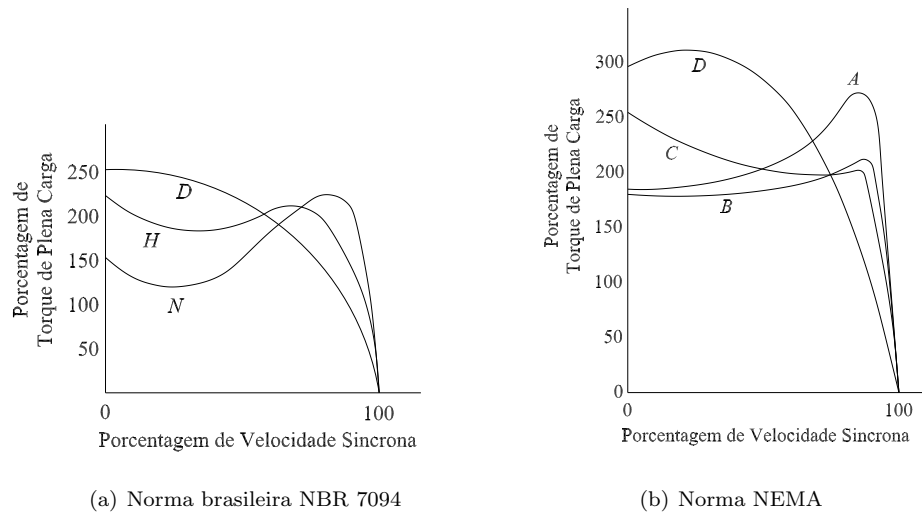


Figura 9.9: Características estáticas torque  $\times$  velocidade de motores de indução em função da categorias de projeto.

### 9.4.1 Fluxo do entreferro constante

Com o auxílio do circuito equivalente da Figura 9.2 e da relação  $T_{em} = P_g/\omega_{sm}$ , a expressão do torque desenvolvido em função da tensão do entreferro é

$$T_{em} = \frac{3p}{2\omega_1} \frac{(E_g)^2 R_r/s}{(R_r/s)^2 + (\omega_1 L_{lr})^2}.$$

A substituição da tensão do entreferro, dada pela Equação (9.5), nesta última equação, resulta na equação do torque em função da frequência de escorregamento, isto é,

$$T_{em} = \frac{3p}{2R_r} (\psi_g)^2 \frac{\omega_2}{1 + (s\omega_1 L_{lr}/R_r)^2}.$$

Conclui-se, então, que se o controle de velocidade é realizado com fluxo do entreferro constante, o torque independe da velocidade de eixo – *é função apenas da freqüência de escorregamento*  $\omega_2 = s\omega_1$ : o mesmo torque é obtido em diferentes velocidades de eixo, mas com a mesma freqüência de escorregamento.

A dificuldade deste método de controle de velocidade está na determinação da tensão de terminal do estator que resulte na tensão do entreferro exigida, pois esta determinação depende do conhecimento da queda de tensão na impedância  $R_s + \omega_1 L_{ls}$ . Manter freqüência de escorregamento baixa ( $\omega_2 = s\omega_1$ ) significa perdas elétricas no rotor baixas e fator de potência do circuito elétrico de rotor alto e isto garante uma boa eficiência no funcionamento do motor. Portanto, é desejável que o motor funcione com baixas freqüências de escorregamento, em geral, com valores abaixo daquela para o qual ocorre o máximo torque. As curvas típicas deste controle estão ilustradas na Figura 9.10.

Um esquema básico do controle está ilustrado na Figura 9.11 e está baseado no fato de a velocidade estar fortemente relacionada com  $\omega_1$ : uma vez escolhidas  $\omega_m$  e  $\omega_2$ , tem-se a freqüência angular de estator

$$\omega_1^* = \frac{p}{2} \omega_m^* \pm \omega_2^*.$$

A regulação satisfatória do fluxo do entreferro, em toda a faixa de freqüência inferior à nominal, é obtida ao se ajustar a magnitude da tensão de terminal do estator em função da freqüência  $\omega_1$  e da corrente de carga.

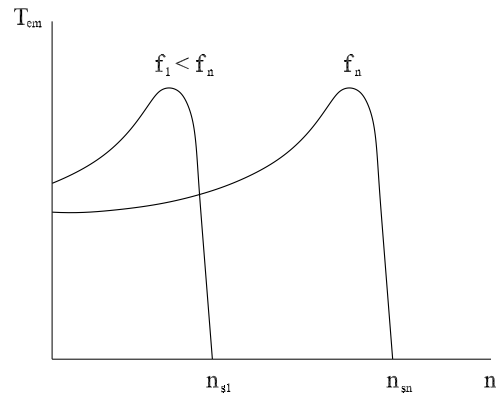


Figura 9.10: Controle da velocidade com fluxo do entreferro constante.

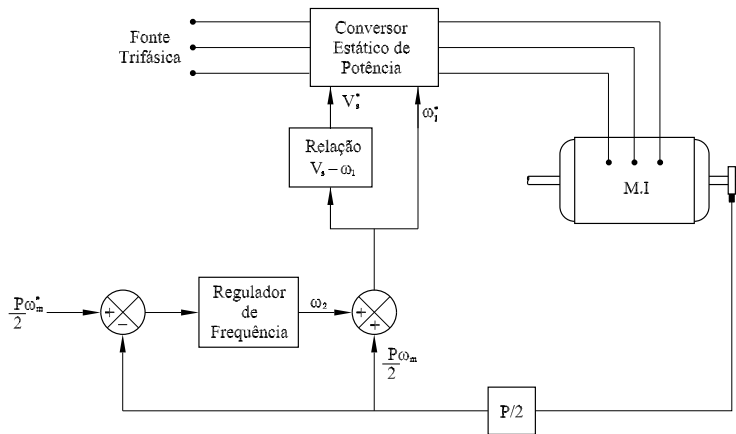


Figura 9.11: Esquema de controle de velocidade  $V/f$  básico, com fluxo do entreferro constante.

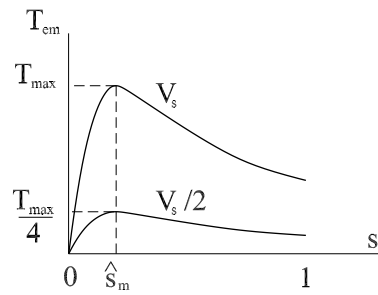


Figura 9.12: Controle da velocidade pela variação da tensão de terminal do estator.

### 9.4.2 Variação da tensão de terminal do estator

O torque desenvolvido pelo motor é proporcional ao quadrado da tensão de terminal do estator ( $T_{th} \propto V_s$ ), de acordo com a Equação (9.14). Se apenas a magnitude de  $V_s$  é variada, obtêm-se as curvas típicas da Figura 9.12; observa-se que o escorregamento aumenta à medida que a velocidade de eixo diminui; conseqüentemente, ocorre a diminuição da eficiência do motor. É claro que a tensão de estator deve assumir valores menores do que o seu valor nominal e pode ser obtida a partir de um auto transformador ou por um sistema conversor a estado sólido CA-CA ou CC-CA: o primeiro tem a vantagem da onda de tensão ser senoidal e o segundo a simplicidade de funcionamento e de implementação.

### 9.4.3 Variação da corrente de terminal do estator

Se uma fonte de corrente é conectada aos terminais do estator, o torque é proporcional ao quadrado da magnitude da corrente de alimentação, segundo a Equação (9.19), e independe da velocidade de eixo.

### 9.4.4 Variação do número de pólos

Ao se alterar a velocidade do campo girante do estator, altera-se a velocidade de eixo do motor: se a frequência de estator é constante, deve-se mudar o número de pólos pela modificação das conexões das bobinas dos enrolamentos, como ilustrado na Figura 9.13. No caso do motor com rotor em gaiola, basta alterar as conexões do estator. Geralmente, o enrolamento do estator é projetado para ter dois conjuntos iguais de bobinas por fase, que podem ser conectados em série ou em paralelo, com está ilustrado nas Figuras 9.13(a) e 9.13(b). As ligações entre as fases pode ser estrela e delta, como estão mostradas nas Figuras 9.13(c) - 9.13(f).

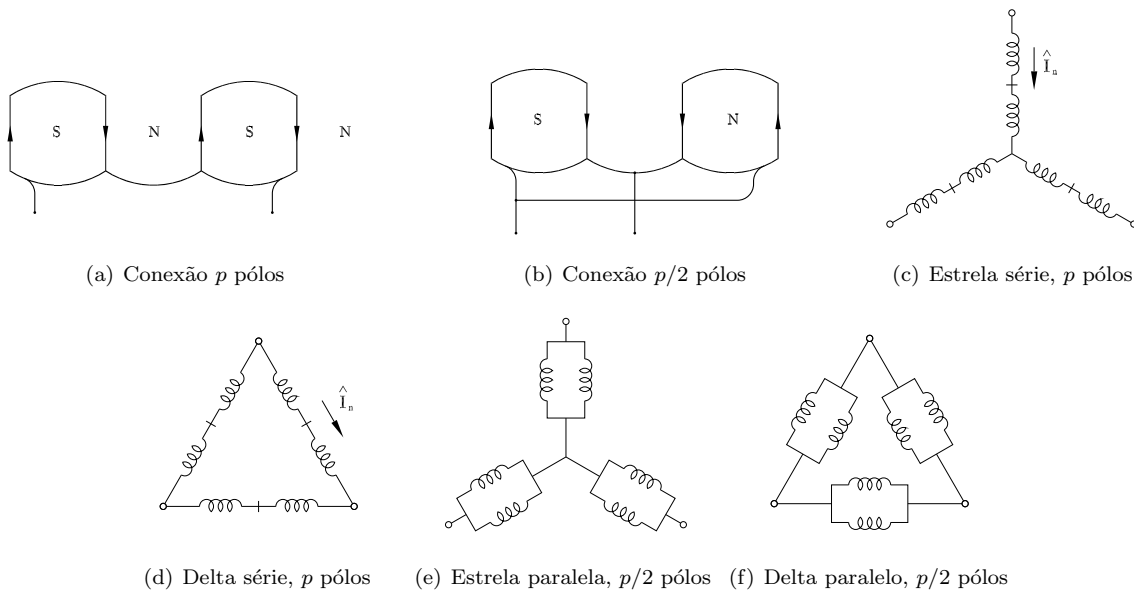


Figura 9.13: Princípio da variação do número de pólos.

Como as ligações das bobinas da mesma fase e também as ligações entre as fases podem ser alteradas, as características dos enrolamentos finais também se alteram, o que resulta em diferentes condições de funcionamento. Por exemplo, enrolamentos do estator em estrela série e paralelo, alimentados pela mesma tensão de linha, resultam, respectivamente, tensões sobre os enrolamentos de cada *fase-pólo* iguais a  $V_L/(2\sqrt{3})$  e  $V_L/\sqrt{3}$ , o que significa que o fluxo do entreferro por pólo gerado pelo estrela série é aproximadamente 50% daquele gerado pelo estrela paralelo. Por outro lado, o estator conectado em estrela série e alterado para o delta série, alimentados pela mesma tensão de linha, tem o seu fluxo do entreferro por pólo multiplicado por  $\sqrt{3}$ . Então, ao se fazer o controle de velocidade, precisa-se definir com que valor de fluxo o controle será realizado. Para o melhor entendimento do princípio deste controle de velocidade, faça o Exercício 9.12.

Se  $p_1$  e  $p_2$  são o número menor e maior de pólos, respectivamente, pode-se mostrar que

$$\frac{B_{p1}}{B_{p2}} = \frac{E_{p1} p_1 N_{p2}}{E_{p2} p_2 N_{p1}}$$

na qual  $E$  e  $N$  referem-se, respectivamente, às fems do entreferro e ao número efetivo de espiras em série por fase.

Considere inicialmente a conexão estrela série dos enrolamentos de estator alimentado por uma fonte de tensão de linha  $V_L$  e que toma da linha a corrente nominal  $I_n$ ; neste caso, a potência de entrada é  $3(V_L/\sqrt{3})I_n \cos \varphi_s$  e o torque desenvolvido, se são nulas as perdas na resistência do estator e as rotacionais, é dado por

$$T_Y = \frac{3}{\omega_{sm}} \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_n \cos \varphi_s .$$

Se a conexão é alterada para  $Y$  paralelo, com cada bobina fase-pólo sendo percorrida pela corrente nominal, a potência torna-se  $3(2V_L I_n \cos \varphi'_s/\sqrt{3})$ . Como o número de pólos diminuiu à metade, a nova velocidade síncrona é  $2\omega_{sm}$ , o torque é dado pela relação

$$T_{YY} = \frac{3}{\omega_{sm}} \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_n \cos \varphi'_s .$$

Se, por simplicidade, considera-se a indutância de magnetização muito maior que a de dispersão de estator, para um dado escorregamento, pode-se admitir  $\cos \varphi_s \approx \cos \varphi'_s$ , e, portanto, os torques desenvolvidos nos dois casos são iguais.

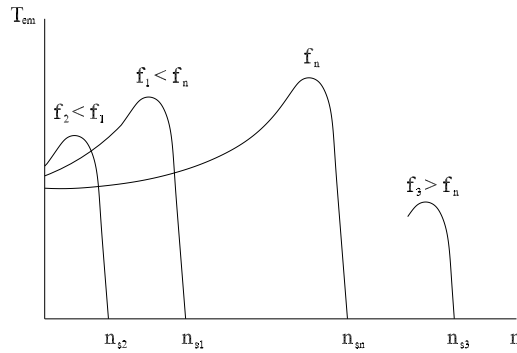


Figura 9.14: Controle da velocidade pela variação da frequência de alimentação.

Uma das desvantagens do método é que a velocidade do campo não varia continuamente e, sim, a passos discretos, geralmente na proporção 2 : 1.

### 9.4.5 Variação da frequência de alimentação

Diferentemente da variação do número de pólos, a alteração da frequência elétrica de estator é um método contínuo de controle de velocidade e, geralmente, é acompanhada pela variação da tensão de terminal de estator para que não ocorra a saturação magnética e, por esta razão, o controle é conhecido por  $V/f$ . As correspondentes curvas típicas torque  $\times$  velocidade estão ilustradas na Figura 9.14.

Para frequências acima da nominal, a tensão é mantida no seu valor nominal, o que torna o fluxo do entreferro menor; conseqüentemente, os valores de torque desenvolvido são menores do que aqueles nas condições nominais de tensão e de frequência.

No caso de valores altos de frequência tais que  $f_1 \ll f_n$  e  $R_{TH} \ll \omega_1(L_{TH} + L_{lr})$ , ao se empregar a Equação (9.16), tem-se o torque máximo dado por

$$\text{máx } T_{em} \approx \frac{3}{2\omega_{sm}} \frac{|\hat{V}_{TH}|^2}{\omega_1(L_{TH} + L_{lr})}.$$

Se os valores baixos de frequência são tais que  $R_s$  não pode ser desprezada em relação à reatância de dispersão do estator – o que significa  $R_{TH} \neq 0$  –, o denominador da Equação (9.16) é maior do que aquele para o qual  $R_{TH} \ll \omega_1(L_{TH} + L_{lr})$ , e, portanto, o torque máximo desenvolvido diminui substancialmente em relação à faixa de frequências próximas da nominal.

### 9.4.6 Variação da resistência de rotor

Os terminais do rotor bobinado podem ser fechados com resistências adicionais. Se a resistência acrescentada a cada fase do rotor é  $\Delta R$ , há o aumento do escorregamento para o qual ocorre o máximo torque, de acordo com a Equação (9.15). As curvas típicas torque  $\times$  velocidade estão mostradas na Figura 9.15; observe que a inclinação da parte linear da curva aumenta, em relação ao eixo da velocidade, à medida que o valor de  $\Delta R$  aumenta; a conseqüência é o aumento do escorregamento, para o mesmo torque desenvolvido.

A principal desvantagem do método de controle de velocidade por variação da resistência do rotor é o aumento da potência de escorregamento, o que significa diminuição da eficiência do motor.

## 9.5 Frenagem elétrica

Um motor de indução polifásico pode ser freado eletricamente por inversão da seqüência de fase, por regeneração e por alimentação em corrente contínua.

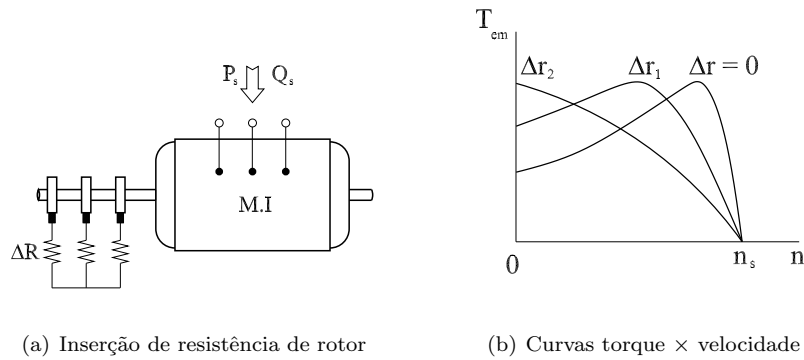


Figura 9.15: Controle da velocidade pela variação da resistência elétrica da fase do rotor.

### 9.5.1 Frenagem por inversão da seqüência de fase

Ao se inverter o sentido de rotação do campo girante de um motor trifásico em funcionamento, o novo torque desenvolvido age no sentido contrário àquele desenvolvido anteriormente e, portanto, atua no sentido de frear o eixo. Para que isto aconteça, basta intercambiar duas fases do estator com os terminais da fonte de alimentação; o método é similar ao da inversão da tensão empregada nos motores de corrente contínua. A faixa do escorregamento desse modo de frear é definida em  $2 < s < 1$ , como ilustrado na Figura 9.7. Como a dissipação da potência associada à potência mecânica da carga e a elétrica de estator se dá essencialmente no circuito elétrico do rotor, como ilustrado com dados numéricos no Exemplo 9.4, geralmente é utilizado o rotor bobinado com resistências externas inseridas entre os seus terminais.

### 9.5.2 Frenagem regenerativa

Se o eixo do motor atinge velocidades superiores à sua velocidade síncrona, por causa, por exemplo, do fato da carga atuar como força motriz, o torque desenvolvido pelo motor passa a ser frenante e o modo de funcionamento é o de gerador, como analisado anteriormente. A energia recuperada pode ser devolvida à fonte trifásica ou a uma bateria.

### 9.5.3 Frenagem por corrente contínua

Ao se substituir a fonte alternada do estator por uma fonte contínua, o fluxo de estator gerado é estacionário no espaço; a rotação do rotor faz com que sejam induzidas tensões alternadas no enrolamento do rotor e, dessa forma, estabelecem-se correntes elétricas que, por sua vez, geram o fluxo magnético de rotor; a velocidade deste fluxo é a oposta do eixo e, conseqüentemente, é estacionário em relação ao do estator, o que significa que há a produção de torque. Deve-se limitar o valor da corrente contínua, para que a potência gerada na frenagem e que é dissipada no rotor não seja elevada; geralmente nos rotores bobinados, os seus terminais são fechados por resistências externas, como ilustrado na Figura 9.16.

## 9.6 Gerador de Indução de rotor gaiola

Tal como acontece no modo motor, a máquina de indução funcionando no modo gerador pode ter dois tipos de rotor: o de gaiola e o bobinado (tipo anel). Se funciona em paralelo com um sistema de tensão e frequência constantes, ou de forma isolada, o gerador de indução sempre é um dispositivo consumidor de reativos, diferentemente do gerador síncrono, que tem a flexibilidade de funcionar, por meio do ajuste de sua corrente de campo, com fatores de potência indutivo, capacitivo e unitário.

### 9.6.1 Gerador ligado à rede

Suponha que a máquina de indução esteja conectada a um sistema elétrico que tenha a propriedade de manter constantes a frequência e tensão de terminal do estator, como ilustrado na Figura 9.17(a); o sistema



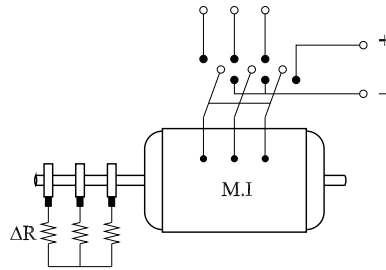
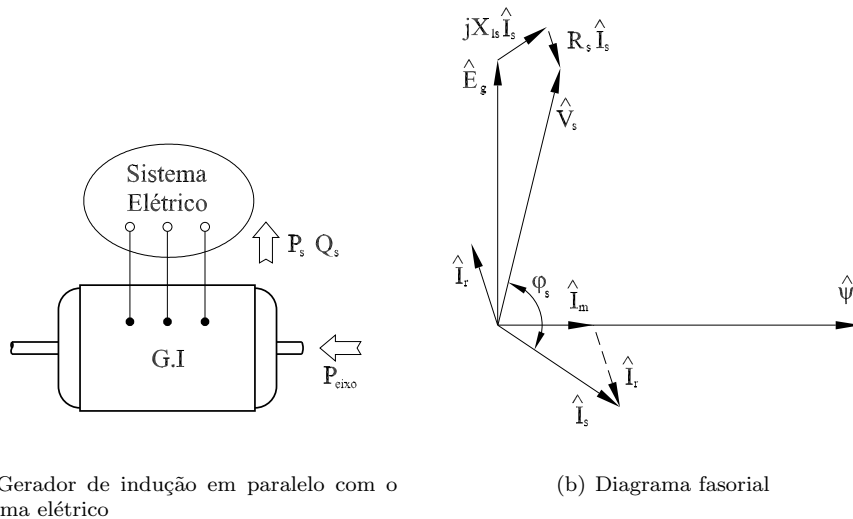


Figura 9.16: Frenagem por corrente contínua.



(a) Gerador de indução em paralelo com o sistema elétrico

(b) Diagrama fasorial

Figura 9.17: Gerador de indução conectado ao sistema elétrico.

fornece os reativos necessários à excitação do gerador de indução. Pelo fato de o rotor girar com velocidade superior ao do campo do entreferro, a velocidade do campo de rotor é contrária àquela do funcionamento no modo motor, tal que os campos resultem estacionários entre si, como ilustrado na Figura 6.10(c).

No diagrama fasorial do gerador, os fasores  $\hat{I}_m$  e  $\hat{E}_g$  devem estar nas mesmas posições que ocupavam no modo motor, como ilustrado na Figura 9.17(b). O fasor corrente do rotor tem a sua posição alterada porque, sendo negativo o escorregamento, a componente ativa desta corrente, segundo a Equação (9.9), torna-se positiva, o que significa que ela se atrasa em relação à componente reativa, que, por sua vez, não é alterada; em relação ao fasor tensão do entreferro, a corrente  $\hat{I}_r$  está adiantada de um ângulo menor que  $90^\circ$  graus; o fasor corrente do estator é obtido a partir da relação  $\hat{I}_s = \hat{I}_m - \hat{I}_r$  e, conseqüentemente, a sua componente na direção de  $\hat{V}_s$  é negativa, o que está em acordo com a convenção de receptor adotada. Observe que o fasor tensão de terminal do estator está atrasado em relação ao fasor tensão do entreferro, justamente o inverso do funcionamento no modo motor.

**Exemplo 9.6** *Um máquina de indução trifásica, dupla gaiola, 350 hp, 380 V, 4 pólos, 60 Hz e 1.790 rot/min tem os seguintes parâmetros do circuito equivalente Y:  $R_s = 0,012 \Omega$ ,  $L_m = 16,58 mH$ ,  $\sigma_s = 0,022$ ,  $\sigma_r = 0,032$  e  $R_r = 0,009 \Omega$  e  $J_m = 6,280 Kg \cdot m^2$ . Considere que o seu eixo é acionado na velocidade de 1.810 rot/min por uma turbina, e que os terminais do estator estejam conectados a um sistema capaz de manter constantes a magnitude e a freqüência elétrica da tensão de terminal do estator. Nestas condições, determine: (a) os fasores das correntes do estator e do rotor, (b) o fasor tensão do entreferro e (c) as potências ativas e reativa de terminal do estator.*

**Solução**

As reatâncias de magnetização e de dispersão são

$$X_m = 16,58 \times 10^{-3} \times 377 = 6,251 \Omega$$

$$X_{ls} = 0,022 \times 6,251 = 0,138 \Omega$$

$$X_{lr} = 0,032 \times 6,251 = 0,200 \Omega$$

e as correspondentes valores das impedâncias de magnetização, de estator e de rotor (para  $s = -0,0056$ ) são

$$Z_m = j6,251$$

$$Z_s = 0,012 + j0,138$$

$$Z_r = -1,607 + j0,200$$

Com o auxílio do circuito equivalente obtêm-se as seguintes impedâncias:

$$Z_g = Z_m / Z_r = 1,522 e^{j158,92}$$

$$Z_{ent} = Z_s + Z_g = 1,567 e^{j154,05}$$

(a) Ao se considerar o fasor tensão de terminal do estator como referência, obtêm-se as seguintes correntes:

$$\Rightarrow \hat{I}_s = \frac{380/\sqrt{3}}{Z_{ent}} = 140,035 e^{-j154,05}$$

$$\Rightarrow \hat{I}_r = -\frac{Z_m}{Z_m + Z_r} \hat{I}_s = 131,675 e^{j11,97}$$

$$\Rightarrow \hat{I}_m = \hat{I}_s + \hat{I}_r = 34,570 e^{-j80,54}$$

(b) O fasor tensão do entreferro é

$$\Rightarrow \hat{E}_g = \hat{I}_m \times jX_m = 216,10 e^{j9,46}$$

(c) As potências ativas e reativa de terminal do estator são

$$\Rightarrow P_s = \sqrt{3} \times 380 \times 140,035 \cos 154,05 = -82,875 \text{ kW}$$

$$\Rightarrow Q_s = \sqrt{3} \times 380 \times 140,035 \sin 154,05 = 40,331 \text{ kVAR}.$$

## 9.6.2 Gerador auto-excitado

Se o funcionamento do gerador é isolado, como ilustrado na Figura 9.18(a), um banco de capacitores deve ser conectado em paralelo com as fases do estator, e tem-se o chamado gerador de indução auto-excitado. O circuito equivalente por fase do gerador e de sua carga, formada por uma resistência  $R_l$  em paralelo com a indutância  $L_l$ , é o mostrado na Figura 9.18(b). Para facilitar o entendimento de funcionamento do gerador, a impedância do estator foi desprezada e, assim sendo, a reatância de magnetização fica paralela à reatância capacitiva e à impedância de carga; no caso da carga ser reativa indutiva, o capacitor, calculado para a auto-excitação, é a única fonte de reativos; por sua vez, se a carga tiver natureza capacitiva, ela fornece reativos adicionais à excitação.

No funcionamento auto-excitado, a frequência e a tensão geradas dependem dos valores da capacitância, da velocidade de eixo e da carga. O cálculo dos capacitores é feito a partir de curva de magnetização da máquina de indução, à semelhança dos geradores auto-excitados de corrente contínua; neste caso, o circuito equivalente é derivado do mostrado na Figura 9.18(b) – retira-se a impedância de carga. Se a máquina possui um magnetismo residual, quando o rotor é colocado em rotação ocorre a geração de uma pequena tensão; se esta é suficiente para que, aplicada ao banco de capacitores, estabeleça uma pequena corrente de magnetização, a excitação se inicializa; esta corrente de magnetização, circulando pelos enrolamentos de estator, aumenta o fluxo magnético, gerando uma tensão maior. O processo contínuo de aumentos de tensão,

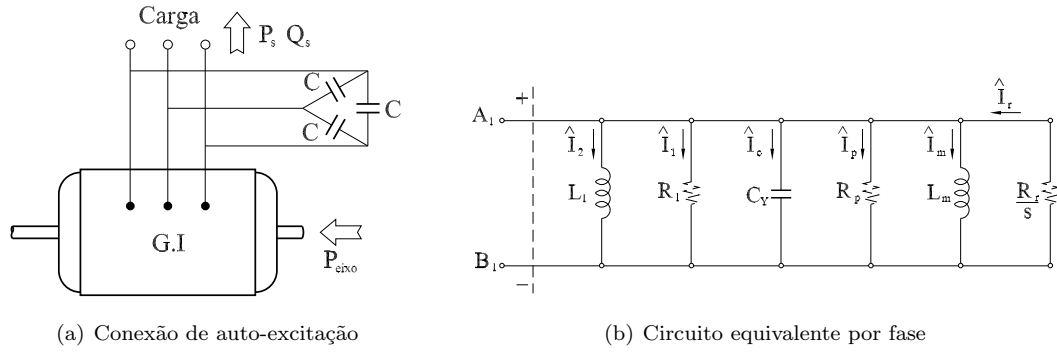


Figura 9.18: Gerador de indução auto-excitado.

de corrente e de fluxo permanecem até o ponto no qual a tensão gerada pelo gerador de indução torna-se igual àquela dos capacitores. Graficamente, a tensão de regime é obtida ao se sobrepor as curvas  $V_c \times I_c$  do capacitor à curva de magnetização da máquina de indução: o ponto de operação é o ponto de intersecção dessas curvas, como ilustrado na Figura 9.19(a). A maior parte da potência reativa exigida pelo gerador sem carga diz respeito à magnetização do entreferro, representada pela indutância de magnetização, uma vez que os fluxos dispersos são significativamente menores do que o fluxo do entreferro.

Na verdade este ponto de operação refere-se ao funcionamento sem carga e na velocidade em que se tem a curva de magnetização; à medida que a carga aumenta, a tensão de terminal diminui, mesmo que a velocidade seja constante, porque as quedas de tensão internas ao gerador aumentam, como ilustrado na Figura 9.19(b); esta diminuição da tensão de terminal leva à diminuição da tensão sobre os capacitores e, conseqüentemente, ocorre a perda de excitação; para cargas indutivas, a auto-excitação pode tornar-se crítica pois adicionalmente a carga absorve reativos, como explicado anteriormente. Uma forma de se diminuir o efeito da carga na excitação e, portanto, melhorar a regulação de tensão, é utilizar a conexão paralela-longa dos capacitores, na qual o capacitor em série com a fase do estator compensa os reativos com o aumento da carga<sup>3</sup>.

Uma vez que a corrente pelos terminais externos  $A_1$  e  $B_1$  é nula, a admitância equivalente vista por estes terminais externos é dada por

$$\left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_l} + \frac{s}{R_r}\right) + j(\omega_1 C_Y - \frac{1}{\omega_1 L_m} - \frac{1}{\omega_1 L_l}) = 0$$

que decomposta em sua parte real (parte ativa) e imaginária (parte reativa) resulta nas relações

$$s = -R_r \left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_l}\right) \quad (9.20)$$

$$C_Y = \frac{1}{\omega_1^2} \left(\frac{1}{L_m} + \frac{1}{L_l}\right).$$

Como o escorregamento é definido por

$$s = \frac{2/p \omega_1 - \omega_m}{2/p \omega_1}$$

a sua substituição na Equação (9.20) estabelece a equação da frequência elétrica de estator dada por

$$\omega_1 = \frac{\omega_m}{2/p[1 + R_r(1/R_p + 1/R_l)]}.$$

Com base nesta equação, pode-se afirmar que, se o gerador é acionado a velocidade constante, o aumento de carga (diminuição de  $R_l$ ) leva à diminuição da frequência elétrica  $\omega_1$ .

<sup>3</sup>Cf. BIM E., BURIAN Y., SZAJNER J., Voltage Compensation of an Induction Generator with Long-Shunt Connection, IEEE Trans. on Energy Conversion, vol. 4, no 3, september 1989.

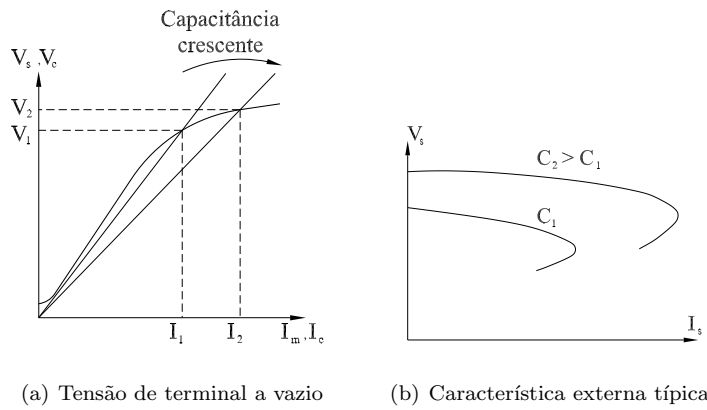


Figura 9.19: Tensão de terminal do gerador de indução auto-excitado em função da capacitância.

Se o gerador funciona sem carga, obtêm-se o escorregamento e a frequência de estator dadas por

$$s = -\frac{R_r}{R_p}$$

$$\omega_1 = \sqrt{L_m C_Y} . \quad (9.21)$$

Geralmente  $R_r \ll R_p$  e, portanto, o escorregamento é muito baixo, isto é,  $s \approx 0$ . Outro fato marcante da auto excitação, quando o gerador está sem carga, é que ela corresponde à ressonância entre o capacitor externo e a indutância de magnetização, como descrito pela segunda Equação (9.21); assim sendo, a velocidade na qual ocorre esta ressonância é

$$\omega_m \approx \frac{2}{p} \sqrt{L_m C_Y} .$$

Um teste interessante de se fazer é conectar o banco de capacitores em paralelo com os terminais de estator e aumentar a velocidade de eixo gradualmente. Verifica-se, então, que a tensão surge repentinamente em uma dada velocidade para um dado valor de capacitância – neste instante ocorre a ressonância entre o capacitor e a indutância vista pelo terminais de estator.

**Exemplo 9.7** A curva de magnetização de uma máquina de indução, 3 hp, 220 V, 60 Hz, quatro pólos e estator em delta é obtida ao se acionar o seu eixo na velocidade síncrona, por uma fonte mecânica externa, e no mesmo sentido do campo girante estabelecido pela fonte trifásica de 60 Hz, que alimenta o estator. Ao se variar, gradualmente, a magnitude da tensão aplicada, obteve-se os correspondentes valores da corrente de linha, dados na seguinte tabela:

$V_s, V$	20	50	80	110	142	160	180	200	220	240
$I_s, A$	0,30	0,65	1,040	1,44	1,96	2,31	2,86	3,50	4,53	5,24

Se a máquina funciona no modo gerador, acionada na velocidade de 1.800 rot/min, determine o valor aproximado da capacitância do capacitor conectado entre os terminais de fase, para que se gere a vazão a tensão de terminal nominal.

#### Solução

Inicialmente calcula-se o valor da indutância de magnetização do circuito equivalente estrela, quando a tensão de terminal é 220 V:

$$L_m = \frac{220/\sqrt{3}}{377 \times 4,53} = 74,37 \text{ mH} .$$

Como o gerador está a vazão, o escorregamento é praticamente nulo e, portanto, a frequência de estator é 60 Hz. Como os capacitores estão conectados em delta (reatância entre terminais é  $X_c$ ), a reatância

equivalente do circuito equivalente estrela é  $X_{cY} = X_c/3$ . A partir da condição da auto-excitação, dada por  $X_{cY} = 1/\omega_1 L_m$ , obtém-se

$$\Rightarrow C = \frac{1}{3 \times 377^2 \times 74,37 \text{ mH}} \approx 32 \mu\text{F}.$$

## 9.7 Motor monofásico

Máquinas de indução polifásicas desenvolvem torque de partida pois estabelecem ondas girantes de fmm e, conseqüentemente, geram campos girantes, como mostrado no Capítulo 6; por sua vez, a distribuição de fmm das máquinas monofásicas é estacionária e, portanto, não são capazes, por si só, de desenvolverem torque de partida, a menos que sejam colocadas em movimento, por um esquema auxiliar qualquer. A teoria mais empregada para explicar o funcionamento do motor está baseada no fato de que uma onda estacionária pode ser vista, matematicamente, como o equivalente a duas ondas girantes de mesma velocidade, mas de sentidos contrários.<sup>4</sup>

É grande a quantidade de motores de indução monofásicos utilizados, e, geralmente, são de pequenas potências.

### 9.7.1 Teoria dos dois campos girantes

Como analisado na Seção 6.2.1, a componente fundamental da distribuição da onda estacionária de fmm de uma fase é, matematicamente, o resultado da soma de duas ondas senoidais girantes  $f_{g,s}^+(t, \beta_s)$  e  $f_{g,s}^-(t, \beta_s)$ : a componente  $f_{g,s}^+(t, \beta_s)$  gira no sentido anti-horário (sentido de  $\beta_s$  positivo) e a componente  $f_{g,s}^-(t, \beta_s)$  gira no sentido horário (sentido de  $\beta_s$  negativo); as amplitudes de cada uma dessas ondas são iguais à metade da amplitude da fundamental estacionária. Para maior clareza e conforto, na leitura dessa seção, as expressões são escritas novamente:

$$f_{g,s}(t, \beta_s) = \underbrace{\frac{n_s I_s}{\pi} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{i1} - \frac{p}{2} \beta_s)}_{f_{g,s}^+(t, \beta_s)} + \underbrace{\frac{n_s I_s}{\pi} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{i1} + \frac{p}{2} \beta_s)}_{f_{g,s}^-(t, \beta_s)}.$$

O motor monofásico é, então, visto como equivalente a dois outros motores, decorrentes da existência dos fluxos girantes produzidos pelas fmm's  $f_{g,s}^+(t, \beta_s)$  e  $f_{g,s}^-(t, \beta_s)$ ; o fluxo que gira no mesmo sentido de rotação do eixo é denominado *componente de rotação positiva*, e, aquele que gira no sentido oposto, é identificado por *componente de rotação negativa*. Se os subscritos  $f$  e  $b$  são empregados na identificação dos fluxos de rotação positiva e negativa, respectivamente, os escorregamentos correspondentes a cada um dos "dois motores  $f$  e  $b$ " são dados por

$$s_f = \frac{\omega_{sm} - \omega_m}{\omega_{sm}}$$

$$s_b = \frac{-\omega_{sm} + \omega_m}{-\omega_{sm}}.$$

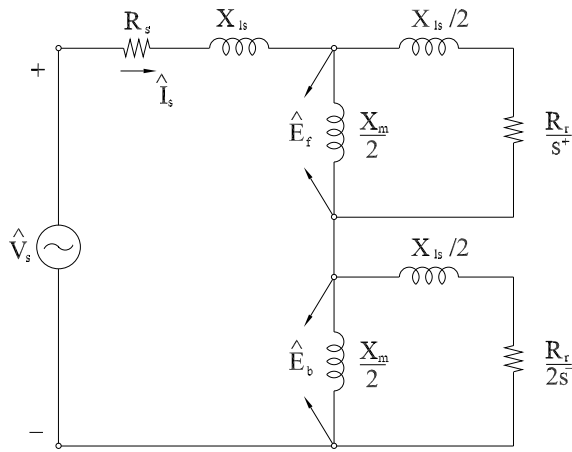
A combinação dessas duas últimas expressões resulta na seguinte relação entre os escorregamentos:

$$s_b = 2 - s_f.$$

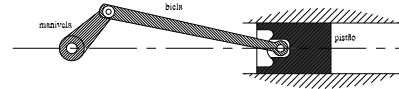
A freqüência das correntes do rotor  $\hat{I}_{r,f}$  e  $\hat{I}_{r,b}$ , estabelecidas pelas respectivas tensões induzidas, são  $s_f \omega_1$  e  $s_b \omega_1$ . Na partida tem-se  $s_f = s_b = 1$  e, conseqüentemente, a magnitude e a freqüência dessas correntes são iguais e, portanto, o torque associado a cada uma delas, também são iguais e agem em sentido contrário, o que significa torque líquido nulo, isto é, torque de partida nulo.

O circuito equivalente do motor monofásico em movimento e com apenas o enrolamento principal, está ilustrado na Figura 9.20. Neste circuito  $R_s$ ,  $L_{ls}$ ,  $L_m$ ,  $L_{lr}$  e  $R_r$  são os parâmetros, referidos ao estator, dos enrolamentos do estator e do rotor reais. Observe no circuito equivalente a existência de dois "rotores": um rotor associado à componente  $f$  e outro à componente  $b$ . Como as fmm's desses rotores têm magnitudes

<sup>4</sup>Uma análise mais completa dos motores monofásicos é encontrada em SEN P.C., Principles of Electrical Machines and Power Electronics, John Wiley&Sons, 1997.



(a) Circuito equivalente



(b) Característica torque×escorregamento

Figura 9.20: Motor monofásico com o enrolamento principal. ESTA FIGURA PRECISA SER CORRIGIDA

iguais à metade da fmm estacionária, os parâmetros dos circuitos equivalentes associados têm valores que são a metade daqueles definidos para o enrolamento real. Os torques desenvolvidos pelas componentes de rotação positiva e negativa (escorregamentos  $s_f$  e  $s_b$ ) estão ilustrados na Figura 9.20(b).

Geralmente, para sistematizar os cálculos, são definidas as impedâncias dos circuitos de rotação positiva  $Z_f$  e negativa  $Z_b$

$$Z_f = R_f + jX_f = \frac{0,5(R_r/s_f + jX_r)j0,5X_m}{0,5[R_2/s_f + j(X_r + X_m)]}$$

$$Z_b = R_b + jX_b = \frac{0,5(R_r/s_b + jX_r)j0,5X_m}{0,5[R_2/s_b + j(X_r + X_m)]}$$

que, após as algumas simplificações, tornam-se

$$Z_f = R_f + jX_f = 0,5 \frac{(R_r/s_f + jX_r)jX_m}{R_2/s_f + j(X_r + X_m)}$$

$$Z_b = R_b + jX_b = 0,5 \frac{(R_r/s_b + jX_r)jX_m}{R_2/s_b + j(X_r + X_m)}.$$

As relações de potência e de torque obtidas para as máquinas polifásicas aplicam-se também às monofásicas, se são consideradas, separadamente, as componentes girantes do fluxo. Assim sendo, têm-se as seguintes relações:

- Potência do entreferro

$$P_{g,f} = I^2 R_f$$

$$P_{g,b} = I^2 R_b$$

$$P_g = P_{g,f} + P_{g,b}$$

- Perdas elétricas totais no rotor

$$P_{Rr} = sP_{g,f} + (2 - s)P_{g,b}$$

- Potência e torque desenvolvidos

$$P_{em} = (1 - s_f)(P_{g,f} + [1 - (2 - s_f)P_{g,b}]) = (1 - s_f)(P_{g,f} - P_{g,b})$$

$$T_{em} = \frac{P_{em}}{(1 - s_f)\omega_{sm}} = \frac{P_{g,f}}{\omega_{sm}} - \frac{P_{g,b}}{\omega_{sm}}$$

- Potência e torque de eixo

$$P_{eixo} = P_{em} - \text{perdas mecânicas}$$

$$T_{eixo} = \frac{P_{eixo}}{\omega_m}$$

O motor monofásico tem o inconveniente de desenvolver torques de dupla frequência, devidos à interação entre as componentes positivas e negativas de fluxos magnéticos: embora tenham valor médio nulo, produzem vibração e ruído. Estes torques não podem ser calculados com base no circuito equivalente, exigindo, então, uma análise mais física do que quantitativa.

Ao se empregar a Expressão (8.54), na qual o torque é função dos fluxos de estator e de rotor, pode-se escrever, por exemplo, o torque devido à interação entre a componente de rotação positiva do fluxo de estator  $\psi_{s,f}$  e àquela negativa do rotor  $\psi_{r,b}$ :

$$T_{em} = k \psi_{s,f} \psi_{r,b} \text{sen } \theta_{sr}$$

na qual  $k$  é uma constante e  $\theta_{sr}$  é o ângulo de defasagem entre esses fluxos; como a velocidade relativa entre estes fluxos é  $2\omega_1$ , a equação horária deste ângulo é

$$\theta_{sr} = 2\omega_1 t + \theta_0$$

e, portanto, a expressão do torque desenvolvido torna-se explicitamente função da dupla frequência:

$$T_{em} = k \psi_{s,f} \psi_{r,b} \text{sen}(2\omega_1 t + \theta_0).$$

Expressões semelhantes são obtidas para as demais interações entre as componentes de rotação positiva e negativa.

## 9.7.2 Métodos de partida

A maioria dos métodos de partida de motores de indução monofásicos empregam a estratégia de se criar campos magnéticos bifásicos, através de enrolamentos auxiliares conectados em paralelo com o enrolamento principal. Os métodos mais comuns de partida são descritos na seqüência:

### Fase auxiliar

O enrolamento auxiliar é deslocado espacialmente do principal de  $90^\circ$  graus elétricos e projetado para que seja menos indutivo (número de espiras) e tenha resistência elétrica maior (seção reta do condutor menor) do que o enrolamento principal; ao se conectar o auxiliar em paralelo com o principal, as correntes dos dois enrolamentos tornam-se defasadas no tempo, gerando, então, campos girantes. Uma chave centrífuga desconecta o auxiliar quando a velocidade do eixo atinge aproximadamente 75% da síncrona. Nas Figuras 9.21(a) e 9.21(b) estão ilustrados o diagram fasorial e o esquema de ligação dos enrolamentos.

### Fase auxiliar em série com capacitor de partida

As correntes defasadas nos dois enrolamentos é obtida, neste método de partida, com a inserção de um capacitor eletrolítico seco em série com o auxiliar; a capacitância do capacitor geralmente é escolhida de grande valor para que as correntes resultantes nos dois enrolamentos estejam defasadas entre si de aproximadamente  $90^\circ$ . Como o capacitor é calculado para otimizar o torque de partida, uma chave centrífuga, tal como no caso sem capacitor, desconecta o auxiliar em série com o capacitor, quando a velocidade de eixo está próxima da síncrona, como ilustrado na Figura 9.21(c).

## Fase auxiliar em série com capacitor de regime

Este método de partida difere do caso anterior pelo fato de o capacitor em série com o enrolamento auxiliar ficar permanentemente conectado em paralelo com o principal, como ilustrado na Figura 9.21(d)

## Fase dividida combinada a capacitores de partida e de regime

Este é caso em que se aproveita o capacitor permanente na partida, além daquele específico para a partida, como ilustrado na Figura 9.21(e). Esta configuração resulta no melhor desempenho do motor monofásico, quando comparada com as demais.

## Exercícios

**9.1** Se o motor de indução trifásica tem, idealmente, resistências das bobinas (estator e rotor) e perdas rotacionais (incluídas as ferro) nulas, qual seria a consequência no seu funcionamento?

**9.2** Mostre que para a máquina de indução trifásica, rotor gaiola de esquilo, a relação entre o fasor tensão de terminal do estator  $\hat{V}_s$  e o fasor tensão do entreferro  $\hat{E}_g$  é dada por

$$\hat{E}_g = \frac{\hat{V}_s}{1 + Z_s(Z_m + Z_r)/Z_m Z_r}.$$

**9.3** Refaça o Exemplo 9.1 para o escorregamento de 5%.

**9.4** Refaça o Exemplo 9.1, com a inclusão no circuito equivalente da resistência  $R_p = 363,4 \Omega$  em paralelo com a reatância de magnetização ( esta resistência representa as perdas no ferro).

**9.5** Refaça os Exemplos 6.9 e 6.10.

**9.6** Empregue o diagramas vetoriais, do tipo mostrado na Figura 9.1(a), e ilustre o efeito da variação do escorregamento em três situações: (a)  $s \approx 0$  (b)  $s \approx 0,5$  e (c)  $s = 1$ .

**9.7** Refaça o Exemplo 9.2, considerando que as perdas ferro e mecânicas totalizem 200 W.

**9.8** Mostre que o escorregamento para o qual ocorre o máximo valor de  $P_{em}$ , é menor do que aquele para o qual se obtém o máximo  $T_{em}$ .

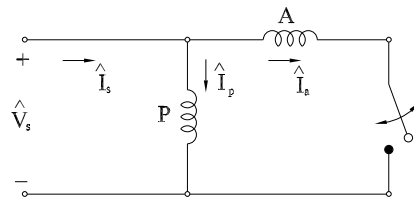
**9.9** Uma máquina de indução de rotor tipo anel deve ser utilizada como conversor de frequência, no qual a carga elétrica é alimentada a partir dos terminais de rotor, o que significa que a frequência das tensões que alimenta a carga é a de escorregamento. A velocidade de eixo do conversor é controlada por uma fonte mecânica externa que, no caso desta questão, é um motor cuja velocidade de eixo é constante e igual a 1.200 rot/min. A carga demanda a potência nominal de 10 kW e frequências elétricas na faixa de 90 a 45 Hz. Se a máquina de indução é ligada a uma fonte de 380 V e 60 Hz, especifique a potência nominal da máquina de indução, se todas as suas perdas são insignificantes.

**9.10** O conjunto formado por uma máquina de indução com rotor bobinado acoplada diretamente ao eixo de uma máquina síncrona é utilizado para transferir a potência  $P$  do sistema de 60 Hz para o sistema de 50 Hz. O estator da máquina de indução é alimentado pelo sistema de 60 Hz e os seus terminais de rotor, bem como os do estator da máquina síncrona são conectados ao sistema de 50 Hz, como está ilustrado na Figura Exercício 9.10. Ignore todas as perdas que o sistema possa ter e determine: (a) o escorregamento, (b) o número mais adequado de pólos das máquinas e (c) a potência nominal de cada uma das máquinas para que a potência desejada seja transferida.

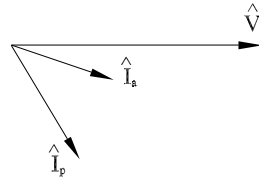
**9.11** Um motor de indução desenvolve o torque de 1,0 p.u. na velocidade de 0,97 p.u., alimentado com tensão e frequência de estator nominais. Se o controle é realizado com o fluxo do entreferro constante, qual será o escorregamento para o qual ele desenvolve o mesmo torque, se é alimentado na frequência de 0,80 p.u.?

**9.12** O estator de um motor de indução, conectado em estrela série, é modificado para o estrela paralelo, como explicado na seção 9.4.4. Determine:

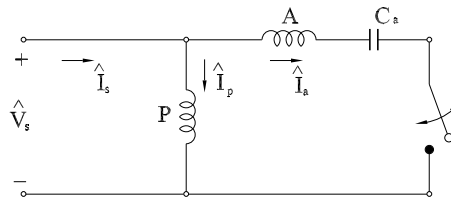




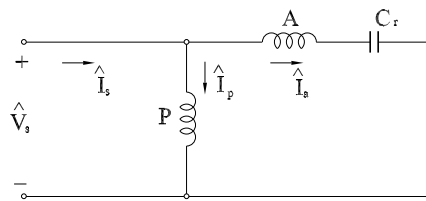
(a) Conexão dos enrolamentos auxiliar e principal



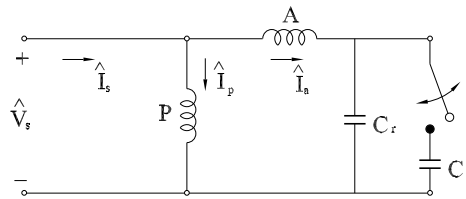
(b) Diagrama fasorial



(c) Conexão com o capacitor de partida



(d) Conexão com o capacitor permanente



(e) Partida com os capacitores de partida e permanente

Figura 9.21: Partida com o estator de dois enrolamentos: o principal e auxiliar.

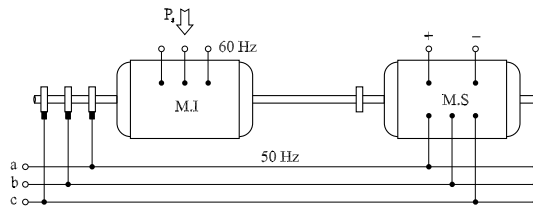


Figura Exercício 9.10

- (a) Qual deve ser as tensões de linha de cada uma dessas conexões para que o fluxo do entreferro por pólo seja aproximadamente constante?
- (b) A relação entre as potências de saída das duas conexões, quando a carga é de torque constante e
- (c) A relação entre os torques de saída das duas conexões, quando a carga passa a ser de potência constante. Admita que as perdas elétricas na resistência do estator e no ferro, bem como as perdas mecânicas sejam nulas.

**9.13** Estime a relação entre os escorregamentos nos quais ocorrem o máximo torque, quando se faz o controle de velocidade pela variação do número de pólos, na conexão dos enrolamentos de estator em estrela. A resposta deve ser dada se  $\hat{s}_y$  é maior, menor ou igual a  $\hat{s}_{yy}$ .

**9.14** Determine o escorregamento, o torque máximo e o correspondente fator de potência da máquina do Exemplo 9.6, quando ela funciona no modo motor, nas seguintes situações: (a)  $V_s = 220\text{ V}$  e  $60\text{ Hz}$  (b)  $V_s = 110\text{ V}$  e  $30\text{ Hz}$  (c)  $V_s = 55\text{ V}$  e  $15\text{ Hz}$ .

**9.15** Determine, para o motor do Exemplo 9.1, quando ele funciona sem carga, (a) a tensão do entreferro e compare o resultado com o obtido nas condições nominais. Se o fluxo do entreferro é constante, independente se está a vazio ou com carga, (b) calcule o torque desenvolvido pelo motor nas condições nominais. Compare este torque com aquele obtido na situação em que o fluxo do entreferro varia.

**9.16** Se o motor do exercício 9.14 é alimentado na frequência elétrica igual a  $15\text{ Hz}$ , tal que o fluxo do entreferro seja o mesmo da condição  $V_s = 220\text{ V}$  e  $60\text{ Hz}$ , determine (a) a nova frequência de escorregamento, quando o torque desenvolvido é máximo, (b) o correspondente fator de potência e (c) a tensão de estator exigida na nova frequência.

**9.17** Se o motor do Exercício 9.14, alimentado em  $V_s = 220\text{ V}$  e  $60\text{ Hz}$ , funciona com  $s = 3\%$ , determine, (a) o fasor corrente de estator e (b) o torque desenvolvido.

**9.18** Considere que a tensão e a frequência do exercício anterior são alteradas para  $V_s = 55\text{ V}$  e  $15\text{ Hz}$ ; se o torque demandado é igual ao obtido nas condições de  $V_s = 220\text{ V}$ ,  $60\text{ Hz}$  e  $s = 3\%$ , calcule a nova velocidade com que o motor funcionará.

**9.19** Deseja-se controlar o motor de indução mantendo constante a corrente na fase do estator, tal que as variações da tensão de terminal e da frequência do estator resultem na fem de estator constante (magnitude e frequência iguais aos seus valores nominais – o fasor da fem de estator é dado por  $\hat{E}_s = \hat{V}_s - R_s \hat{I}_s$ ). Mostre que a tensão terminal de estator  $\hat{V}_x$  de frequência  $f_x$  deve ser ajustada conforme a expressão

$$\hat{V}_x = \frac{f_x}{f_n} \hat{V}_n + R_s \hat{I}_s \left(1 - \frac{f_x}{f_n}\right).$$

**9.20** Para controlar a resistência efetiva do circuito de rotor, pode-se utilizar o esquema de uma chave eletrônica em paralelo com a resistência externa constante, como mostrada na Figura Exercício 9.20. Para o ciclo de trabalho dado por  $T_l / (T_l + T_d)$ , mostre que a resistência efetiva é

$$R_{efet} = R_r + \left(1 - \frac{T_l}{T_l + T_d}\right) R_{ext}.$$

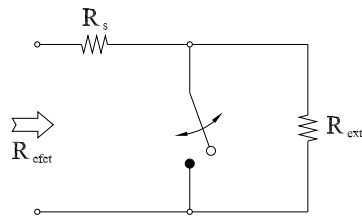


Figura Exercício 9.20

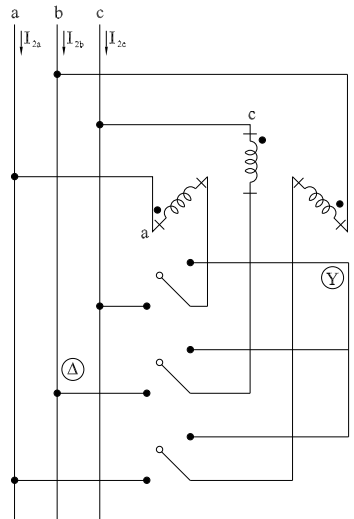


Figura Exercício 9.21

**9.21** Foi verificado que um motor de indução trifásico tomava da rede de alimentação uma corrente de partida  $I_{linha,\Delta}$ , quando seus enrolamentos de estator estavam conectados em delta, gerando um conjugado de partida  $T_\Delta$ . Com o propósito de diminuir a corrente de partida o motor foi conectado à rede através de uma chave estrela-triângulo, com a função de conectar os enrolamentos em estrela na partida, e uma vez alcançada uma determinada velocidade, reconectá-los em delta, conforme mostrado na Figura 9.21. Calcular:

- A relação entre correntes  $I_{linha,Y}/I_{linha,\Delta}$
- A relação entre torques  $T_Y/T_\Delta$ .